УДК 517.949.2

С. А. Щеголев, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

О РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПОЧТИ ТРЕУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

For an almost triangular system, the existence of particular solutions in the form of Fourier series with slowly changing coefficients and frequency is studied.

Досліджується існування у майже трикутної системи різницевих рівнянь частинних розв'язків, які мають вигляд ряду Фур'є з повільно змінними коефіцієнтами і частотою.

Уравнения и системы уравнений в конечных разностях играют важную роль в современной математике, и им посвящены многочисленные исследования (см., например, [1 – 3]). В настоящей работе результаты [4], полученные для дифференциальных уравнений, распространяются на системы разностных уравнений.

Введем следующие обозначения и определения:

$$G = \{n, \varepsilon : n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^1\}.$$

Обозначим через S_Δ множество функций $f(n, \varepsilon)$, для которых выполнены следующие условия:

1) $f: G \to \mathbb{C}^1, \quad \sup\limits_G |f(n, \varepsilon)| = M_f < +\infty;$

2) $\Delta f(n, \varepsilon) \equiv f(n+1, \varepsilon) - f(n, \varepsilon) = \varepsilon q(n, \varepsilon),$

где $g(n, \varepsilon)$ удовлетворяет условию 1.

Будем говорить, что

функция $f(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon))$ принадлежит пространству V_Δ, если

$$f(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s(n,\varepsilon) e^{is\theta(n,\varepsilon)}, \tag{1}$$

$$\|f(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon))\|_{V_\Delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sup_G |f_s(n,\varepsilon)| < +\infty,$$

$\theta(n, \varepsilon)$ — вещественная;

функция $f(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon))$ принадлежит классу B_Δ, если $f \in V_\Delta$, и функции f_s в разложении (1) таковы, что

$$\Delta f_s(n, \varepsilon) = \varepsilon g_s(n, \varepsilon), \quad \sup_G |g_s(n,\varepsilon)| \le L_f < +\infty,$$

L_f не зависит от s.

Целью статьи является изучение почти треугольной квазилинейной системы разностных уравнений

$$\Delta x_j(n) = \sum_{k=1}^{j} p_{jk}(n,\varepsilon) x_k(n) + q_j(n, \varepsilon, \theta, (n, \varepsilon)) +$$

$$+ \mu X_j(n, \varepsilon, \theta, (n, \varepsilon), x_1, \ldots, x_m), \quad j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

где $p_{jk}(n, \varepsilon) \in S_\Delta$,

$$q_j(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} q_{js}(n,\varepsilon)e^{is\theta(n,\varepsilon)} \in B_\Delta,$$

функции X_j ограничены при $n, \varepsilon \in G$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x_j \in D \subset V_\Delta$ и таковы, что если

$$x_j = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{js}(n,\varepsilon)e^{is\theta(n,\varepsilon)}, \quad j = \overline{1,m}, \tag{3}$$

то

$$X_j(n, \varepsilon, \theta, x_1, \ldots, x_m) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} H_{js}(n,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^m)e^{is\theta(n,\varepsilon)},$$

где

$$\varphi^j = \operatorname{colon}(\varphi_{js}), \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$H_{js} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_j(n,\varepsilon,\theta,x_1,\ldots,x_m)e^{-is\theta}d\theta, \tag{4}$$

μ — вещественный положительный параметр.

Нас будут интересовать достаточные условия существования у системы (2) частных решений класса B_Δ.

