УДК 517.95

А. Н. Витюк, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

О РЕШЕНИЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С НЕВЫПУКЛОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Existence of a generalized solution with continuous derivatives u_x, u_y is proved for the differential inclusion $u_{xy} \in F(x, y, u)$ with the nonconvex right-hand side satisfying the Lipschitz condition in x, y, u.

Для диференціального включення $u_{xy} \in F(x, y, u)$ із неопуклою правою частиною, яка задовольняє умову Ліпшіца по x, y, u доведено існування узагальненого розв'язку, який має неперервні частинні похідні u_x, u_y.

1. Рассмотрим дифференциальное включение (д. в.)

$$u_{xy}(x, y) \in F(x, y, u(x, y)) \tag{1}$$

с краевыми условиями Дарбу

$$\begin{gathered} u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in I = [0, a], \\ u(0, y) = \psi(y), \quad y \in J = [0, b], \quad \varphi(0) = \psi(0). \end{gathered} \tag{2}$$

Пусть E^n — n-мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и нулевым элементом θ; $\operatorname{comp} E^n$ $(\operatorname{conv} E^n)$ — пространство непустых и компактных (выпуклых и компактных) подмножеств E^n с метрикой Хаусдорфа $\alpha(\cdot, \cdot)$; $\rho(v, A)$ — расстояние между точкой v и множеством A в E^n; $\{v\}$ — множество, состоящее из элемента v; $\operatorname{Ls} A_n$ — верхний топологический предел последовательности множеств A_n.

Абсолютно непрерывная функция $u: G \to E^n$, $G = I \times J$ называется:

решением д. в. (1), если частная производная $u_{xy}(x, y)$ почти всюду на G удовлетворяет (1);

классическим решением д. в. (1), если ее частные производные u_x, u_y, u_{xy} непрерывны в области G и $u_{xy}(x, y)$ удовлетворяет включению (1) для всех $(x, y) \in G$;

обобщенным решением, если для любых (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in G$, $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$

$$u(x_2, y_2) - u(x_2, y_1) - u(x_1, y_2) + u(x_1, y_1) \in \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} F(x, y, u(x, y))\, dx\, dy.$$

Существование и некоторые свойства решений задачи (1), (2) изучались в работах [1 – 3].

Для дифференциального включения

$$\dot{x}(t) \in P(t, x(t)) \tag{3}$$

с невыпуклой правой частью условия существования классических решений изучались в [4 – 6], где, в частности, доказано, что если многозначное отображение (м. о.) $P(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по t, x, то существует классическое решение д. в. (3).

В работе [7] приведено доказательство существования классического решения д. в. (1) с невыпуклой правой частью, которое удовлетворяет условиям (2), когда м. о. $F(x, y, u)$ является абсолютно непрерывным, а $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ имеют непрерывные первые производные.

Заметим еще, что в работе [5] доказано, что понятие абсолютно непрерывной многозначной функции в случае двух и более независимых переменных равносильно условию Липшица.

В настоящей работе показано, что если $F(x, y, u)$ является многозначным отображением в пространство $\operatorname{comp} E^n$ и удовлетворяет условию Липшица по x, y, u, то существует обобщенное решение д. в. (1), имеющее непрерывные в G частные производные u_x, u_y.

2. Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ имеют непрерывные первые производные, а м. о. $F(x, y, u)$: $G \times E^n \to \operatorname{comp} E^n$ удовлетворяет условиям:

а) $\alpha\Big(F(x, y, u), F(x_1, y_1, u_1)\Big) \le K(|x - x_1| + |y - y_1|) + L\|u - u_1\|$;

б) $\alpha\Big(F(x, y, u), \{\theta\}\Big) \le M$.

Для простоты изложения далее считаем, что $\varphi(x) = \psi(y) = \theta$.

Теорема. *Пусть м. о.* $F(x, y, u)$ *удовлетворяет условиям* а), б), *а* ω_0 — *произвольный элемент множества* $F(0, 0, \theta)$. *Тогда существует абсолютно непрерывная функция* $u: G \to E^n$, *которая удовлетворяет краевым условиям* (2), *имеет непрерывные частные производные* $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$, *а* $u_{xy}(0, 0) = \omega_0$ *и является обобщенным решением д. в.* (1).

Доказательство. Рассмотрим область G при $a = b$ и сеточную область $G_h = \{(x_i, y_j)\colon x_i = ih,\ y_j = jh;\ i, j = \overline{0, n},\ nh = a\}$. Обозначим для функции v: $G \to E^n$ $v_{ij} = v(x_i, y_j)$, $\Delta_x = (v_{i+1,j} - v_{ij})h^{-1}$, $\Delta_y v_{ij} = (v_{i,j+1} - v_{ij})h^{-1}$, $F_{ij} = F(x_i, y_j, u_{ij})$, $G_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.

