УДК 517.929

В. Ф. Давыдов, асп. (Киев. ун-т)

МАЖОРАНТНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ КВАДРАТИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Systems of differential equations with delay and quadratic right-hand sides are considered. Compact matrix notation for writing these systems in a general form is suggested. Upper and lower estimates for solutions of systems of quadratic differential equations with an arbitrary delay are obtained by using quadratic Lyapunov functions.

Розглядаються системи рівнянь з загаюванням та квадратичними правими частинами. Запропонована компактна матрична форма запису таких систем у загальному вигляді. Використовуючи квадратичні функції Ляпунова, одержані оцінки зверху та знизу розв'язків систем квадратичних диференціальних рівнянь з довільним загаюванням.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений запаздывающего типа с квадратичной нелинейностью

$$\dot{x}(t) = A_1 x(t) + A_2 x(t-\tau) + \\ + X(t) B_1 x(t) + X(t-\tau) B_2 x(t) + X(t-\tau) B_3 x(t-\tau), \tag{1}$$

где $\tau > 0$ — произвольное постоянное запаздывание, A_1, A_2 — квадратные $(n \times n)$-матрицы с постоянными коэффициентами. $X(t)$ и B_j, $j = \overline{1,3}$, — прямоугольные матрицы размерности $n \times n^2$ и $n^2 \times n$ соответственно, имеют следующую блочную структуру:

$$X(t) = [X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)]; \quad B_j = \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \ldots \\ B_{nj} \end{bmatrix}.$$

Здесь $X_i(t)$ — квадратная матрица, у которой на i-й строке расположена вектор-строка $x^T(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$, а остальные элементы равны нулю. B_{ij} — квадратная симметричная матрица, определяющая квадратичную составляющую i-го уравнения системы (1).

Оценки решений квадратичной системы (1) сверху и снизу будем строить в предположении, что матрица $A = A_1 + \beta A_2$ при некотором $0 \le \beta \le 1$ асимптотически устойчива, т. е. $\operatorname{Re} \lambda_i(A) < 0$. Тогда для произвольной симметричной положительно определенной матрицы C уравнение Ляпунова

$$A^T H + HA = -C \tag{2}$$

имеет единственное решение — положительно определенную, симметричную матрицу H [1].

Будем использовать следующие векторные нормы:

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{0 \le s \le \tau} \{ |x(s+t)| \}.$$

В качестве матричной выберем спектральную норму [2]: $|D| = \sqrt{\lambda_{\max}(D^T D)}$, где D — некоторая прямоугольная матрица, а $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матриц.

Выберем функцию Ляпунова в виде квадратичной формы $v\,(x(t)) = x^T(t) H x(t)$, матрица H которой удовлетворяет уравнению (2). Известно, что для квадратичных форм справедливы неравенства

$$\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 \le v(x(t)) \le \lambda_{\max}(H)|x(t)|^2. \tag{3}$$

Обозначим поверхность уровня функции Ляпунова через ∂v^α, v^α — область, ограниченная этой поверхностью, т. е.

$$\partial v^\alpha = \{x: x^T H x = \alpha\}, \quad v^\alpha = \{x: x^T H x < \alpha\}.$$

Для построения мажорантных оценок системы (1) будем пользоваться следующим подходом [3, 4]: отрицательную определенность производной $v(x(t))$ вдоль решений системы будем проверять лишь на тех участках, где решение „не слишком быстро" убывает, т. е. там, где выполняется соотношение $v(x(t)) \le v(x(T))$, $0 \le t < T$. Предположим, что при некотором $T > 0$ происходит первый выход решения $x(t)$ системы (1) на границу области v^α, т. е. $x(t) \in v^\alpha$ и $x(T) \in \partial v^\alpha$. В силу этого предположения и неравенств (3) выполняется

$$\lambda_{\min}(H)|x(t)|^2 \le v(x(t)) < v(x(T)) \le \lambda_{\max}(H)|x(T)|^2.$$

Отсюда получаем

$$|x(t)| < \varphi(H)|x(T)|, \quad \varphi(H) = \sqrt{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)}. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть существует H — положительно определенная матрица — решение уравнения* (2) *и параметр $\beta \in [0, 1]$ такие, что выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H)) > 0,$$

где $\varphi(H) = \sqrt{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)}$. Тогда область асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ системы (1) *содержит шар радиуса*

$$R = \frac{\lambda_{\min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H))}{2|H|\sum_{i=1}^{3}|B_i|\varphi^i(H)} \tag{5}$$

