УДК 519.21

Т. А. Бардадым, канд. физ.-мат. наук,
А. В. Иванов, д-р физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ФУНКЦИОНАЛОМ МЕТОДА „СКЛАДНОГО НОЖА". I*

An asymptotic expansion of the "jackknife" method functional used for the estimation of observation error variance in a nonlinear regression model is obtained.

Одержано асимптотичний розклад функціонала методу „складаного ножа", що використовується для оцінювання дисперсії помилки спостережень у нелінійній регресійній моделі.

1. Введение. Метод „складного ножа" широко используется в прикладных работах и тщательно исследуется в теоретических (см., например, [1–3]). Его идея состоит в том, что для получения статистической оценки неизвестного параметра используется специальный способ обработки экспериментальных данных, а именно: вычисляется некоторая функция (чаще всего — среднее арифметическое) от оценок, полученных по уменьшенной выборке. В результате вероятностные характеристики оценки изменяются по сравнению со стандартными оценками: например, уменьшается величина смещения оценки.

В данной работе метод „складного ножа" используется для оценивания дисперсии ошибки наблюдений в нелинейной регрессионной модели: в ч. I получено асимптотическое разложение (а. р.) этой оценки дисперсии; в ч. II найдены начальные члены а. р. ее смещения и дисперсии.

Единственный известный авторам результат для такой модели содержится в работе [4], в которой для гауссовского случая найдены первые три члена а. р. функционала метода „складного ножа". Развитая в [5] теория позволяет обойтись без предположения о гауссовости ошибок.

2. Описание модели и обозначения. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство, $\mathfrak{B}^n$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. Рассматриваются статистические эксперименты $(R^n, \mathfrak{B}^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta)$, порожденные наблюдениями $X = (X_1, \ldots, X_n)$ вида

$$X_j = g(j, \theta) + \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $g(j, \theta)$, $j \geq 1$, — неслучайные функции, заданные на Θ^c, Θ^c — замыкание в R^q открытого выпуклого множества $\Theta \in R^q$, $\{\varepsilon_j\}$ — назависимые случайные величины (с. в.) с одной и той же функцией распределения $P(X)$, которая не зависит от θ, и дисперсией $\sigma^2 > 0$.

Определение. *Оценкой наименьших квадратов (о. н. к.) неизвестного параметра* $\theta \in \Theta^c$, *полученного по наблюдениям* $X_1, \ldots, X_n$ *вида* (1), *называется любой случайный вектор* $\hat\theta_n = \hat\theta_n(X_1, \ldots, X_n) \in \Theta^c$, *для которого*

$$L_n(\hat\theta_n) = \inf_{\theta \in \Theta^c} L_n(\theta), \quad L_n(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \left[X_j - g(j,\theta)\right]^2.$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

Если обычно для оценки дисперсии ошибки наблюдений используют статистику

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[X_j - g\left(j, \hat{\theta}_n\right) \right]^2, \tag{2}$$

то в методе „складного ножа" ее заменяет статистика

$$J_n = n \hat{\sigma}_n^2 - \frac{n-1}{n} \sum_{t=1}^{n} \hat{\sigma}_{(-t)}^2, \tag{3}$$

где

$$\hat{\sigma}_{(-t)}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq t} \left[X_j - g\left(j, \theta_{(-t)}\right) \right]^2$$

— аналогичная $\hat{\sigma}_n^2$ статистика для выборки, из которой удален t-й элемент, а $\theta_{(-t)}$ — о. н. к. параметра θ, полученная по такой усеченной выборке. Будем и далее помечать индексом $(-t)$ величины, относящиеся к усеченной выборке.

Предположим, что у функции $g(j, \theta)$ для каждого j существуют и непрерывны в Θ^c все частные производные по переменным $\theta = (\theta^1, \ldots, \theta^q)$ до порядка $k+2$ включительно, $k \geq 2$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i$, $g^{(\alpha)}(\theta) = \left(\partial^{|\alpha|} / \partial^{\alpha_1} \theta_1 \ldots \partial^{\alpha_q} \theta_q \right) g$. Будем использовать также другое обозначение для производных: для $r = 1, \ldots, q$ и $i_1, \ldots, i_r \in \{1, \ldots \ldots, q\}$ пусть $g_{i_1 \ldots i_r}(\theta) = \left(\partial^r / \partial\theta_{i_1} \ldots \partial\theta_{i_r} \right) g$.