Определим функцию v: $G \to E^n$, положив для $(x, y) \in G_{ij}$

$$v(x, y) = v_{ij} + \Delta_x v_{ij}(x - x_i) + \Delta_y v_{ij}(y - y_j) + \\ + f_{ij}(x - x_i)(y - y_j), \quad i, j = \overline{0, n-1}, \tag{4}$$

где f_{ij} — такой элемент множества F_{ij}, что

$$\|f_{ij} - f_{i-1,j-1}\| = \rho(f_{i-1,j-1}, F_{ij}), \quad i, j = \overline{1, n-1}, \tag{5}$$

а $f_{00} = \omega_0$, $f_{i0} \in F_{i0}$, $f_{0j} \in F_{0j}$, $i, j = \overline{1, n-1}$, выбираем так, что

$$\|f_{i0} - f_{i-1,0}\| = \rho(f_{i-1,0}, F_{i0}), \quad \|f_{0j} - f_{0,j-1}\| = \rho(f_{0,j-1}, F_{0j}).$$

Легко убедиться, что

$$v_{ij} = h^2 \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{k=0}^{j-1} f_{mk}, \tag{6}$$

$$\Delta_x v_{ij} = h \sum_{m=0}^{j-1} f_{im}, \tag{7}$$

$$\Delta_y v_{ij} = h \sum_{m=0}^{i-1} f_{mj}. \tag{8}$$

На основании соотношений (6) – (8) получим

$$\| v_{i+1,j+1} - v_{ij} \| = h^2 \left\| \sum_{k=0}^{j} f_{ik} + \sum_{m=0}^{i-1} f_{mj} \right\| \le 2hMa,$$
$$\| \Delta_y v_{i+1,j} - \Delta_y v_{ij} \| \le hM, \quad \| \Delta_x v_{i,j+1} - \Delta_x v_{ij} \| \le hM. \tag{9}$$

Из соотношений (5), (7) – (9) следует

$$\left\| f_{i+1,m+1} - f_{im} \right\| \le \alpha(F_{i+1,m+1}, F_{im}) \le 2h(K + MLa), \quad i, m = \overline{0, n-1},$$
$$\| \Delta_x v_{i+1,j} - \Delta_x v_{ij} \| = h \left\| \sum_{m=1}^{j-1} \left(f_{i+1,m} - f_{i,m-1} \right) + \left(f_{i+1,0} - f_{i,j-1} \right) \right\| \le$$
$$\le hT, \quad T = 2[M + (K + LMa)a], \tag{10}$$
$$\| \Delta_y v_{i,j+1} - \Delta_y v_{ij} \| \le hT. \tag{11}$$

Пусть

$$f_h(x, y) = \begin{cases} f_{ij}, & (x,y) \in \left[x_i, x_{i+1}\right) \times \left[y_j, y_{j+1}\right), \quad i, j = \overline{0, n-1}; \\ f_{n-1,j}, & x = a, \quad y \in \left[y_j, y_{j+1}\right), \quad j = \overline{0, n-1}; \\ f_{i,n-1} & x \in \left[x_i, x_{i+1}\right), \quad y = b, \quad i = \overline{0, n-1}; \\ f_{n-1,n-1}, & x = a, \quad y = b. \end{cases}$$

Теперь $v(x, y)$ можно записать в виде

$$v(x, y) = \int_0^x \int_0^y f_h(s,t) \, ds \, dt. \tag{12}$$

С учетом (12) получим

$$\| v(x, y) \| \le Ma^2. \tag{13}$$
$$\| v(x'', y'') - v(x', y') \| \le Ma(| x'' - x' | + | y'' - y' |) \tag{14}$$

для любых (x'', y''), $(x', y') \in G$.

Таким образом, при $n = 1, 2, \ldots$ имеем последовательность функций $v(x, y)$ (индекс n опускаем), которая в силу (13), (14) является компактной в пространстве $C(G)$. Не нарушая общности, считаем, что сама последовательность $\{v\}$ равномерно на G сходится к $u(x, y)$. Заметим, что $u(x, y)$ является абсолютно непрерывной функцией, удовлетворяющей краевым условиям (2).