и для решений $x(t)$ из этого шара справедлива оценка сверху

$$|x(t)| \le \frac{a\varphi(H)\|x(0)\|_\tau \exp\{-a(t-\tau)/2\}}{a - \lambda_{\max}^{1/2}(H)\|x(0)\|_\tau b[1 - \exp\{-a(t-\tau)/2\}]}, \tag{6}$$

где

$$\begin{gathered} a = \{\lambda_{\min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H))\}/\lambda_{\max}(H), \\ b = 2|H|[|B_1| + |B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)]/(\lambda_{\max}(H)\lambda_{\min}^{1/2}(H)). \end{gathered} \tag{7}$$

Доказательство. Вычислим полную производную функции Ляпунова вдоль решений квадратичной системы (1):

$$v(x(t)) = -x^T(t)Cx(t) + 2x^T(t)H\{A_2[x(t-\tau) - \beta x(t)] +$$
$$+ X(t)B_1x(t) + X(t-\tau)B_2x(t) + X(t-\tau)B_3x(t-\tau)\}.$$

Учитывая вид матрицы $X(t)$ и свойства спектральной нормы, получаем $|X(t)| = |x(t)|$ для произвольного $t \ge 0$. Построим оценку сверху полной производной $v(x(t))$:

$$\dot v(x(t)) \le -\lambda_{\min}(C)|x(t)|^2 + 2\{|HA_2|[|x(t-\tau)| + \beta|x(t)|] +$$
$$+ |H|[|B_1||x(t)|^2 + |B_2||x(t-\tau)||x(t)| + |B_3||x(t-\tau)|^2]\}|x(t)|.$$

Используя неравенство (4), полученную оценку в момент времени T можно представить так:

$$\dot{v}(x(T)) \le -(\lambda_{\min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H)) -$$
$$-2|H||x(T)|[|B_1| + |B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)])|x(T)|^2.$$

Применяя неравенства (3) для квадратичных форм, имеем

$$\dot{v}(x(T)) \le -(\lambda_{\min}(C) - 2|HA_2|(\beta + \varphi(H)) - 2|H|v^{1/2}(x(T))\lambda_{\min}^{-1/2}(H)[|B_1| +$$
$$+|B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)])v(x(T))/\lambda_{\max}(H).$$

Полученное дифференциальное неравенство перепишем в следующем виде:

$$\dot{v}(x(T)) \le -av(x(T)) + bv^{3/2}(x(T)), \tag{8}$$

где $b > 0$ и a — вещественные коэффициенты, вычисляемые по формулам (7), приведенным в условии этой теоремы. Для дальнейших рассуждений предположим, что существуют симметричная положительно определенная матрица H — решение уравнения (2) и параметр $\beta \in [0, 1]$, при которых $a > 0$.

Итак, решаем дифференциальное неравенство (8). Разделив его почленно на $v^{3/2}(x(T))$, получим

$$\frac{d}{dt}\left[v^{-1/2}(x(T))\right] - \frac{a}{2}v^{-1/2}(x(T)) \ge -\frac{b}{2}.$$

Пусть $v(x(\theta))$, $0 \le \theta \le \tau$, — семейство начальных значений функции $v(x(t))$, которое принимает функция Ляпунова на некотором решении $x(t)$ системы (1). Тогда решение неравенства (8) имеет вид

$$v^{-1/2}(x(T)) \ge [v^{-1/2}(x(\theta)) - b/a]\exp\{aT/2\} + b/a, \quad 0 \le \theta \le \tau.$$

Отсюда получаем

$$\sqrt{v(x(T))} \le \frac{v^{1/2}(x(\theta))a\exp\{-aT/2\}}{a - v^{1/2}(x(\theta))b\left[1 - \exp\{-aT/2\}\right]}, \quad 0 \le \theta \le \tau.$$

Вновь используя неравенства (3), находим следующую оценку сверху для решений системы (1) в момент времени t:

$$|x(t)| \le \sup_{0 \le \theta \le \tau}\left\{\frac{a\varphi(H)|x(\theta)|\exp\{-a(t-\tau)/2\}}{a - \lambda_{\max}^{1/2}(H)|x(\theta)|b[1 - \exp\{-a(t-\tau)/2\}]}\right\}.$$

Окончательно переписывая полученную оценку и учитывая свойства введенных в рассмотрение векторных норм, получаем (6). Из знаменателя неравенства (6) следует, что гарантированным радиусом области асимптотической устойчивости будет величина R, определенная в теореме 1 равенством (5).

