УДК 517.584

В. Н. Почерняев, канд. тех. наук (Киев. воен. ин-т управления и связи)

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ ДЛЯ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Definite integrals with finite integration limits are found for products of first and second kind Bessel functions of different order and with different composite argument.

Знайдені означені інтеграли зі скінченними границями інтегрування від добутків функцій Бесселя першого та другого роду різних порядків і різних складних аргументів.

Расчет плоскопоперечных стыков круглых и коаксиальных волноводов, их модификаций — секторных и коаксиально-секторных волноводов, — возникает при решении ряда прикладных задач электродинамики. По известным параметрам данных соединений находятся параметры диафрагм конечной толщины в указанных цилиндрических волноводах и характеристики конических рупоров со ступенчатой образующей. Решение указанных внутренних и внешних задач электродинамики требует вычисления интегралов от произведений функций Бесселя первого и второго рода разного порядка и разного сложного аргумента с конечными пределами интегрирования типа:

$$I_1 = \int_0^R J_m(\alpha r) J_n(\beta r)\, dr, \tag{1}$$

$$I_2 = \int_0^R J_m(\alpha r) Y_n(\beta r)\, dr, \tag{2}$$

$$I_3 = \int_0^R Y_m(\alpha r) Y_n(\beta r)\, dr, \tag{3}$$

где $J_m(\alpha r)$, $J_n(\beta r)$ — функции Бесселя первого рода; $Y_m(\alpha r)$, $Y_n(\beta r)$ — функции Бесселя второго рода.

Рассмотрим выражение (1). Интеграл I_1 можно вычислить путем представления каждой функции Бесселя первого рода в виде известного бесконечного ряда или в виде произведения степенной, показательной и вырожденной гипергеометрической функций [1, 2]. Однако это сопряжено с большой вычислительной работой двойных бесконечных рядов, точность результата которой зависит от величины аргумента. Использование асимптотических выражений для больших и малых аргументов [1, 2], а также результатов работы [3], налагает существенные ограничения на применение полученных таким образом интегралов при решении внутренних и внешних задач электродинамики. Избежать вычислений двойных бесконечных рядов, не налагая ограничений на круг решаемых задач, предлагается путем использования гипергеометрической функции. Это также позволит более широко применять аналитические методы электродинамики. Для этого представим подынтегральное выражение $J_m(\alpha r) J_n(\beta r)$ через гипергеометрический ряд Гаусса [2, 4]. Тогда

$$I_1 = \int_0^R \left[(\alpha r/2)^m \big/ \Gamma(m+1) \right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \big/ k!\,\Gamma(n+k+1) \right] \times$$

$$\times\ {}_2F_1\!\left(-k, -n-k; m+1; \alpha^2/\beta^2\right) (\beta r/2)^{n+2k}\, dr, \tag{4}$$

где $\Gamma(m+1)$, $\Gamma(n+k+1)$ — гамма-функция, ${}_2F_1\left(-k,-n-k;m+1;\alpha^2/\beta^2\right)$ — гипергеометрический ряд Гаусса.

Гипергеометрический ряд Гаусса является сходящимся, поскольку $(n+ + 2k+m)>0$, а при используемых в указанных задачах электродинамики отношениях $0<\alpha^2/\beta^2<1$ — и быстросходящимся (точность 10^{-4} достигается при удержании 5 членов ряда). Применяя признак Лейбница и теорему о необходимом и достаточном условиях сходимости знакопеременного ряда в выражении (4), получаем условие $n+2k>0$, когда ряд сходится, и оценку остатка ряда. Остаток этого ряда R_k по модулю не превышает первого из отброшенных членов, т. е. $|R_k|<1$ при $k=0$, и $|R_k|<\sigma_1$, где σ_1 — первый из отброшенных членов при $k>0$. Исследуемый ряд сходится равномерно на интервале $[0,R]$ по признаку Абеля. Представим k-й член ряда в выражении (4) в виде $\sigma_k=u_k v_k(r)$, где $v_k(r)=(\beta r/2)^{n+2k}$. В рассматриваемых задачах $\beta r/2<1$. Сходимость ряда $u_1+u_2+\ldots+u_k$ и существование ε, при котором справедливо неравенство $0<v_k(r)\le\varepsilon$, соответствуют условиям признака Абеля. Поэтому, используя свойство интегралов от равномерно сходящихся на замкнутом интервале рядов, окончательно получаем

$$I_1 = \left[(\alpha/2)^m/\Gamma(m+1)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k/k!\,\Gamma(n+k+1)\right]\times$$
$$\times\, {}_2F_1\left(-k,-n-k;m+1;\alpha^2/\beta^2\right)(\beta/2)^{n+2k}\left[R^{m+n+2k+1}/(m+n+2k+1)\right]. \qquad (5)$$

Полученный после интегрирования бесконечный ряд в выражении (5) является на замнутом интервале $[0,R]$ сходящимся, а входящий в (5) гипергеометрический ряд Гаусса остается быстросходящимся.