Введем обозначения:

$$\mathfrak{J}_n(\theta) = \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_i(j,\theta)\, g_l(j,\theta) \right)_{i,j=1}^{q}, \quad \Lambda_n(\theta) = \left(\Lambda_n^{il}(\theta) \right)_{i,l=1}^{q} = \mathfrak{J}_n^{-1}(\theta),$$

$$\varphi_n(\theta_1, \theta_2) = \sum_{j=1}^{n} \left[g\left(j, \theta_1\right) - g\left(j, \theta_2\right) \right]^2,$$

$$u_n = n^{1/2}(\hat{\theta}_n - \theta), \quad d(\alpha; \theta) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(g^{(\alpha)}(j, \theta) \right)^2 \right)^{1/2},$$

$${}_l b_{i_1 \ldots i_r}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^l\, g_{i_1 \ldots i_r}(j, \theta), \quad l = 1, 2, \ldots,$$

$${}_l b^{(\alpha_1) \ldots (\alpha_\gamma)}(\theta) = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^l\, g^{(\alpha_1)}(j, \theta) \ldots g^{(\alpha_\gamma)}(j, \theta), \quad l = 1, 2, \ldots,$$

$$\Phi_{\alpha n}(u_1, u_2) = \sum_{j=1}^{n} \left[g^{(\alpha)}\left(j, \theta + u_1\right) - g^{(\alpha)}\left(j, \theta + u_2\right) \right]^2,$$

$$\mu_r = E|\varepsilon_j|^r, \quad m_r = E\varepsilon_j^r, \quad s(R) = \{ u \in R^q : |u| < R \},$$

$U(\theta) = \Theta - \theta$, $Q \subset \Theta$ — некоторый компакт, $\lambda_{\min}(A)$ — наименьшее собственное число симметричной положительно определенной матрицы A,

$$\Pi_{(i_1)(i_2 i_3)}^{(n)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j, \theta)\, g_{i_2 i_3}(j, \theta),$$

$$\Pi_{(i_1)(i_2 i_3 i_4)}^{(n)}(\theta) = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} g_{i_1}(j, \theta)\, g_{i_2 i_3 i_4}(j, \theta), \quad \ldots .$$

Далее будем считать, что если в произведении двух или большего числа множителей какой-нибудь индекс встречается дважды, то это означает суммирование по всем значениям этого индекса от 1 до q. Например,

$$\Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} b_{i_1 i_2} b_{i_3} = \sum_{i_1, i_2, i_3 = 1}^{q} \Lambda_n^{ii_1} \Lambda_n^{i_2 i_3} b_{i_1 i_2} b_{i_3}, \quad \ldots .$$

3. Условия регулярности. Для доказательства теоремы об а. р. функционала J_n нам потребуются условия, которые частично совпадают с условиями для получения а. р. оценки наименьших квадратов и оценки дисперсии (2), а именно (см. [5]):

I(l). Для произвольного $R > 0$ существуют такие константы $c_i = c_i(\alpha, R) < < \infty$, $i = 1, 2$, что

1) $\sup\limits_{\theta \in Q} \sup\limits_{u \in s^c(R) \cap U^c(\theta)} n^{-1} d^2(\alpha; \theta + u) \le c_1, \quad |\alpha| = 1, \ldots, l;$

2) $\sup\limits_{\theta \in Q} \sup\limits_{u_1, u_2 \in s^c(R) \cap U^c(\theta)} n^{-1} \Phi_{\alpha n}(u_1, u_2) |u_1 - u_2|^{-2} \le c_2, \quad |\alpha| = l.$

II(l). 1) $\varliminf\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{\theta \in Q} n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\prod\limits_{r=1}^{s+1} g^{(\alpha_r)}(j, \theta) \right)^2 > 0$

для всех $|\alpha_r| = 1, \ldots, s$, для которых $g^{(\alpha_r)}(j, \theta) \not\equiv 0$, $s = 1, \ldots, l$;

2) $\varliminf\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{\theta \in Q} \min\limits_{1 \le t \le n} (n-1)^{-1} d_{(-t)}^2(\alpha, \theta) > 0$

для всех $|\alpha| = 1, \ldots, l+2$, для которых $g^{(\alpha)}(j, \theta) \not\equiv 0$.

III(l, m). $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{\theta \in Q} n^{-1} \sum\limits_{j=1}^{n} \left| g^{(\alpha)}(j, \theta) \right|^s < \infty$, $s = ([m/3] + 1)(l - 1)$ для

$|\alpha| = 1, \ldots, l-2$, $\quad s = m$ для $|\alpha| = l-1, l$.

IV. $\varliminf\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{\theta \in Q} \min\limits_{1 \le j \le n} \lambda_{\min}\Big((n-1)^{-1} (n \mathfrak{I}_n(j, \theta) - \mathfrak{I}(j, \theta)) \Big) = \lambda_0 > 0,$

где $\mathfrak{I}(j, \theta) = \big(g_i(j, \theta) g_r(j, \theta) \big)_{i, r = 1}^{q}$.