Таким образом, если значения начальной функции $x(\theta)$, $0 \le \theta \le \tau$, лежат в шаре радиуса с центром в начале координат, то решение, соответствующее такой начальной функции, будет гарантированно асимптотически устойчивым.

Построим оценку решений квадратичной системы (1) снизу.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда решение* $x(t)$ *системы* (1) *с начальными функциями из шара радиуса* R (5) *удовлетворяет следующей оценке снизу:*

$$|x(t)| \ge \frac{\min\limits_{0 \le \theta \le \tau}|x(\theta)|c\exp\{-ct/2\}\varphi^{-1}(H)}{c + \min\limits_{0 \le \theta \le \tau}|x(\theta)|d\lambda_{\min}^{1/2}(H)\left[1 - \exp\{-ct/2\}\right]}, \tag{9}$$

где

$$
\begin{aligned}
c &= \{\lambda_{\max}(C) + 2|HA_2|(\beta+\varphi(H))\}/\lambda_{\min}(H),\\
d &= 2|H|[|B_1| + |B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)]/(\lambda_{\min}(H)\lambda_{\max}^{1/2}(H)).
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Доказательство. Итак, для полной производной функции $v(x(t))$ в силу системы (1) справедливо соотношение

$$
\dot v(x(t)) \ge -\lambda_{\max}(C)|x(t)|^2 - 2\{|HA_2|[|x(t-\tau)| + \beta|x(t)|] +
$$
$$
+ |H|[|B_1||x(t)|^2 + |B_2||x(t-\tau)||x(t)| + |B_3||x(t-\tau)|^2]\}|x(t)|.
$$

Из того, что начальная функция лежит в области асимптотической устойчивости, т. е. $\|x(0)\|_\tau \le R$, следует, что решение находится в области v^α при $t \ge 0$. Аналогично, используя подход, описанный выше, и неравенство (4), получаем нижнюю оценку производной $v(x(t))$ в момент времени T:

$$
\dot v(x(T)) \ge -(\lambda_{\max}(C) + 2|HA_2|(\beta+\varphi(H)) +
$$
$$
+ 2|H|[|B_1| + |B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)]|x(T)|)|x(T)|^2.
$$

Используя неравенства (3), получаем

$$
\dot v(x(T)) \ge -(\lambda_{\max}(C) + 2|HA_2|(\beta+\varphi(H)) +
$$
$$
+ 2|H|v^{1/2}(x(T))\lambda_{\max}^{-1/2}(H)[|B_1| +
$$
$$
+ |B_2|\varphi(H) + |B_3|\varphi^2(H)])v(x(T))/\lambda_{\min}(H).
$$

Для компактности дальнейших преобразований будем использовать введенные в условии теоремы 2 коэффициенты c и d (10). Тогда, раскрывая скобки, имеем следующее дифференциальное неравенство:

$$
\dot v(x(T)) \ge -cv(x(T)) - dv^{3/2}(x(T)). \tag{11}
$$

В качестве начального значения будем использовать элементы из множества $v(x(\theta))$, где $0 \le \theta \le \tau$, а $x(\theta)$ — начальная функция. В этом случае решение неравенства (11) может быть представлено так:

$$
v^{-1/2}(x(T)) \le [v^{-1/2}(x(\theta)) + d/c]\exp\{cT/2\} - d/c, \quad 0 \le \theta \le \tau.
$$

Выполняя тождественные преобразования, имеем

$$
\sqrt{v(x(T))} \ge \frac{c\exp\{-cT/2\}}{cv^{-1/2}(x(\theta)) + d\left[1-\exp\{-cT/2\}\right]}, \quad 0 \le \theta \le \tau.
$$

Используя неравенства (3) еще раз, получаем следующую оценку решений системы (1) снизу:

$$
|x(t)| \ge \inf_{0\le\theta\le\tau}\left\{\frac{c\exp\{-ct/2\}\lambda_{\max}^{-1/2}(H)}{c/\left(\lambda_{\min}^{1/2}(H)|x(\theta)|\right) + d\left[1-\exp\{-ct/2\}\right]}\right\}.
$$

Таким образом, полученная оценка может быть представлена в виде (9).

1. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. –М.: Наука, 1970. – 240 с.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. –М.: Наука, 1986. – 576 с.
3. *Разумихин Б. С.* Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**, №4. – С. 500 – 512.
4. *Разумихин Б. С.* Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. – 1960. – **21**, №6. – С. 740 – 748.
5. *Хусаїнов Д. Я., Давидов В. Ф.* Оцінка області стійкості квадратичних диференціальних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. –1991. – Вип. 2. – С. 3 – 6.

Получено 14.07.93