Лемма. *Пусть задано линейное разностное уравнение*

$$\Delta x(n) = p(n, \varepsilon)x(n) + q(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon)), \tag{5}$$

$$p(n, \varepsilon) \in S_\Delta, \quad q(n, \varepsilon, \theta) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} q_s(n,\varepsilon)e^{is\theta} \in B_\Delta,$$

и выполнены следующие условия:

1) $\sup\limits_G |p(n, \varepsilon)| = M < +\infty$;

2) $|1 + p(n, \varepsilon)| \le 1 - \gamma$, *либо* $|1 + p(n, \varepsilon)| \ge 1 + \gamma$, *где* $0 < \gamma < 1$;

3) $\Delta p(n, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{p}(n, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |\tilde{p}(n, \varepsilon)| \le l_1 < +\infty$;

4) $\sup\limits_G |q_s(n, \varepsilon)| = q_s$, $\sum\limits_{s=-\infty}^{\infty} q_s = q < +\infty$, $|s| q_s \le Q < +\infty$, $\forall s \in \mathbb{Z}$;

5) $\Delta q_s(n, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{q}_s(n, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |\tilde{q}_s(n, \varepsilon)| \le l_2 < +\infty$;

6) $\Delta\theta(n, \varepsilon) = \omega(n, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |\omega(n, \varepsilon)| \le M$;

7) $\Delta\omega(n, \varepsilon) = \varepsilon\tilde{\omega}(n, \varepsilon)$, $\sup\limits_G |\tilde{\omega}(n, \varepsilon)| \le l_1 < +\infty$.

Тогда уравнение (5) *имеет единственное частное решение*

$$x(n, \varepsilon, \theta, (n, \varepsilon)) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_s(n,\varepsilon)e^{is\theta(n,\varepsilon)} \in B_\Delta, \tag{6}$$

причем

$$\sup_G |\varphi_s(n,\varepsilon)| \le q_s\gamma^{-1}, \tag{7}$$

$$\Delta\varphi_s(n,\varepsilon) = \Delta\tilde{\varphi}_s(n,\varepsilon),$$

$$\sup_G \left|\tilde{\varphi}_s(n,\varepsilon)\right| \le \frac{(3+2M)^2}{\gamma^3}(Ql_1 + ql_1 + l_2). \tag{8}$$

Доказательство. Подставив выражение (6) в уравнение (5), получим следующие разностные уравнения относительно φ_s:

$$\Delta\varphi_s(n) = \rho_s(n,\varepsilon)\varphi_s(n) + q_s(n,\varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)}, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

где

$$\rho_s = (1 + p(n,\varepsilon))e^{-is\omega(n,\varepsilon)} - 1.$$

Очевидно, что

$$\sup_G |\rho_s(n,\varepsilon)| \le 2 + M \qquad \forall s \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Используя условия леммы и неравенство $|e^{i\varphi} - 1| \le |\varphi|$, нетрудно получить оценки

$$|\Delta\rho_s(n,\varepsilon)| \le \varepsilon l_1(1 + (1+M)|s|), \tag{11}$$

$$|q_s(n,\varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)}| \le q_s, \tag{12}$$

$$|\Delta(q_s(n,\varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)})| \le \varepsilon(l_2 + |s|q_s l_1). \tag{13}$$

Кроме того, очевидно, что $|1+\rho_s| = |1+p|$.

Рассмотрим следующее решение уравнения (9):

$$\varphi_s(n,\varepsilon) = \begin{cases} -\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^{j}(1+\rho_s(n+k,\varepsilon))} r_s(n+j,\varepsilon) & \text{при } \left|1+\rho_s\right| \ge 1+\gamma; \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{k=2}^{j}(1+\rho_s(n-k+1,\varepsilon))r_s(n-j,\varepsilon) & \text{при } \left|1+\rho_s\right| \le 1-\gamma, \end{cases}$$

где

$$\prod_{k=2}^{1}\left(1+\rho_s(n-k+1,\varepsilon)\right) = 1, \quad r_s = q_s(n,\varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)}.$$

Используя условия теоремы и оценки (10) – (13), для функции φ_s несложно установить справедливость оценок (7), (8). Лемма доказана.

