УДК 517.96

**В. Л. Островский,** канд. физ.-мат. наук,
**Л. Б. Туровская,** асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $*$-АЛГЕБР И МНОГОМЕРНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ*

The procedure developed earlier for investigation of representations of $*$-algebras is generalized to a wider class of operator relations. In particular, the developed technique is used to give a description of all irreducible representations of the nonstandard three-dimensional real quantum sphere.

Наведено узагальнення одержаного раніше методу динамічних систем дослідження зображень $*$-алгебр на більш загальний клас операторних співвідношень. Зокрема, розроблена техніка застосована до опису незвідних зображень нестандартної тривимірної квантової сфери.

Представления инволютивных алгебр ($*$-алгебр) в последнее время вызывают все больший интерес, в частности, в связи с приложениями в физических моделях нетрадиционных алгебраических объектов — квантовых групп, квантовых однородных пространств, алгебр Хопфа и др. При этом задача изучения $*$-представлений алгебраического объекта может быть сведена к изучению представлений образующих, удовлетворяющих тем или иным алгебраическим соотношениям. Таким образом возникает задача описания с точностью до унитарной эквивалентности наборов операторов в гильбертовом пространстве $H$, удовлетворяющих алгебраическим соотношениям.

Настоящая работа посвящена изучению одного семейства операторных соотношений, естественно возникающих при изучении представлений различных примеров $*$-алгебр.

В работах [1 – 3] изучались пары (вообще говоря, неограниченных) операторов $A = A^*$ и $B$, удовлетворяющих соотношению вида

$$AB = BF(A), \tag{1}$$

где $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — измеримая функция самосопряженного оператора $A$, и коммутирующие наборы самосопряженных операторов $\mathbf{A} = (A_x)$, связанные с (замкнутым) оператором $B$ соотношениями вида

$$A_x B = B F_x(\mathbf{A}). \tag{2}$$

Здесь $F_x(\mathbf{A})$ — измеримые относительно цилиндрической $\sigma$-алгебры функции от коммутирующего набора $\mathbf{A}$.

Если не предполагать ограниченности операторов в (1) и (2), то необходимо уточнить операторный смысл соотношений, так как в случае неограниченных операторов соотношения не могут быть выполнены на всех векторах $f \in H$. Для неограниченных операторов (см. [1, 2]) в качестве определения соотношений (1) принимается выполнение соотношений

$$E_A(\Delta)UP = UE_A(F^{-1}(\Delta))P, \quad [A, C] = 0, \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Здесь $E_A(\cdot)$ — разложение единицы самосопряженного оператора $A$, $B = UC$ — полярное разложение (замкнутого) оператора $B$, $P$ — проектор на ортогональное дополнение к $\ker B$.

Если оператор $B$ удовлетворяет некоторым естественным дополнительным условиям (например, является самосопряженным [4], унитарным [3], нормальным [2] или удовлетворяет несколько более общему условию, см. [5]), то мож-

* Выполнена при частичной поддержке Фонда фундаментальных научных исследований при Государственном комитете Украины по вопросам науки и технологий, а также Международного научного фонда (грант № U6D000).

но описать неприводимые пары операторов $A$, $B$, удовлетворяющих соотношению (1) (наборы $\boldsymbol{A}$, $B$, удовлетворяющие (4)). Структура таких наборов операторов зависит от строения инвариантных множеств динамической системы $\lambda \to F(\lambda)$, в простейшем случае — множества орбит [3].

В [4] изучены наборы коммутирующих самосопряженных операторов $\boldsymbol{B} = (B_l)_{l=1}^m$, связанных с набором коммутирующих самосопряженных операторов $\boldsymbol{A}$ соотношениями вида (2). Как отмечено в [3], схема изучения таких наборов с помощью многомерных динамических систем распространяется также и на наборы коммутирующих унитарных операторов $\boldsymbol{B}$. Различные важные примеры наборов ограниченных и неограниченных операторов, связанных соотношениями (1), (2), изучались разными авторами (см. [6] и приведенную там библиографию).

В пп. 1, 2 настоящей работы изучаются наборы коммутирующих изометрий, связанных с самосопряженными операторами коммутирующего семейства $\boldsymbol{A}$ соотношениями вида (2). Эта ситуация является достаточно общей, поскольку к изучению наборов коммутирующих изометрий сводятся, в частности, рассмотренные в [1 – 5] случаи, а также различные другие примеры соотношений.

В работе приведены условия, обеспечивающие простоту спектра коммутирующего набора $\boldsymbol{A}$ в неприводимом представлении, и приведены формулы, задающие неприводимые представления соотношений (теоремы 1, 2).