V(l, m). $\mu_{(l+1)([m/3]+1)} < \infty$.

VI(m). $\sup\limits_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| \hat\theta - \theta \right| \ge r \right\} \le c r^{-m}$ для $\hat\theta = \hat\theta_n, \hat\theta_{(-t)}, 1 \le t \le n$

с одной и той же константой $c = c(m) < \infty$.

Совокупность условий, обеспечивающих выполнение свойства VI(m) оценки $\hat\theta_n$, содержится в работах [5–7]. Нам удобнее использовать свойство VI(m) как исходное предположение. Всюду далее c_i с соответствующим индексом будет обозначать положительную константу.

4. Основной результат. Теорема 1. *Если для модели* (1) *выполняются приведенные выше условия регулярности* I$(k+2)$, II(k), III$(k+2, m)$, IV, V(k, m), VI(m), *то для некоторого целого* $m \ge \max(6, k+2)$

$$\sup_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| n^{1/2}(J_n - \sigma^2) - \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2} G_{\nu n}(\theta) \right| > c_3 n^{-(k-1)/2} \log^{(k+1)/2} n \right\} =$$

$$= O(n^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} n), \tag{4}$$

где

$$G_{0n} = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon_j^2 - \sigma^2 \right), \tag{5}$$

а $G_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1, \ldots, k-2$, — *полиномы степени* $\nu + 1$ *относительно величин* ${}_l b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1, \ldots, \nu$, $1 \le l \le [\,\nu/2 + 1]$ *с равномерно ограниченными по* $\theta \in Q$ *и* n *коэффициентами. В частности,*

$$G_{1n} = -\Lambda_n^{ij}\, {}_1b_i\, {}_1b_j + \sigma^2 q, \tag{6}$$

$$G_{2n} = \Lambda_n^{i_1 j_1} \Lambda_n^{i_2 j_2} \Lambda_n^{i_3 j_3} \Pi_{(i_1 i_2)(i_3)}\, {}_1b_{j_1}\, {}_1b_{j_2}\, {}_1b_{j_3} -$$

$$- \Lambda_n^{i_1 j_1} \Lambda_n^{i_2 j_2}\, {}_1b_{i_1 i_2}\, {}_1b_{j_2}\, {}_1b_{j_1} + n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \Lambda_n^{i_1 j_1} \left(\varepsilon_t^2 - \sigma^2 \right) g_{i_1} g_{j_1} +$$

$$+ \sigma^2 \left(-\Lambda_n^{i_1 i_2} \Lambda_n^{i_3 j_3} \Pi_{(i_1 i_2)(i_3)}\, {}_1b_{j_3} + \Lambda_n^{i_1 j_1}\, {}_1b_{i_1 j_1} \right). \tag{7}$$

Общая формула для полинома $G_{\nu n}$ приведена ниже при доказательстве теоремы 1 (см. (22)). Следует заметить, что величина G_{2n} отличается от найденной в работе [4]. Это объясняется тем, что остаточные члены разложения в [4] не были центрированы. Однако они стохастически малы, если только центрированы. Следует также подчеркнуть, что в отличие от а. р. $\hat\sigma_n^2$ [8] полиномы $G_{\nu n}(\theta)$ уже не будут однородными относительно величин ${}_1b^{(\alpha)}(\theta)$.

5. Доказательство теоремы 1. При доказательстве будут применяться полученные в [5, 8, 9] утверждения об а. р. функционала $\hat\sigma_n^2(\theta)$ и о. н. к., справедливые при выполнении приведенных выше условий регулярности, отличающихся от условий из [5, 8, 9].

Лемма 1. *Существует постоянная* $c_4 > 0$ *такая, что для о. н. к. справедливо а. р.*

$$\sup_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| n^{1/2}\left(\hat\theta_n - \theta\right) - \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2} h_{\nu n}(\theta) \right| > c_4 n^{-(k-1)/2} \log^{k/2} n \right\} =$$

$$= o\left(n^{-(k-1)/2}\right), \tag{8}$$

где $h_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0, \ldots, k-2$, — *однородные векторные полиномы степени* $\nu + 1$ *от случайных переменных* ${}_1b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1, \ldots, \nu + 1$, *с равномерно ограниченными по* $\theta \in Q$ и n *коэффициентами. Для полиномов* $h_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0, \ldots, k-2$, *из* (8) *справедливы рекуррентные соотношения*

$$2 \sum_{r + |\alpha(r)| = \nu} \frac{1}{r!}\, {}_1b_{i i_1 \ldots i_r}(\theta) h_{\alpha_1 n}^{i_1}(\theta) \ldots h_{\alpha_r n}^{i_r}(\theta) =$$

$$= \sum_{r + |\alpha(r)| = \nu + 1} \frac{1}{r!}\, a_{i i_1 \ldots i_r}(\theta)\, h_{\alpha_1 n}^{i_1}(\theta) \ldots h_{\alpha_r n}^{i_r}(\theta), \quad i = 1, \ldots, q, \tag{9}$$

где $a_{i i_1 \ldots i_r}(\theta) = E_\theta^n\left(L_n(\theta)\right)_{i i_1 \ldots i_r}$; $\alpha(r)$ — *целочисленные векторы, которые при каждом* r *имеют* r *координат* (*см.* [9]).