Теорема. *Пусть система* (2) *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\sup_G \left|p_{jk}(n,\varepsilon)\right| \le M < +\infty, \quad |1 + p_{jj}(n,\varepsilon)| \le 1-\gamma,$

$$\textit{либо} \quad |1 + p_{jj}(n,\varepsilon)| \ge 1+\gamma, \quad 0<\gamma<1,$$

$$\Delta p_{jk}(n,\varepsilon) = \varepsilon\tilde{p}_{jk}(n,\varepsilon), \quad \sup_G\left|\tilde{p}_{jk}(n,\varepsilon)\right| \le l_1 < +\infty;$$

2) $\sup_G\left|q_{js}(n,\varepsilon)\right| \le q_s, \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} q_s = q < +\infty, \quad |s|q_s \le Q < +\infty,$

$$\Delta q_{js}(n,\varepsilon) = \varepsilon\tilde{q}_{js}(n,\varepsilon), \quad \sup_G\left|\tilde{q}_{js}(n,\varepsilon)\right| \le l_2 < +\infty;$$

3) $\Delta\theta(n,\varepsilon) = \omega(n,\varepsilon), \quad \sup\limits_G |\omega(n,\varepsilon)| \le M,$

$$\Delta\omega(n,\varepsilon) = \varepsilon\tilde{\omega}(n,\varepsilon), \quad \sup_G |\tilde{\omega}(n,\varepsilon)| \le l_1;$$

4) *на функции* H_{js} *налагаются следующие ограничения: пусть*

$$\begin{Bmatrix} \varphi^j \\ \psi^j \end{Bmatrix} = \operatorname{colon}\begin{Bmatrix} \varphi_{js} \\ \psi_{js} \end{Bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sup_G \begin{Bmatrix} |\varphi_{js}(n,\varepsilon)| \\ |\psi_{js}(n,\varepsilon)| \end{Bmatrix} \le \alpha < +\infty,$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta\varphi_{js}(n,\varepsilon) \\ \Delta\psi_{js}(n,\varepsilon) \end{Bmatrix} = \varepsilon\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}_{js}(n,\varepsilon) \\ \tilde{\psi}_{js}(n,\varepsilon) \end{Bmatrix}, \quad \sup_G \begin{Bmatrix} |\tilde{\varphi}_{js}(n,\varepsilon)| \\ |\tilde{\psi}_{js}(n,\varepsilon)| \end{Bmatrix} \le \beta < +\infty,$$

$j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad \alpha,\beta$ — *постоянные; тогда*

а) $\sup\limits_G |H_{js}(n,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^m)| \le H_s(\alpha) \quad \forall j = \overline{1,m},$

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} H_s(\alpha) = H(\alpha) < +\infty, \quad \left(|s| + 1 + \frac{m-1}{\gamma}\right) l_1 H_s(\alpha) \le v_2 < +\infty;$$

б) $\sup\limits_G |H_{js}(n,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^m) - H_{js}(n,\varepsilon,\psi^1,\ldots,\psi^m)| \le$

$$\le L_s(\alpha) \sum_{k=1}^{m} \left\|\varphi^k - \psi^k\right\|, \quad j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} L_s(\alpha) = L_s(\alpha) < +\infty, \quad \left(|s| + 1 + \frac{m-1}{\gamma}\right) l_1 L_s(\alpha) \le v_3 < +\infty,$$

$$\|\varphi^j\| \overset{\text{def}}{=} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sup_G |\varphi_{js}(n,\varepsilon)|; \tag{14}$$

в) $\Delta H_{js}(n,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^m) = \varepsilon\tilde{H}_{js}(n,\varepsilon,\varphi^1,\ldots,\varphi^m,\tilde{\varphi}^1,\ldots,\tilde{\varphi}^m) \equiv \varepsilon\tilde{H}_{js}(n,\varepsilon,\varphi,\tilde{\varphi}),$

$$\sup_G |\tilde{H}_{js}(n,\varepsilon,\varphi,\tilde{\varphi})| \le \tilde{H}(\alpha,\beta) < +\infty;$$

г) $\sup\limits_G |\tilde{H}_{js}(n,\varepsilon,\varphi,\tilde{\varphi}) - \tilde{H}_{js}(n,\varepsilon,\psi,\tilde{\psi})| \le K_1(\alpha,\beta) \sum\limits_{k=1}^{m} \|\varphi^k - \psi^k\| +$

$$+ K_2(\alpha,\beta) \max_{k,r} \sup_G |\tilde{\varphi}_{kr}(n,\varepsilon) - \tilde{\psi}_{kr}(n,\varepsilon)|,$$