Вжный класс алгебраических соотношений, приводящих к соотношениям (1), — соотношения вида

$$X^* X = F(X^* X), \tag{3}$$

связывающие (вообще говоря, неограниченный замкнутый) оператор $X$ с его сопряженным $X^*$ (как и прежде, в случае неограниченных операторов последнее выражение нуждается в аккуратной интерпретации). Для полярного разложения $X = CU$ имеем $U^* C^2 U = F(C^2)$ или $C^2 U = U F(C^2)$.

В п. 3 настоящей работы выделен класс инволютивных алгебр, порожденных конечным набором образующих $(X_j)_{j=1}^n$, которые связаны соотношениями, обобщающими (3). Изучение представлений таких $*$-алгебр может быть проведено с помощью развитой в работе техники (теорема 3). Выделенный класс соотношений содержит важные в приложениях примеры инволютивных алгебр, в частности многомерный $q$-осциллятор [7].

В п. 4 приведены формулы для неприводимых $*$-представлений ограниченными и неограниченными операторами еще одного важного примера таких соотношений — нестандартной вещественной трехмерной квантовой сферы [8].

**1.** В данной работе рассматриваются семейства операторов $\boldsymbol{A} = (A_k)_{k=1}^n$ ($A_k^* = A_k$, $[A_k, A_j] = 0$, $1 \le k, j \le n$) и $\boldsymbol{U} = (U_k)_{k=1}^m$, ($U_l$ — (частичные) изометрии), которые связаны соотношениями вида

$$\begin{gathered} A_k U_l = U_l F_{kl}(\boldsymbol{A}), \quad k = 1, \dots, n; \ l = 1, \dots, m, \\ [U_l, U_r] = [U_l, U_r^*] = 0, \quad l, r = 1, \dots, m, \\ \left[ \left(U_l^*\right)^i U_l^i, \left(U_l^*\right)^j U_l^j \right] = \left[ \left(U_l^*\right)^i U_l^i, U_l^j \left(U_l^*\right)^j \right] = 0, \\ l = 1, \dots, m; \quad i, j = 1, 2, \dots, \end{gathered} \tag{4}$$

где $F_{kl}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — измеримые функции, а $F_{kl}(\boldsymbol{A})$ — функция от коммутирующих операторов $A_1, \ldots, A_n$. Следуя [2], будем говорить, что неограниченные операторы $(A_k)$ связаны с операторами $U_l$ соотношениями (4), если

$$E_A(\Delta) U_l = U_l E_A\left(F_l^{-1}(\Delta)\right) \quad \forall\, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

где $E_A(\cdot)$ — совместное разложение единицы коммутирующего набора самосопряженных операторов $A = (A_k)$, и

$$F_l(\cdot) = (F_{1l}(\cdot), \ldots, F_{nl}(\cdot)), \quad 1 \le l \le m,$$

— измеримые отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, взаимно однозначные на совместном спектре семейства $A$.

В дальнейшем существенную роль играет динамическая система, порожденная набором отображений $F_l\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $1 \le l \le m$.

**Лемма 1.** *Если* $\ker U_j = \ker U_l = \{0\}$, *то для почти всех относительно спектральной меры семейства* $A$ *точек* $\lambda \in \mathbb{R}^n$

$$F_i(F_j(\lambda)) = F_j(F_i(\lambda)).$$

***Доказательство.*** Действительно, поскольку для всех $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$U_i U_j E_A(F_j(F_i(\Delta))) = E_A(\Delta) U_i U_j = E_A(\Delta) U_j U_i = U_j U_i E_A(F_i(F_j(\Delta))),$$

то в силу коммутации $U_i$ и $U_j$ и их невырожденности $E_A(F_j(F_i(\Delta))) = 0$ тогда и только тогда, когда $E_A(F_i(F_j(\Delta))) = 0$, откуда следует утверждение леммы.

Таким образом, набор отображений $F_l(\cdot)$, $1 \le l \le m$, определяет действие группы $\mathbb{Z}^m$ на $\mathbb{R}^n$. В дальнейшем мы предполагаем, что ни одно из отображений $F_l(\cdot)$ не имеет циклов.