Лемма 2. *Существует постоянная* $c_5 > 0$ *такая, что для оценки дисперсии справедливо а. р.*

$$\sup_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| n^{1/2}\left(\hat\sigma_n^2 - \sigma^2\right) - \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2} P_{\nu n}(\theta) \right| > c_5 n^{-(k-1)/2} \log^{k/2} n \right\} =$$

$$= o(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n), \tag{10}$$

где

$$P_{0n} = n^{-1/2} \sum_{j=1}^{n} \left(\varepsilon_j^2 - \sigma^2\right), \tag{11}$$

а $P_{\nu n}(\theta) = A_{\nu n}(\theta) - 2B_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1, \ldots, k-2$, — *однородные полиномы степени* $\nu + 1$ *относительно величин* ${}_1 b^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1, \ldots, \nu$, *с равномерно ограниченными по* $\theta \in Q$ *и* n *коэффициентами, причем*

$$A_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu+1} \frac{1}{r!} a_{i_1 \ldots i_r}(\theta) h_{\alpha_1 n}^{i_1}(\theta) \ldots h_{\alpha_r n}^{i_r}(\theta), \tag{12}$$

$$B_{\nu n}(\theta) = \sum_{r+|\alpha(r)|=\nu} \frac{1}{r!}\, {}_1 b_{i_1 \ldots i_r}(\theta) h_{\alpha_1 n}^{i_1}(\theta) \ldots h_{\alpha_r n}^{i_r}(\theta). \tag{13}$$

Приведенные выше условия регулярности обеспечивают справедливость лемм 1 и 2 не только для исходной, но и для усеченных выборок.

Применим лемму 2 к функционалу метода „складного ножа" (3):

$$n^{1/2}\left(J_n - \hat\sigma_n^2\right) = G_{0n} + \sum_{\nu=0}^{k-2} \Big\{ A_{\nu n}(\theta) n n^{-\nu/2} - 2B_{\nu n}(\theta) n n^{-\nu/2} -$$

$$- C_{\nu n}(\theta) n^{1/2} (n-1)^{-(\nu-1)/2} + 2D_{\nu n}(\theta) n^{1/2} (n-1)^{-(\nu-1)/2} \Big\} +$$

$$+ n n^{-(k-1)/2} R_{k-1,n}(\theta) + \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} n^{1/2} (n-1)^{-(k-2)/2} R_{k-1,(-t)}(\theta), \tag{14}$$

где $G_{0n} = P_{0n}$, $P_{\nu n}(\theta) = A_{\nu n}(\theta) - 2B_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1, \ldots, k-2$, — полиномы разложения функционала $\hat\sigma_n^2$ (2) (см. (12), (13)), а

$$C_{\nu n}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} A_{\nu(-t)}(\theta), \quad D_{\nu n}(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} B_{\nu(-t)}(\theta);$$

с. в. $R_{k-1,n}(\theta)$ и $R_{k-1,(-t)}(\theta)$ в остаточном члене имеют свойства

$$\sup_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| R_{k-1,n}(\theta) \right| > c_6 \log^{k/2} n \right\} = O(n^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} n), \tag{15}$$

$$\sup_{\theta \in Q} P_\theta^n \left\{ \left| R_{k-1,(-t)}(\theta) \right| > c_7 \log^{k/2} (n-1) \right\} =$$

$$= O((n-1)^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} (n-1)). \tag{16}$$

Более подробную информацию о структуре полиномов разложения (10) дает следующая лемма.

Лемма 3. *Полиномы* $P_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 1, \ldots, k-2$, *состоят из одночленов следующего вида*:

$$\prod_{r=1}^{\nu+\mu} \Lambda_n^{i_r j_r} \prod_{r=1}^{\mu} \Pi_{(m_r^1)(m_r^2)}^{(n)}(\theta) \prod_{r=1}^{\nu+1} {}_1 b_n^{(\alpha_r)}(\theta), \quad 0 \le \mu \le \nu - 1, \tag{17}$$

где (m_r^1), (m_r^2) — *всевозможные наборы индексов из* $\{i_2, \ldots, i_{\nu+\mu}\} \cup \{j_1, \ldots$ $\ldots, j_{\nu+\mu}\}$, *причем*

$$\bigcup_{r=1}^{\mu} \left((m_r^1) \cup (m_r^2) \right) \cup \bigcup_{\gamma=1}^{\nu+1} (\alpha_\gamma) = \{i_2, \ldots, i_{\nu+\mu}\} \cup \{j_1, \ldots, j_{\nu+\mu}\}.$$

Такую же структуру будут иметь и полиномы разложений, полученных по усеченным выборкам.