где

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}^j \\ \tilde{\psi}^j \end{Bmatrix} = \operatorname{colon}\begin{Bmatrix} \tilde{\varphi}_{js} \\ \tilde{\psi}_{js} \end{Bmatrix}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad K_1, K_2 \text{ — постоянные.}$$

При этих условиях существует $\mu_0 > 0$ *такое, что для каждого* $\mu \in [0, \mu_0)$ *система* (2) *имеет в некоторой области пространства* V_Δ *единственное частное решение*

$$x_j(n,\varepsilon,\theta(n,\varepsilon),\mu) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \varphi_{js}(n,\varepsilon,\mu) e^{is\theta(n,\varepsilon)} \in B_\Delta,$$

и существуют такие постоянные $u_1(\mu), u_2(\mu)$, *что*

$$\| x_j(n, \varepsilon, \theta(n, \varepsilon), \mu) \|_{V_\Delta} \le u_1(\mu), \tag{15}$$

$$\Delta\varphi_{js}(n, \varepsilon, \mu) = \varepsilon\tilde{\varphi}_{js}(n, \varepsilon, \mu),$$

$$\sup_G |\tilde{\varphi}_{js}(n, \varepsilon, \mu)| \le u_2(\mu), \quad j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Доказательство. Подставив выражение (3) в систему (2) и приравняв коэффициенты при одинаковых гармониках, получим счетную систему разностных уравнений относительно φ_{js}:

$$\Delta\varphi_{js}(n) = \sum_{k=1}^{j} \rho_{jks}(n,\varepsilon)\varphi_{ks}(n) + q_{js}(n, \varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)} +$$

$$+ \mu H_{js}(n, \varepsilon, \varphi^1, \ldots, \varphi^m)e^{-is\omega(n,\varepsilon)}, \tag{17}$$

где

$$\rho_{jks} = \left(p_{jk}(n, \varepsilon) + \delta_j^k(1 - e^{-is\omega(n,\varepsilon)})\right)e^{-is\omega(n,\varepsilon)},$$

δ_j^k — символ Кронекера, $j = \overline{1,m}$, $k \le j$, $s \in \mathbb{Z}$.

Положив в (17) $\mu = 0$, получим треугольную линейную систему разностных уравнений. Последовательным применением леммы нетрудно доказать, что эта система имеет единственное решение $\varphi_{js0}(n,\varepsilon) \in S_\Delta$, причем

$$\sup_G |\varphi_{js0}(n, \varepsilon)| \le \frac{q_s}{\gamma}\left(\frac{M}{\gamma} + 1\right)^{j-1}, \quad j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z}, \tag{18}$$

$$\Delta\varphi_{js0}(n, \varepsilon) = \varepsilon\tilde{\varphi}_{js0}(n, \varepsilon),$$

$$\sup_G |\tilde{\varphi}_{js0}(n,\varepsilon)| \le c(1 + d)^{j-1}\left[\left(|s| + 1 + \frac{j-1}{\gamma}\right)l_1 q_s + l_2\right], \tag{19}$$

где

$$c = \frac{1}{\gamma^3}(3 + 2M)^2, \quad d = \frac{M}{\gamma} + Mc, \quad j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Существование решений класса B_Δ системы (2) эквивалентно существованию решений класса S_Δ системы (17). Для построения такого решения применим метод последовательных приближений, приняв в качестве нулевого приближения $\varphi_{js0}(n, \varepsilon)$, а последующие определим как решения класса S_Δ линейных систем

$$\Delta\varphi_{js,r+1}(n) = \sum_{k=1}^{j} \rho_{jks}(n,\varepsilon)\varphi_{ks,r+1}(n) + q_{js}(n, \varepsilon)e^{-is\omega(n,\varepsilon)} +$$

$$+ \mu H_{js}(n, \varepsilon, \varphi^{1r}, \ldots, \varphi^{mr})e^{-is\omega(n,\varepsilon)}, \quad j = \overline{1,m}, \quad k \le j, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{20}$$

где $\varphi^{jr} = \operatorname{colon}(\varphi_{jsr}(n, \varepsilon))$, $s \in \mathbb{Z}$.