**Теорема 1.** *Пусть динамическая система на* $\mathbb{R}^n$, *порожденная набором отображений* $F_l$, $1 \le l \le m$, *имеет измеримое сечение („простая"). Тогда для каждого неприводимого набора операторов*

1) *существует (единственная) орбита динамической системы* $\Omega$ *полной спектральной меры:* $E_A(\Omega) = I$;

2) если $\ker U_l = \{0\}$, *то спектральная мера семейства* $A$ *квазиинвариантна относительно преобразований* $F_l(\cdot)$, $1 \le l \le m$; *в случае унитарного оператора* $U_l$ *имеет место также квазиинвариантность относительно* $F_l^{-1}(\cdot)$;

3) *совместный спектр семейства* $A$ *прост.*

***Доказательство.*** Действительно, для любого измеримого множества $\Delta$, инвариантного относительно $F_j(\cdot)$, $j \le 1, \ldots, m$, проектор $E_A(\Delta)$ коммутирует со всеми операторами $U_j$ и поэтому является проектором на инвариантное подпространство. Поэтому спектральная мера семейства $A$ эргодична относительно действия динамической системы, и 1) есть следствием существования измеримого сечения для динамической системы, порожденной отображениями $F_l(\cdot)$.

Квазиинвариантность спектральной меры следует из соотношения

$$U_l^* E_A(F_l(\Delta)) U_l = E_A(\Delta).$$

В случае унитарного оператора $U_l$ имеем также

$$U_l^* E_A(\Delta) U_l = E_A(F_l^{-1}(\Delta)).$$

Перейдем к доказательству простоты совместного спектра семейства $\boldsymbol{A}$. Пусть $\mathcal{U}$ — $W^*$-алгебра, порожденная операторами $E_A(\Delta)$, $U_l$, $U_l^*$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $l = 1, \ldots, m$. Обозначим через $\mathcal{U}_0$ $W^*$-алгебру в $\mathcal{U}$, порожденную операторами $E_A(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, и всеми полиномами от $U_l$, $U_l^*$, $l = 1, \ldots, m$, коммутирующими с семейством $\boldsymbol{A}$.

Выберем орбиту $\Omega$, для которой $E_A(\Omega) = I$. Тогда пространство $H$ раскладывается в прямую сумму

$$H = \bigoplus_{\lambda \in \Omega_0 \subset \Omega} H_\lambda$$

собственных подпространств коммутирующего семейства $\boldsymbol{A} = (A_k)_{k=1}^n$. Любой ограниченный оператор $B$, для которого $B H_\lambda \subset H_\lambda$ при всех $\lambda \in \Omega_0$, коммутирует с операторами набора $\boldsymbol{A}$ и обратно, любой оператор, коммутирующий с набором $\boldsymbol{A}$, переводит в себя его собственные подпространства. Поэтому для $W^*$-алгебры $\mathcal{U}_0$ также справедливо разложение в прямую сумму

$$\mathcal{U}_0 = \bigoplus_{\lambda \in \Omega_0} \mathcal{U}_{0,\lambda},$$

где $\mathcal{U}_{0,\lambda}$ — $W^*$-алгебра операторов в $H_\lambda$.

**Лемма 2.** *Если набор* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{U})$ *неприводим, то* $\mathcal{U}_{0,\lambda} = L(H_\lambda)$.

***Доказательство.*** Пусть $\mathcal{U}_{0,\lambda} = \mathcal{U}_{0,\lambda}^{(1)} \oplus \mathcal{U}_{0,\lambda}^{(2)}$ — разложение в прямую сумму $W^*$-подалгебр. Тогда $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{(1)} \oplus \mathcal{U}^{(2)}$, где $\mathcal{U}^{(1)} = \mathcal{U}\, \mathcal{U}_{0,\lambda}^{(1)}$. Действительно, $W^*$-алгебра

$$\mathcal{D} = E_A X_1 \ldots X_p \mathcal{U}_{0,\lambda}^{(1)}$$

($X_l$ — любой из операторов $U_j$, $U_j^*$, $l = 1, \ldots, p$; $j = 1, \ldots, m$) либо ортогональна к $\mathcal{U}_{0,\lambda}$, либо содержится в $\mathcal{U}_{0,\lambda}$. В последнем случае оператор $X_1 \ldots X_p$ коммутирует с оператором семейства $\boldsymbol{A}$, и потому лежит в $\mathcal{U}_{0,\lambda}$. Тогда $\mathcal{D} \subset \mathcal{U}_{0,\lambda}^{(1)}$.

Для окончания доказательства теоремы остается заметить, что в силу соотношений (4) $W^*$-алгебра $\mathcal{U}_{0,\lambda}$ коммутативна и пространство $H_\lambda$ одномерно.

***Замечание* 1.** Если операторы $U_l$, $1 \le l \le m$, унитарны, предыдущая теорема верна и в случае динамических систем, у которых есть циклические орбиты. В случае изометрических операторов наличие циклов у отображений, порождающих динамическую систему, может привести к тому, что совместный спектр семейства $\boldsymbol{A}$ не будет простым. Для иллюстрации достаточно рассмотреть неприводимую пару операторов в $l_2$: $A = \lambda I$, $U e_k = e_{k+1}$, удовлетворяющих соотношению $AU = UA$. Здесь спектр оператора $A$ имеет бесконечную кратность.