При доказательстве леммы 3 индукцией по ν показывается, что полиномы $h_{\nu n}(\theta)$, $\nu = 0, \dots, k-2$, (8) состоят из одночленов вида

$$\prod_{r=1}^{\nu+\mu+1} \Lambda_n^{i_r j_r} \prod_{r=1}^{\mu} \Pi_{(m_r^1)(m_r^2)}(\theta) \prod_{r=1}^{\nu+1} {}_1b_n^{(\alpha_r)}(\theta), \quad 0 \le \mu \le \nu, \tag{18}$$

причем $\bigcup_{r=1}^{\mu}\left((m_r^1)\cup(m_r^2)\right)\cup\bigcup_{\gamma=1}^{\nu+1}(\alpha_\gamma) = \{i_2, \dots, i_{\nu+\mu+1}\}\cup\{j_1, \dots, j_{\nu+\mu+1}\}$. При этом используются рекуррентные соотношения (9). Затем также по индукции с использованием соотношений (12), (13) и (18) доказывается утверждение леммы 3.

Для получения основной формулы следует избавиться от величин, имеющих индекс $(-t)$. Проведем следующие подстановки:

$$\Pi_{(m_1)(m_2)}^{(-t)} = \frac{n}{n-1}\left[\Pi_{(m_1)(m_2)}^{(n)} - n^{-1} g^{(m_1)}(t,\theta)\, g^{(m_2)}(t,\theta)\right]; \tag{19}$$

$${}_1b_{(-t)}^{(\alpha)}(\theta) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{1/2}\left[{}_1b_n^{(\alpha)}(\theta) - n^{-1/2}\varepsilon_t^1 g^{(\alpha)}(t,\theta)\right]; \tag{20}$$

$$\Lambda_{(-t)}(\theta) = \mathfrak{I}_{(-t)}^{-1}(\theta) = \frac{n-1}{n}\left[\mathfrak{I}_n - n^{-1}\operatorname{grad} g(t,\theta)\operatorname{grad}^* g(t,\theta)\right]^{-1}.$$

После разложения в ряд получаем

$$\Lambda_{(-t)}^{i_1 i_2} = \frac{n-1}{n}\left[\Lambda_n^{i_1 i_2} + n^{-1}\left(\Lambda_n^{i_1 j_1} g_{j_1}(t,\theta)\, g_{j_2}(t,\theta)\Lambda_n^{j_1 i_2}\right) + \right.$$
$$\left. + n^{-2}\left(\Lambda_n^{i_1 j_1} g_{j_1}(t,\theta)\, g_{j_2}(t,\theta)\right)^2 \Lambda_n^{j_2 i_2} + \dots\right]. \tag{21}$$

При подстановке выражений (19) – (21) в одночлен (17) получается ряд по степеням $n^{-1/2}$. В общем члене этой подстановки мы получим n в степени $-\rho = -(\rho_\Pi + \rho_\Lambda + \rho_B/2 + 1/2)$, если $\rho_B \ne 0$, где ρ_Π — степень, получившаяся из произведения $\prod_{r=1}^{\nu+\mu} \Lambda_n^{i_r j_r}$, ρ_Λ — из произведения $\prod_{r=1}^{\mu} \Pi_{(m_r^1)(m_r^2)}^{(n)}(\theta)$, ρ_B — из произведения $\prod_{r=1}^{\nu+1} {}_1b_n^{(\alpha_r)}(\theta)$ и в степени $-\rho = -(\rho_\Pi + \rho_\Lambda)$, если $\rho_B \ne 0$. Собрав в $G_{\nu n}(\theta)$ все члены со степенью $n^{-\nu/2}$, получим

$$G_{\nu n}(\theta) = P_{\nu n}(\theta) + \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2}+\rho_\Pi+\rho_\Lambda = \frac{\nu}{2}+1} c(r,\rho_\Pi,\rho_\Lambda,\mu)\, \times$$
$$\times (-1)^{\rho_\Pi} \prod_{\gamma=1}^{\mu+r+\rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \prod_{\gamma=1}^{\mu-\rho_\Lambda} \Pi_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)}^{(n)}\, \Pi_{(m_1)\dots(m_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)})}^{(n)} \prod_{\gamma=1}^{r+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)} +$$
$$+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2}+\rho_\Pi+\rho_\Lambda+\frac{\rho_B}{2}-\frac{1}{2} = \frac{\nu}{2}} c(r,\rho_\Pi,\rho_\Lambda,\rho_B,\mu)\,(-1)^{\rho_\Pi+\rho_B} \prod_{\gamma=1}^{\mu+r+\rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \times$$
$$\times \prod_{\gamma=1}^{\mu-\rho_\Lambda} \Pi_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)}^{(n)} \prod_{\gamma=1}^{r-\rho_B+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)}\; {}_{\rho_B}b_n^{(\alpha_1)\dots(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})}, \tag{22}$$