Следует отметить, что выражение (5) легко проверяется на частных случаях для известных интегралов от произведений функций Бесселя первого рода одного порядка или одного аргумента [5, 6].

Теперь рассмотрим выражение (2). Функцию Бесселя первого рода одного представим в виде бесконечного ряда, откуда получим

$$I_2 = \int_0^R \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(\alpha r/2)^{m+2k}/k!\,\Gamma(m+k+1)\right]Y_n(\beta r)\,dr. \qquad (6)$$

Доказательство абсолютной и равномерной сходимости бесконечного ряда в (6) содержится в работе [2]. Тогда, применяя ранее использованное свойство интегралов, имеем

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(\alpha/2)^{m+2k}/k!\,\Gamma(m+k+1)\right]\int_0^R r^{m+2k}\,Y_n(\beta r)\,dr. \qquad (7)$$

Осуществляя замену переменной и представляя произведение степенной функции и функции Бесселя второго рода через G-функцию Мейера [4], окончательно получаем

$$I_2 = (R/2)\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(\alpha/\beta)^{m+2k}/k!\,\Gamma(m+k+1)\right]\times$$
$$\times\, G_{24}^{21}\left((\beta R/2)^2\,\middle|\,\begin{matrix}1/2,(m+2k)/2-n/2-1/2\\(m+2k)/2-n/2,(m+2k)/2+n/2,(m+2k)/2-n/2-1/2,-1/2\end{matrix}\right)$$
$$(8)$$

Полученный после интегрирования бесконечный ряд в выражении (8) при

$(\alpha/\beta) < 1$, $m+2k > 0$ сходится на замкнутом интервале $[0, R]$. Для $G_{pq}^{ab}(x)$-функции Мейера условием сходимости при $q > 1$ и $p < q$ является неравенство $|x| < 1$. Входящая в (8) G-функция Мейера удовлетворяет этому условию, поскольку $(\beta R/2) < 1$.

Перейдем к рассмотрению выражения (3). Используя представление функции Бесселя второго рода для целых индексов в виде известного трехчлена [2, 4], получаем

$$I_3 = I_{31} - I_{32} - I_{33},$$

$$I_{31} = (2/\pi)\int_0^R Y_n(\beta r) J_m(\alpha r) \ln(c\alpha r/2)\, dr, \quad c = 1,7811\ \ldots, \tag{9}$$

$$I_{32} = (1/\pi)\int_0^R Y_n(\beta r) \sum_{k=0}^{m-1} \left[(m-k-1)!/k!\right](\alpha r/2)^{2k-m}\, dr, \tag{10}$$

$$I_{33} = (1/\pi)\int_0^R Y_n(\beta r) \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k (\alpha r/2)^{2k+m} / k!(m+k)!\right] \times$$

$$\times \left[\sum_{s=1}^{m+k}(1/s) + \sum_{s=1}^{k}(1/s)\right] dr. \tag{11}$$

Аналогично, переходя к вычислению выражения (9) и применяя представление произведения функций Бесселя первого рода в виде гипергеометрического ряда Гаусса, имеем

$$I_{31} = (4R/\pi^2)\left[(\alpha R/2)^m / \Gamma(m+1)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k / k!\,\Gamma(n+k+1)\right] \times$$

$$\times\ {}_2F_1\left(-k, -n-k; m+1; \alpha^2/\beta^2\right)(\beta R/2)^{n+2k} \left[\ln(c\alpha R/2)\ln(c\beta R/2)(m+n+2k+1)^2 - \right.$$

$$\left. - \ln\left(c^2\alpha\beta R^2/4\right)(m+n+2k+1) + 2\right] / (m+n+2k+1)^3 - I_0,$$

$$I_0 = (R/\pi) J_m(\alpha r)\ln(c\alpha r/2)\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(n-k-1)!/k!\right](\beta R/2)^{2k-n}/(4k+1) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(\beta R/2)^{2k+n}/k!(n+k)!\,(m+n+4k+1)\right]\left[\sum_{s=1}^{n+k}(1/s) + \sum_{s=1}^{k}(1/s)\right]\right\}.$$