Задача описания неприводимых наборов, удовлетворяющих (4), в случае динамических систем с циклами (при наличии измеримого сечения) ручная, но формулировки соответствующих теорем более громоздки и будут изложены в отдельной работе.

**2.** Доказанная теорема позволяет получить более детальную информацию о неприводимых наборах операторов $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{U})$, удовлетворяющих соотношениям (4).

**Теорема 2.** *Неприводимый набор операторов* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{U})$ *реализуется в пространстве* $l_2(\Omega_0)$, $\Omega \supset \Omega_0 \ni \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — *некоторое подмножество орбиты* $\Omega$ (*в случае унитарных операторов* $(U_k)_{k=1}^m$ $\Omega_0 = \Omega$) *по формулам*

$$A_k e_{\boldsymbol{x}} = x_k e_{\boldsymbol{x}},$$
$$U_l e_{\boldsymbol{x}} = u_l(\boldsymbol{x}) e_{F_l(x)}, \tag{5}$$

*где* $u_l(\boldsymbol{x})$ — *набор констант, определяющих действие оператора* $u_l(x)$. *Если для некоторого* $\Delta \subset \Omega$ *и всех* $l = 1, \dots, m$

$$u_l(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Delta\colon \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{x}) \notin \Delta,$$
$$u_l\left(\boldsymbol{F}_l^{-1}(\boldsymbol{x})\right) = 0 \quad \forall\, \boldsymbol{x} \in \Delta\colon \boldsymbol{F}_l^{-1}(x) \notin \Delta,$$

*то* $l_2(\Delta)$ — *инвариантное подпространство в* $l_2(\Omega)$. *Если дополнительно* $u_l(\boldsymbol{x}) \neq 0$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in \Delta\colon \boldsymbol{F}_l(\boldsymbol{x}) \in \Delta$, *то в* $l_2(\Delta)$ *набор операторов* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{U})$ *неприводим.*

***Доказательство.*** Действительно, первая часть утверждения теоремы следует из теоремы о коммутативных моделях [2] и теоремы 1. Далее, для любого $\Delta \subset \Omega$ подпространство $l_2(\Delta)$ инвариантно относительно действия операторов $A_k$, $k = 1, \dots, n$. Для операторов $U_l$ условия теоремы означают, что для базисных векторов $e_x \in l_2(\Delta)$ $U_l e_{\boldsymbol{x}} = 0$ при $\boldsymbol{F}_l(x) \notin \Delta$ и $U_l^* e_{\boldsymbol{x}} = 0$ при $\boldsymbol{F}_l^{-1}(x) \notin \Delta$. Это обеспечивает инвариантность $l_2(\Delta)$ относительно операторов $U_l$, $U_l^*$, $l = 1, \dots, m$.

Для доказательства неприводимости заметим, что из коммутации ограниченного самосопряженного оператора $S$ с операторами $A_k$, $k = 1, \dots, n$, следует, что $S e_{\boldsymbol{x}} = s(\boldsymbol{x}) e_x$, а коммутация с операторами $U_l$, $l = 1, \dots, m$, влечет $s(\boldsymbol{x}) = s$ для всех $\boldsymbol{x} \in \Delta$.

***Следствие* 1.** *В случае набора унитарных операторов* $\boldsymbol{U} = (U_l)_{l=1}^m$ $\Delta = \Omega$ *и пространство* $H = l_2(\Omega)$. *Действительно, в этом случае* $|u_l(\boldsymbol{x})| = 1$ $\forall\, \boldsymbol{x} \in \Delta$, $l = 1, \dots, m$, *и поэтому* $F_l(\boldsymbol{x}) \in \Delta$, $\boldsymbol{F}_l^{-1}(x) \in \Delta$.

**3.** Рассмотрим семейство инволютивных алгебр, для которых определяющие соотношения между образующими $(b_j)_{j=1}^n$ имеют вид

$$\begin{gathered} b_j b_k = \lambda_{jk} b_k b_j, \\ b_j^* b_k = \mu_{jk} b_k b_j^*, \\ b_j^* b_j = F_j(b_1 b_1^*, \dots, b_n b_n^*), \\ \lambda_{jk},\ \mu_{jk} > 0,\ 1 \le j, k \le n. \end{gathered} \tag{6}$$

Отметим, что в силу первых двух соотношений из (6) элементы $b_j^* b_j$, $j = 1, \dots, n$, образуют коммутирующее семейство. Действительно, для любых $1 \le j, k \le n$

$$b_j^* b_j b_k^* b_k = \mu_{kj}^{-1} b_j^* b_k^* b_j b_k = \lambda_{jk} \mu_{kj}^{-1} b_j^* b_k^* b_k b_j = \mu_{kj}^{-1} b_k^* b_j^* b_k b_j =$$

$$= b_k^* b_k b_j^* b_j.$$

Это позволяет избежать разночтений при определении функций $F_j(\cdot)$ от набора (априори некоммутирующих) переменных.