где под $\sum_{\{i,j\}}$ подразумевается суммирование по всевозможным разбиениям множества $\{i_2, \dots, i_{\nu+\mu}\}\cup\{j_1, \dots, j_{\nu+\mu}\}$ на $\bigcup_r (m_r^1)\cup(m_r^2)\cup\bigcup_\gamma(\alpha_\gamma)$.

Замечание. В первую сумму входят члены с $\rho_B = 0$, а во вторую — с $\rho_B >$

> 0. Из-за нормировки, использованной для величин ${}_1b_n^{(\alpha)}(\theta)$, объединить эти выражения в одно не удается.

Поясним, как в (22) появляется член $P_{\nu n}(\theta)$ из (10), (11). При подстановке (19) – (21) в четвертый и пятый члены (14) из слагаемых с $\rho = 0$ после усреднения по t получается в точности величина $P_{\nu n}(\theta)\, n\, n^{-\nu/2}$, которая полностью сокращается со вторым и третьим членами (12). Слагаемые с $\rho = 1$ после усреднения по t дают $P_{\nu n}(\theta)\, n^{-\nu/2}$; это $P_{\nu n}(\theta)$ и остается в формуле (22).

Проведем центрирование в формуле (22). Это касается тех членов, где $\rho_{\text{В}} > 0$. В них величины ${}_{\rho_{\text{В}}}b_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_\gamma)}$, $\gamma = 2(\rho_{\Pi} + \rho_{\Lambda}) + \rho_{\text{В}}$, заменяются на

$$n^{-1/2} \sum_{t=1}^{n} \left(\varepsilon_j^{\rho_{\text{В}}} - m_{\rho_{\text{В}}}\right) g^{(\alpha_1)}(t,\theta) \ldots g^{(\alpha_\gamma)}(t,\theta) \; +$$

$$+ \; n^{-1/2}\, m_{\rho_{\text{В}}} \sum_{t=1}^{n} g^{(\alpha_1)}(t,\theta) \ldots g^{(\alpha_\gamma)}(t,\theta). \tag{23}$$

Центрированную с. в. в первой сумме (23) будем обозначать ${}_{\rho_{\text{В}}}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_\gamma)}$, а добавка центрирования во второй сумме (23) равна $n^{1/2}\, m_{\rho_{\text{В}}}\; \Pi^{(n)}_{(\alpha_1)\ldots(\alpha_{2(\rho_\Pi + \rho_\Lambda) + \rho_{\text{В}}})}$ и из-за наличия $n^{1/2}$ будет попадать в предыдущий член. В итоге выражение для ν-го полинома приобретет вид

$$G_{\nu n}(\theta) = P_{\nu n}(\theta) + \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2} + \rho_\Pi + \rho_\Lambda = \frac{\nu}{2} + 1} c\left(r, \rho_\Pi, \rho_\Lambda, \mu\right) \times$$

$$\times (-1)^{\rho_\Pi} \prod_{\gamma=1}^{\mu + r + \rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \prod_{\gamma=1}^{\mu - \rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)}\, \Pi^{(n)}_{(m_1)\ldots(m_{2(\rho_\Pi + \rho_\Lambda)})} \prod_{\gamma=1}^{r+1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)} \; +$$

$$+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu-1} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2} + \rho_\Pi + \rho_\Lambda + \frac{\rho_{\text{В}}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\nu}{2}} c\left(r, \rho_\Pi, \rho_\Lambda, \rho_{\text{В}}, \mu\right) \times$$

$$\times (-1)^{\rho_\Pi + \rho_{\text{В}}} \prod_{\gamma=1}^{\mu + r + \rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \prod_{\gamma=1}^{\mu - \rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)} \times$$

$$\times \prod_{\gamma=1}^{r - \rho_{\text{В}} + 1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)}\; {}_{\rho_{\text{В}}}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\ldots(\alpha_{2(\rho_\Pi + \rho_\Lambda) + \rho_{\text{В}}})} \; +$$

$$+ \sum_{\{i,j\}} \sum_{r=1}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{r-1} \sum_{\frac{r}{2} + \rho_\Pi + \rho_\Lambda + \frac{\rho_{\text{В}}}{2} = \frac{\nu}{2} + 1} c\left(r, \rho_\Pi, \rho_\Lambda, \rho_{\text{В}}, \mu\right) \times$$