Пусть далее $x_i \le x' < x_{i+1}$, $x_{i+p} \le x'' < x_{i+p+1}$, $y \in [y_j, y_{j+1})$. Тогда с учетом (4), (10) получим

$$\| v_x(x'', y) - v_x(x', y) \| = \| \Delta_x v_{i+p,j} + f_{i+p,j}(y - y_j) - \Delta_x v_{ij} - f_{ij}(y - y_j) \| \le$$
$$\le pTh + 2Mh \le T(x'' - x') + (2M + T)h. \tag{15}$$

Если же $y' \in [y_j, y_{j+1})$, $y'' \in [y_{j+r}, y_{j+r+1})$, $x \in [x_i, x_{i+1})$, то

$$\| v_x(x, y'') - v_x(x, y') \| =$$
$$= \left\| h \sum_{m=0}^{j+r-1} f_{im} + f_{i,j+r}\left(y'' - y_{j+r}\right) - h \sum_{m=0}^{j-1} f_{im} - f_{ij}\left(y' - y_j\right) \right\| \le$$
$$\le hM(r-1) + M(y'' - y_{j+r} - y' + y_{j+1}) = M(y'' - y'). \tag{16}$$

Из соотношений (15), (16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, и $N(\varepsilon)$ такие, что для (x', y'), $(x'', y'') \in G$

$$\| v_x(x'', y'') - v_x(x', y') \| < \varepsilon$$

при $| x'' - x' | < \delta$, $| y'' - y' | < \delta$ и $n > N$. Кроме того, $\| v_x(x, y) \| \le Ma$. Таким образом, последовательность $\{ v_x(x, y) \}$ удовлетворяет условиям обобщенной теоремы Арцела [8], согласно которой существует ее подпоследовательность, которая равномерно на G сходится к $u_1(x, y) \in C(G)$.

Аналогично доказываем, что существует подпоследовательность $\{v_y\}$, которая равномерно на G сходится к $u_2(x, y) \in C(G)$.

Из соотношений

$$v(x, y) = \int_0^x v_x(s, y)\,ds, \quad v(x, y) = \int_0^y v_y(x, t)\,dt$$

и теоремы Лебега следует, что $u_1 = u_x$, $u_2 = u_y$.

Пусть

$$x_h(x) = \begin{cases} x_i, & x \in [x_i, x_{i+1}), \quad i = \overline{0, n-1}; \\ x_{n-1}, & x = a, \end{cases}$$

$$y_h(y) = \begin{cases} y_j, & y \in [y_j, y_{j+1}); \\ y_{n-1}, & y = b. \end{cases}$$

Ясно, что $f_h(x, y)$ является измеримым селектором м. о. $F(x_h(x), y_h(y), v_h(x, y))$, где функция $v_h(x, y)$ определяется через значения v_{ij} аналогично функции $f_h(x, y)$. Если, как и выше, $x' < x''$, $y' < y''$, то в силу (12) и определения интеграла Аумана [9] от многозначного отображения имеем

$$v(x'', y'') - v(x'', y') - v(x', y'') + v(x', y') =$$

$$= \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} f_h(x, y)\,dx\,dy \in \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} F\big(x_h(x), y_h(y), v_h(x, y)\big)\,dx\,dy.$$

Отсюда при $h \to 0$ в силу предположения 4.1 из [9] получим

$$u(x'', y'') - u(x'', y') - u(x', y'') + u(x', y') \in$$

$$\in \operatorname{Ls} \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} F\big(x_h(x), y_h(y), v_h(x, y)\big)\,dx\,dy \subset$$

$$\subset \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} \operatorname{Ls} F\big(x_h(x), y_h(y), v_h(x, y)\big)\,dx\,dy \subset \int_{x'}^{x''}\int_{y'}^{y''} F(x, y, u(x, y))\,dx\,dy.$$

Здесь учтено, что последовательность $\{v_h(x, y)\}$ также равномерно на G сходится к $u(x, y)$.

1. *Sosulski W.* Existence theorem for generalized functional-differential equations of hyperbolic type // Rocz. PTM. Ser. 1. – 1985. – **25**, № 1. – P. 149 – 152.
2. *Витюк А. Н.* Свойства решений гиперболических дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1991. – № 15. – С. 59 – 62.
3. *Витюк А. Н.* О существовании решений одного класса многозначных дифференциальных уравнений в частных производных // Краевые задачи. – Пермь, 1984. – С. 131 – 133.
4. *Филиппов А. Ф.* Классические решения дифференциальных уравнений с многозначной правой частью // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. – 1967. – № 3. – С. 16 – 26.
5. *Филиппов А. Ф.* Об условиях существования решений многозначных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – **3**, № 6. – С. 1070 – 1078.
6. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.
7. *Kubiaczyk I.* Existence theorem for multivalued hyperbolic equation // Rocz. PTM. Ser. 1. – 1987. – **27**, № 1. – P. 115 – 119.
8. *Conlan J.* The Cauchy problem and the mixed boundary value problem for a non-linear hyperbolic partial differential equation in two independent variables // Arch. Ration. Mech. and Anal. – 1959. – **3**. – P. 355 – 380.
9. *Auman R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**, № 1. – P. 1 – 12.

Получено 01.12.93