Перейдем к рассмотрению (вообще говоря, неограниченных замкнутых) операторов $B_j$, $j=1,\ldots,n$, которые связаны соотношениями (6). Пусть $B_j = C_j U_j$, $j=1,\ldots,n$, ($C_j^* = C_j$) — полярные разложения замкнутых операторов $B_j$.

**Лемма 3.** *Пусть операторы $B_j$, $j=1,\ldots,n$, ограничены. Тогда для операторов $B_j = C_j U_j$ соотношения* (6) *эквивалентны соотношениям*

$$\begin{gathered} C_j^2 U_k = q_{jk} U_k C_j^2, \quad j \neq k, \\ C_j^2 U_j = U_j F_j\left(C_1^2,\ldots,C_n^2\right), \quad j=1,\ldots,n, \\ U_j U_k = U_k U_j, \quad U_j U_k^* = U_k^* U_j, \quad j<k, \end{gathered} \tag{7}$$

*где*

$$q_{jk} = \begin{cases} \mu_{jk}\lambda_{jk}, & j<k; \\ \mu_{jk}\lambda_{jk}^{-1}, & j>k. \end{cases}$$

*Более того,* $\left[(U_l^*)^i U_l^i, (U_l^*)^j U_l^j\right] = 0$ *и* $\left[(U_l^*)^i U_l^i, U_l^j (U_l^*)^j\right] = 0$ *для всех* $i,j \geq 0$, $1 \leq l \leq n$.

***Доказательство*** проводится непосредственной подстановкой полярных разложений в соотношения (6) с учетом того, что $U_l U_l^* = \operatorname{sign} C_l$.

Соотношения (7) (включая коммутацию операторов $C_k$), являющиеся частным случаем соотношений (4), примем в виде исходных при рассмотрении неограниченных операторов.

Динамическая система на пространстве $\mathbb{R}^n$ порождается отображениями

$$\boldsymbol{F}_l\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \left(q_{1l}x_1,\ldots,q_{l-1l}x_{l-1}, F_l\left(x_1,\ldots,x_n\right), q_{l+1l}x_{l+1},\ldots,q_{nl}x_n\right). \tag{8}$$

Согласно лемме 1 будем рассматривать такие соотношения, для которых $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{F}_k(\cdot)) = \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{F}_j(\cdot))$, $j \neq k$, что для отображений $F_j(\cdot)$ эквивалентно равенствам

$$F_j(\boldsymbol{F}_k(x_1,\ldots,x_n)) = q_{jk}F_j(x_1,\ldots,x_n).$$

В случае, когда $F_j(\cdot)$ — полиномы первой степени (ситуация, приводящая к квадратичным соотношениям между образующими),

$$F_j(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{l=1}^{n} \varphi_{jl}x_l + \alpha_j I, \quad j=1,\ldots,n,$$

эти равенства сводятся к соотношениям

$$\begin{gathered} \varphi_{jl}(q_{lk}-q_{jk}) + \varphi_{jk}\varphi_{kl} = 0, \quad l \neq j, \quad l \neq k, \\ \varphi_{jk}\varphi_{kj} = 0, \\ \varphi_{jk}(\varphi_{kk}-q_{jk}) = 0, \\ \alpha_j(1-q_{jk}) + \alpha_k\varphi_{jk} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

для всех $j,k=1,\ldots,n$, $j \neq k$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие отображения $F_l(\cdot)$, $l = 1, \dots, n$, для которых соответствующая динамическая система имеет измеримое сечение. Согласно теореме 1 в этом случае спектральная мера набора коммутирующих самосопряженных операторов $C_k$, $k = 1, \dots, n$, в случае неприводимого набора $(B_j)_{j=1}^n$ сосредоточена на некоторой орбите $\Omega$ динамической системы, порожденной отображениями $F_k(\cdot): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, n$. Изучим более подробно неприводимые наборы $(B_k)_{k=1}^n$, удовлетворяющие соотношениям (6), которые соответствуют выбранной орбите $\Omega$. Обозначим через $\Delta \subset \Omega$ носитель спектральной меры семейства $(C_j^2)_{j=1}^n$.