$$\times (-1)^{\rho_\Pi + \rho_{\text{В}}}\, m_{\rho_{\text{В}}} \prod_{\gamma=1}^{\mu + r + \rho_\Lambda} \Lambda_n^{i_\gamma j_\gamma} \prod_{\gamma=1}^{\mu - \rho_\Lambda} \Pi^{(n)}_{(m_\gamma^1)(m_\gamma^2)}\, \Pi^{(n)}_{(m_1)\ldots(m_{2(\rho_\Pi + \rho_\Lambda) + \rho_{\text{В}}})} \times$$

$$\times \prod_{\gamma=1}^{r - \rho_{\text{В}} + 1} {}_1b_n^{(\alpha_\gamma)}. \tag{24}$$

Выражение (24) выявляет неожиданно сложную структуру произвольного члена а. р. функционала (3), вследствие чего оно мало пригодно для вычисления старших членов асимптотики.

Перейдем теперь к оцениванию остаточных членов в (14). При суммировании остаточных членов $R_{k-1,(-t)}(\theta)$ по t (см. (15), (16)) мы теряем в оценке один порядок по n из-за того, что они сильно коррелированы:

$$P_\theta^n\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n R_{k-1,(-t)}(\theta)\right| > \varepsilon\right\} \le$$

$$\le \sum_{t=1}^n P_\theta^n\left\{\left|\frac{1}{n}R_{k-1,(-t)}(\theta)\right| > \frac{\varepsilon}{n}\right\} = n P_\theta^n\left\{\left|R_{k-1,(-t)}(\theta)\right| > \varepsilon\right\}.$$

Кроме того, существуют такие константы $c_7 - c_9$, что равномерно по t, n и $\theta \in \Theta$

$$P_\theta^n\left\{\left|R_{k-1,(-t)}(\theta)\right| > c_7 \log^{k/2} n\right\} \le P_\theta^n\left\{\left|R_{k-1,(-t)}(\theta)\right| > c_8 \log^{k/2}(n-1)\right\} \le$$

$$\le c_9 n^{-(m-2)/2} \log^{-m/2} n.$$

В итоге получаем

$$n^{1/2}(J_n - \sigma^2) = \sum_{\nu=0}^{k-1} n^{-\nu/2} G_{\nu n}(\theta) + n^{-(k-1)/2}\hat{R}_{k-1,n}(\theta), \tag{25}$$

где

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|\hat{R}_{k-1,n}(\theta)\right| > c_{10}\log^{(k+1)/2} n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2} n\right). \tag{26}$$

Для оценивания остаточных членов потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть на статистическом эксперименте* $(R^n, \mathfrak{B}^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta)$ *задана последовательность серий* ξ_j, $j = 1, \dots, n$, $n \ge 1$, *независимых в каждой серии с. в. и имеющих конечные абсолютные моменты порядка* s *при некотором целом* $s \ge 3$: $E_\theta^n|\xi_{jn}|^s < \infty$, $\theta \in \Theta$, $j = 1, \dots, n$, $n \ge 1$. *Предположим, что величины* $\sigma_n^2(\theta) = n^{-1}\sum_{j=1}^n D_\theta^n \xi_{jn}$ *и* $\rho_{s,n} = n^{-1}\sum_{j=1}^n E_\theta^n|\xi_{jn}|^s$ *для некоторого множества* $\theta \in \Theta$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\varliminf_{n\to\infty}\inf_{\theta\in Q}\sigma_n^2(\theta) > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty}\sup_{\theta\in Q}\rho_{s,n} < \infty.$$

Тогда

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|n^{-1/2}\sum_{j=1}^n\left(\xi_{jn} - E_\theta^n\xi_{jn}\right)\right| > a_n\sigma_n(\theta)\right\} \le \kappa_n(Q)\, a_n^{-s_n-(s-2)/2},$$

где $\kappa_n(Q) \le \kappa(Q) < \infty$ — *ограниченная последовательность,* a_n — *любая последовательность чисел, удовлетворяющая при любом заданном* $\delta > 0$ *условию* $a_n \ge (s-2+\delta)^{1/2}\log^{1/2} n$.

Утверждение является одномерным равномерным по $\theta \in \Theta$ вариантом следствия 17.13 [10, с. 185, 186].