Обозначим

$$\Omega_1 = \{\varphi^j : \|\varphi^j - \varphi^{j0}\| \le W_1 \in \mathbb{R}^1, \quad j = \overline{1,m}\},$$

$$\Omega_2 = \{\varphi^j : \Delta\varphi_{js}(n, \varepsilon) = \varepsilon\tilde{\varphi}_{js}(n, \varepsilon);$$

$$\sup_G \left|\tilde{\varphi}_{js}(n, \varepsilon) - \tilde{\varphi}_{js0}(n, \varepsilon)\right| \le W_2 \in \mathbb{R}^1, \quad j = \overline{1,m}, \quad s \in \mathbb{Z}\}.$$

Их условия 4а) теоремы и оценки (18) вытекает, что неравенство

$$\frac{\mu H(\alpha)}{\gamma}\left(\frac{M}{\gamma}+1\right)^{m-1} \leq w_1 < W_1$$

гарантирует выполнение включения $\varphi^{jr} \in \Omega_1$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Из условия 4б) легко получить оценку

$$\| \varphi^{jr} - \varphi^{j,r-1} \| \leq \frac{q}{\gamma}\left(\frac{M}{\gamma}+1\right)^{j-1} (\mu u)^r,$$

где

$$u = \frac{L(\alpha)}{\gamma}\,\frac{\left(M\gamma^{-1}+1\right)^m - 1}{M\gamma^{-1}},$$

откуда следует, что неравенство $\mu u < 1$ гарантирует сходимость последовательности $\{\varphi^{jr}\}$ по норме (14) к решению φ^j системы (17). При этом

$$\| \varphi^j \| \leq \frac{q}{\gamma}\left(\frac{M}{\gamma}+1\right)^{j-1} (1-\mu u)^{-1}, \quad j = \overline{1,m},$$

откуда вытекает оценка (15).

Используя условия 4а) – 4в) теоремы и оценку (19), можно доказать, что неравенство

$$\mu c(1+d)^{m-1}(v_2 + \tilde{H}(\alpha,\beta)) \leq w_2 < W_2$$

гарантирует выполнение включения $\varphi^{jr} \in \Omega_2$. Из условия 4г) нетрудно получить, что неравенство $\mu A < 1$, где $A = c(1+d)^{m-1}K_2$, и неравенство $\mu u < 1$ гарантируют равномерную в G сходимость последовательности $\{\tilde{\varphi}_{jsr}(n,\varepsilon)\}$ к функции $\tilde{\varphi}_{js}(n,\varepsilon)$ такой, что $\Delta\varphi_{js}(n,\varepsilon) = \varepsilon\tilde{\varphi}_{js}(n,\varepsilon)$, где φ_{js} — решение класса S_Δ системы (17), причем справедлива оценка

$$\sup_G \left|\tilde{\varphi}_{js}(n,\varepsilon)\right| \leq c(1+d)^{m-1}v + \frac{\mu c(1+d)^{m-1}}{1-\mu A} \times$$

$$\times \left(\frac{q}{\gamma}(v_3+K_1)\left(\frac{\mu u}{1-\mu u} + \frac{(M_1+1)^m - 1}{M_1}\right) + K_2 c v(1+d)^{m-1}\right),$$

где

$$M_1 = M\gamma^{-1}, \quad v = Q + \left(1+\frac{m-1}{\gamma}\right)l_1 q + l_2.$$

Таким образом, оценка (16), а вместе с ней и теорема доказаны.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 216 с
2. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 278 с.
4. *Костин А. В., Щеголев С. А.* Об одном классе решений квазилинейной дифференциальной системы с медленно меняющимися коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 101 – 103.

Получено 08.10.93