Специфика соотношений (7) состоит в том, что: 1) операторы $C_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$; 2) $U_j U_j^*$ является проектором на коядро $(\ker C_j^2)^{\perp}$.

**Лемма 4.** *Для любого* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta$

1) $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$;

2) *либо* $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \in \Delta$, *либо* $(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))_j = 0$;

3) *аналогично, либо* $\boldsymbol{F}_j^{-1}(\boldsymbol{x}) \in \Delta$, *либо* $\boldsymbol{x}_j = 0$.

***Доказательство.*** 1). Действительно, поскольку $C_j^2 \geq 0$, то в силу (5) $x_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

2). Если $\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}) \notin \Delta$, то в силу теоремы 2 $U_j e_{\boldsymbol{x}} = 0$. Тогда также $U_j U_j^* e_{\boldsymbol{F}_j(x)} = 0$ и

$$C_j^2 e_{\boldsymbol{F}_j(x)} = (\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))_j e_{\boldsymbol{F}_j(x)} = 0,$$

откуда $(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))_j = 0$.

3). Аналогично, если $\boldsymbol{F}_j^{-1}(\boldsymbol{x}) \notin \Delta$, то $U_j^* e_{\boldsymbol{x}} = 0$. Тогда $U_j U_j^* e_{\boldsymbol{x}} = 0$ и $C_j^2 e_{\boldsymbol{x}} = x_j e_{\boldsymbol{x}} = 0$, откуда $x_j = 0$.

***Следствие 2.*** *Если для некоторого* $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ $x_j > 0$, *а* $(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))_j < 0$, *то* $\boldsymbol{x} \notin \Delta$.

Это условие приводит к тому, что неприводимые представления соответствуют только таким орбитам, для которых из $x_j > 0$ следует $(\boldsymbol{F}_j(\boldsymbol{x}))_j \geq 0$, $\left(\boldsymbol{F}_j^{-1}(\boldsymbol{x})\right)_j \geq 0$. Отметим еще, что из формулы (8) для $\boldsymbol{F}_j(\cdot)$ следует, что автоматически $x_j > 0$ влечет $(\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x}))_j > 0$ для $k \neq j$.

Рассмотрим возможные типы орбит и опишем соответствующие им неприводимые представления соотношений (6).

**Теорема 3.** *Любое неприводимое представление реализуется в пространстве* $l_2(\Delta)$. *Для каждого* $l = 1, \dots, n$ *реализуется одна из альтернатив*:

*а) у отображения* $\boldsymbol{F}_l(\cdot)$ *существует неподвижная точка* $\boldsymbol{x} \in \Delta$ *(в этом случае все остальные точки также являются неподвижными). При* $x_l = 0$ $B_l = 0$; *в противном случае оператор* $B_l$ *имеет вид*

$$B_l e_{\boldsymbol{x}} = \beta_l x_l e_{\boldsymbol{x}},$$

*где* $\beta_l$ *— параметр, равный по модулю единице;*

*б) у отображения* $\boldsymbol{F}_l(\cdot)$ *отсутствуют неподвижные точки. В этом случае оператор* $B_l$ *имеет вид*

$$B_l e_x = F_l(x)\, e_{F_l(x)}. \tag{10}$$

*При этом ядро оператора* $B_l$ *порождается векторами* $e_x$ *такими, что* $F_l(x)=0$; *ядро* $B_l^*$ *порождается векторами* $e_x$, *для которых* $x_l=0$.

***Доказательство.*** Действительно, пусть $x$ — неподвижная точка отображения $F_l(\cdot)$. Если $x_l=0$, то для всех точек $y\in\Delta$ в силу коммутации $F_l(\cdot)$ и $F_k(\cdot)$ также $y_l=0$. Тогда $B=0$. Если $x_l\neq 0$, то также $y_l\neq 0$ для всех $y\in\in\Delta$. В этом случае оператор $U_l$ коммутирует со всеми остальными операторами, и, следовательно, кратен единичному.

В случае отсутствия у отображения $F_l(\cdot)$ неподвижных точек оператор $U_l$ унитарно эквивалентен оператору сдвига, $U_l e_x = e_{F_l(x)}$, откуда с учетом того, что $B_l B_l^* = C_l^2$, получаем формулу для $B_l$.

***Замечание* 2.** В случае б) возможны различные ситуации. Действительно, в зависимости от того, обращается ли в ноль $l$-я координата точки $x\in\Delta$, зависит, будет ли оператор $B_l$ или $B_l^*$ иметь ненулевое ядро.