Покажем теперь, что величины $n^{-\nu/2}G_{\nu n}(\theta)$, $\nu = k-1, k$, имеют такой же порядок, что и $n^{-(k-1)/2}\hat{R}_{k-1,n}(\theta)$. Начнем с оценивания $P_{\nu n}$, $\nu = k-1, k$. В [5, 8] показано, что это однородные полиномы степени $\nu + 1$ относительно величин ${}_1b_n^{(\alpha)}(\theta)$ с равномерно ограниченными по n и $\theta \in \Theta$ коэффициентами. При выполнении условий $\mathrm{I}(k+1)$, $\mathrm{II}(k+1)$, $\mathrm{III}(m)$ согласно лемме 4 величины ${}_1b_n^{(\alpha)}(\theta)$, $|\alpha| = 1, \dots, k+1$, имеют свойство

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|{}_1b_n^{(\alpha)}(\theta)\right| > c_{11}\log^{1/2}n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2}n\right).$$

Следовательно, для $\nu = k-1, k$,

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|P_{\nu n}(\theta)\right| > c_{12}\log^{k+1/2}n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2}n\right).$$

Рассмотрим теперь первую добавившуюся в (24) сумму. В одночленах этой суммы будут встречаться произведения из $r+1\le\nu$ сомножителей ${}_1b_n^{(\alpha)}(\theta)$, и выше уже было показано, что они дают нужные нам оценки. Для получения равномерной ограниченности нового сомножителя $\Pi^{(n)}_{(m_1)\dots(m_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)})}$ воспользуемся условием $\mathrm{III}(k,1)$. Аналогичные оценки будут получаться в (24) и для третьей суммы. Во второй сумме (24) возникает необходимость дополнительного изучения сомножителей ${}_{\rho_B}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\dots(\alpha_{2(\rho_\Pi+\rho_\Lambda)+\rho_B})}$, где параметр ρ_β изменяется от 2 до k.

Введем с. в. $\zeta_t = \left(\varepsilon_t^{\rho_B} - m_{\rho_B}\right)g^{(\alpha_1)}(t,\theta)\dots g^{(\alpha_\gamma)}(t,\theta)$. При выполнении V и $\mathrm{III}(k,m)$ она удовлетворяет условиям леммы 4, так что

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|{}_{\rho_B}\mathfrak{B}_n^{(\alpha_1)\dots(\alpha_\gamma)}(\theta)\right| > c_{13}\log^{1/2}n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2}n\right)$$

при всех ρ_B и α_γ, встречающихся в $G_{k-1,n}$ и G_{kn}. В итоге при $\nu = k-1, k$ получаем

$$\sup_{\theta\in Q} P_\theta^n\left\{\left|G_{\nu n}(\theta)\right| > c_{14}\log^{k+1/2}n\right\} = O\left(n^{-(m-2)/2}\log^{-m/2}n\right),$$

что позволяет вынести $n^{-\nu/2}G_{\nu n}$, $\nu = k-1, k$, в остаточный член (25):

$$n^{1/2}(J_n - \sigma^2) = \sum_{\nu=0}^{k-2} n^{-\nu/2}G_{\nu n}(\theta) + n^{-(k-1)/2}\hat{R}_{k-1,n}(\theta),$$

где $\hat{R}_{k-1,n}(\theta)$, по-прежнему, удовлетворяет (26), а это и означает справедливость (4), (5).

1. *Frangos C. C.* An updated bibliography on the jackknife method // Communs Statist. Theory meth. – 1987. – **16**. – P. 1543 – 1584.
2. *Wu C. F. J.* Jackknifing, bootstrap and other resampling methods in regression analysis (with discussion) // Ann. Statist. – 1986. – **14**, № 4. – P. 1261 – 1295.
3. *Shao J.* Consistensy of least-squares estimator and its jackknife variance estimator in nonlinear models // Can. J. Statist. – 1992. – **20**, № 4. – P. 415 – 428.
4. *Zwanzig S.* A third order asymptotic comparison of least squares jackknifing and cross-validation for error variance estimation in nonlinear regression // Math. Operationsforsch. und Statist. – 1985. – **16**, № 1. – P. 47 – 54.
5. *Иванов А. В.* Теория оценивания параметров нелинейных моделей регрессии: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1991. – 351 с.
6. *Иванов А. В.* Асимптотическое разложение для распределения оценки наименьших квадратов параметра нелинейной функции регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1976. – **21**, № 3. – С. 571 – 583.
7. *Иванов А. В.* Две теоремы о состоятельности оценки наименьших квадратов // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1983. – № 28. – С. 25 – 34.
8. *Бардадым Т. А., Иванов А. В.* Асимптотические разложения, связанные с оценкой дисперсии ошибки наблюдения для модели „сигнал плюс шум" // Там же. – 1985. – № 33. – С. 11 – 20.
9. *Григорьев Ю. Д.* Статистические выводы в нелинейном регрессионном анализе. – Новосибирск, 1992. – 80 с.
10. *Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р.* Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. – М.: Наука, 1982. – 288 с.

Получено 23.07.93