**4.** Алгеброй функций на нестандартной трехмерной вещественной квантовой сфере (см. [8]) называется ассоциативная $*$-алгебра над полем комплексных чисел, порожденная образующими $x$, $y$, $u$, $v$, $c$ и $d$ и определяющими соотношениями

$$\begin{gathered} ux = qxu, \quad vx = qxv, \quad yu = quy, \quad yv = qvy, \\ vu - uv = (q-q^{-1})d, \quad xy - q^{-1}uv = yx - qvu = c + d, \\ dx = q^2xd, \quad dv = q^2vd, \quad ud = q^2du, \quad yd = q^2dy, \end{gathered} \tag{11}$$

элемент $c$ центральный, а инволюция имеет вид $x^* = y$, $u^* = -q^{-1}v$, $c^* = c$, $d^* = d$. Для образующих $x$, $y$, $c$, $d$ соотношения (11) эквивалентны соотношениям

$$\begin{gathered} ux = qxu, \quad u^*x = qxu^*, \\ u^*u = q^{-2}uu^* - (1-q^{-2})(xx^* - c), \quad x^*x = q^2xx^* + (1-q^2)c, \\ d = xx^* + uu^* - c. \end{gathered}$$

Для полярных разложений операторов неприводимого представления $X = C_xU_x$ и $U = C_uU_u$ имеем соотношения

$$\begin{gathered} C_x^2U_u = U_uC_x^2, \quad C_u^2U_x = q^2U_xC_u^2, \\ C_x^2U_x = U_x(q^2C_x^2 + (1-q^2)cI), \\ C_u^2U_u = U_u(q^{-2}C_u^2 - (1-q^{-2})(C_x^2 - cI)). \end{gathered}$$

Соответствующая динамическая система на $\mathbb{R}^2$ порождается отображениями

$$\begin{gathered} F_1(x_1,x_2) = (q^2x_1 + (1-q^2)c, q^2x_2), \\ F_2(x_1,x_2) = (x_1, q^{-2}x_2 - (1-q^{-2})(x_1 - c)), \end{gathered}$$

которые, как нетрудно проверить, удовлетворяют условиям (9).

Любая орбита динамической системы, порожденной этими отображениями, состоит из точек вида

$$x^{(kl)} = F_1^k\left(F_2^l(x)\right) =$$

$$= (q^{2k}x_1 + (1-q^{2k})\,c,\, q^{2(k-l)}x_2 - q^{2k}(1-q^{-2l})(c-x_1)),$$

где $x = (x_1, x_2)$, $F_l^k(\cdot)$ — $k$-я итерация отображения $F_l(\cdot)$.

У отображения $F_1(\cdot)$ есть единственная неподвижная точка $(c, 0)$, неподвижные точки отображения $F_2(\cdot)$ имеют координаты $(x, c-x)$. Циклических точек у отображений $F_1(\cdot)$, $F_2(\cdot)$ не существует.

Ниже приведен перечень орбит, соответствующих множеств $\Delta$ и отвечающих им неприводимых представлений.

1. Единственная неподвижная точка $(c, 0)$. При $c = 0$ ей соответствует тривиальное представление $X = U = 0$, а при $c > 0$ — семейство одномерных неприводимых представлений $U = 0$, $X = \alpha c$, где $|\alpha| = 1$. Таким образом, множество одномерных неприводимых представлений параметризуется точками конуса.

2. Среди орбит, инвариантных относительно отображения $F_2(\cdot)$, условиям леммы 2 удовлетворяет при $c > 0$ единственная орбита, проходящая через точку $x = (0, c)$. Множество $\Delta$ состоит из точек $x^{(k)} = ((1-q^{2k})\,c,\, q^{2k}c)$, а семейство неприводимых представлений, соответствующих такой орбите, реализуется в $l_2$ по формулам

$$X e_k = \sqrt{\left(1-q^{2k}\right)c}\; e_{k+1},$$

$$U e_k = \alpha q^{k-1}\sqrt{c}\, e_k, \quad |x| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Представления этой серии определяются параметрами $c > 0$, $\alpha \in S^1$.

3. При $c > 0$ орбиты, проходящие через точки $(c, y)$, $y > 0$, полностью лежат в первом квадранте. Они состоят из точек $(c, q^{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, и их множество естественно параметризуется точками вещественной окружности $S^1$. Соответствующие неприводимые представления реализуются в $l_2(\mathbb{Z})$ по формулам

$$X e_k = \sqrt{c}\, e_{k+1},$$

$$U e_k = \lambda q^k e_{k-1}.$$

Параметры $\lambda \in (q^2, 1]$ и $c \geq 0$ задают множество представлений этой серии.

4. При $c > 0$ существуют представления, соответствующие орбитам, проходящим через точки $(0, y)$, $y > c$. Такие орбиты также параметризуются непрерывным параметром $\lambda \in (c + q^2, c + 1] \approx S^1$. Множество $\Delta$ при этом состоит из точек

$$x^{(k,l)} = ((1-q^{2k})\,c,\, q^{2(k-l)}\lambda + q^{2k}(1-q^{-2l})c), \quad k \geq 0, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Соответствующее неприводимое представление реализуется в пространстве $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$ по формулам

$$X e_{kl} = \sqrt{\left(1-q^{2k}\right)c}\; e_{k+1,l},$$

$$U e_{kl} = \sqrt{q^{2(k-l-1)}\lambda + q^{2k-2}\left(1-q^{-2l}\right)c}\; e_{k,l+1}, \quad k = 1, 2, \ldots; \quad l \in \mathbb{Z}.$$

При каждом $c \geq 0$ и $\lambda \in (c + q^2, c + 1]$ существует единственное представление такого вида.

5. Еще одна серия представлений, зависящих от непрерывного параметра, соответствует (при $c \geq 0$) орбитам, проходящим через точки $(x, 0)$, $x > c$. В

качестве множества, параметризующего такие орбиты, можно выбрать отрезок $(c+q^2, c+1] \ni \lambda$. Множество $\Delta$ для такой орбиты имеет вид $\Delta = \{x^{(kl)} = (c - q^{2k}(c-\lambda), q^{2k}(1-q^{-2l})(c-\lambda)),\ l \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}\}$, а соответствующее параметрам $c$, $\lambda$ неприводимое представление действует в $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$:

$$X e_{kl} = \sqrt{c - q^{2k+2}(c-\lambda)}\, e_{k+1,l},$$

$$U e_{kl} = q^k \sqrt{\left(1-q^{-2l}\right)(c-\lambda)}\, e_{k,l+1},$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad l = 1, 2, \ldots .$$

В отличие от предыдущей серии орбит, при $c < 0$ орбите, проходящей через точку $(0,0)$, соответствует неприводимое представление в $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:

$$X e_{kl} = \sqrt{\left(1-q^{-2k+2}\right)c}\, e_{k-1,l},$$

$$U e_{kl} = q^{-k} \sqrt{\left(1-q^{-2l}\right)c}\, e_{k,l+1}, \quad k, l = 1, 2, \ldots .$$

6. Наконец, при $c > 0$ орбите, проходящей через точку $(0,0)$, соответствует неприводимое представление. Множество $\Delta$ имеет вид $\Delta = \{x^{(kl)} = ((1-q^{2k})c, q^{2k}(1-q^{-2l})c),\ k \geq 0,\ l \leq -1\}$. Представление действует в $l_2(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$:

$$X e_{kl} = \sqrt{\left(1-q^{2k}\right)c}\, e_{k+1,l},$$

$$U e_{kl} = q^{k-1} \sqrt{\left(1-q^{2l}\right)c}\, e_{k,l-1}, \quad k, l = 1, \ldots .$$

Отметим еще, что операторы этого представления, так же, как и операторы представления в случаях 1 и 2, ограничены.

Авторы выражают искреннюю признательность Ю. С. Самойленко за внимание и ряд ценных замечаний при подготовке статьи.

1. *Березанский Ю. М., Островский В. Л., Самойленко Ю. С.* Разложение по собственным функциям семейств коммутирующих операторов и представления коммутационных соотношений // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 106 – 109.
2. *Ostrovskii V. L., Samoilenko Yu. S.* Unbounded operators satisfying non-Lie commutation relations // Repts Math. Phys. – 1989. – **28**, № 1. – P. 91 – 104.
3. *Вайслеб Э. Е., Самойленко Ю. С.* Представления операторных соотношений неограниченными операторами и многомерные динамические системы // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 8. – С. 1011 – 1019.
4. *Островский В. Л., Самойленко Ю. С.* Семейства неограниченных самосопряженных операторов, связанных нелиевскими соотношениями // Функцион. анализ и его прил. – 1989. – **23**, вып. 2. – С. 67 – 68.
5. *Вайслеб Э. Е.* Представления соотношений, связывающих семейство коммутирующих самосопряженных операторов с одним несамосопряженным // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 9. – С. 1258 – 1262.
6. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1984. – 232 с.
7. *Pusz W., Woronowicz S. L.* Twisted second quantization // Repts Math. Phys. – 1989. – **27**. – P. 231 – 257.
8. *Noumi M., Mimachi K.* Big $q$-Jacobi polynomials, $q$-Hahn polynomials and a family of quantum 3-spheres // Lett. Math. Phys. – 1990. – **19**. – P. 299 – 305.

Получено 17.06.94