Для вычислений выражений (10) и (11) используем G-функцию Мейера, после чего получим

$$I_{32} = (R/2\pi)\sum_{k=0}^{\infty}\left[(m-k-1)!\,(\alpha/\beta)^{2k-m}/k!\right] \times$$

$$\times\ G_{24}^{21}\left((\beta R/2)^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2, (2k-m)/2 - n/2 - 1/2 \\ (2k-m)/2 - n/2, (2k-m)/2 + n/2, (2k-m)/2 - n/2 - 1/2, -1/2 \end{matrix}\right),$$

$$I_{33} = (R/2\pi)\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k(\alpha/\beta)^{2k+m}/k!(m+k)!\right]\left[\sum_{s=1}^{m+k}(1/s) + \sum_{s=1}^{k}(1/s)\right] \times$$

$$\times\ G_{24}^{21}\left((\beta R/2)^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 1/2, (2k+m)/2 - n/2 - 1/2 \\ (2k+m)/2 - n/2, (2k+m)/2 + n/2, (2k+m)/2 - n/2 - 1/2, -1/2 \end{matrix}\right).$$

Для интегралов I_{32} и I_{33} имеем такую же G-функцию Мейера, как и в выражении (8). С точки зрения удобства табулирования приведение интегралов I_2 и I_3 к одной G-функции Мейера является достоинством полученных выражений.

Разновидностями интегралов (1) – (3), встречающихся в задачах электродинамики, являются следующие:

$$\int_0^R J_m(\alpha r) J_n(\beta r) r\, d r, \tag{12}$$

$$\int_0^R J_m(\alpha r) J_n(\beta r)(1/r)\, d r, \tag{13}$$

$$\int_0^R J_m(\alpha r) Y_n(\beta r) r\, d r, \tag{14}$$

$$\int_0^R J_m(\alpha r) Y_n(\beta r)(1/r)\, d r, \tag{15}$$

$$\int_0^R Y_m(\alpha r) Y_n(\beta r) r\, d r, \tag{16}$$

$$\int_0^R Y_m(\alpha r) Y_n(\beta r)(1/r)\, d r. \tag{17}$$

Изложенный выше подход к вычислению интегралов (1) – (3) можно применить и к вычислению интегралов (12) – (17). Тогда интеграл (12) определяется выражением (5), в котором множитель $\left[R^{m+n+2k+1}/(m+n+2k+1)\right]$ заменен множителем $\left[R^{m+n+2k+2}/(m+n+2k+2)\right]$, а интеграл (13) — тем же выражением, но с множителем $\left[R^{m+n+2k}/(m+n+2k)\right]$. Полученный интеграл выражения (13) применим для всех m и n, отличных от нуля, а при $m=n=l$, $l=0$ необходимо воспользоваться известным интегралом из [5, 6].

Интеграл (14) определяется выражением (8), в котором множитель $R/2$ заменен множителем $R^2/2$, а интеграл (15) — тем же выражением, но с множителем $1/2$.

Интегралы (16), (17) принимают следующий вид: верхняя строчка в фигурных скобках соответствует интегралу (16), а нижняя — интегралу (17):

$$I = \left[\begin{Bmatrix} 4R^2 \\ 4 \end{Bmatrix} \Big/ \pi^2\right]\left[(\alpha R/2)^m / \Gamma(m+1)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k / k!\, \Gamma(n+k+1)\right] \times$$

$$\times\, {}_2F_1\left(-k, -n-k; m+1; \alpha^2/\beta^2\right)(\beta R/2)^{n+2k} \left[\ln(c\alpha R/2)\ln(c\beta R/2) \times\right.$$

$$\times \begin{Bmatrix} (m+n+2k+2)^2 \\ (m+n+2k)^2 \end{Bmatrix} - \ln\left(c^2\alpha\beta R^2/4\right) \begin{Bmatrix} (m+n+2k+2) \\ (m+n+2k) \end{Bmatrix} +$$

$$\left. +\, 2\right] \Big/ \begin{Bmatrix} (m+n+2k+2)^3 \\ (m+n+2k)^3 \end{Bmatrix} - \left[\begin{Bmatrix} R^2/\pi \\ 1/\pi \end{Bmatrix} J_m(\alpha R) \ln(c\alpha R/2)\right] \times$$

$$\times\left[\sum_{k=0}^{n-1}\left[(n-k-1)!/k!\right](\beta R/2)^{2k-n}\Bigg/\begin{Bmatrix}4k+2\\4k\end{Bmatrix}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k/k!(n+k)!\right]\times\right.$$

$$\times(\beta R/2)^{2k+n}\left[\sum_{s=1}^{n+k}(1/s)+\sum_{s=1}^{k}(1/s)\right]\Bigg/\begin{Bmatrix}m+n+4k+2\\m+n+4k\end{Bmatrix}\Bigg]-$$

$$-\begin{Bmatrix}R^2/2\pi\\1/2\pi\end{Bmatrix}\left[\sum_{k=0}^{m-1}(\alpha/\beta)^{2k-m}\left[(m-k-1)!/k!\right]\times\right.$$

$$\times G_{24}^{21}\left((\beta R/2)^2\,\middle|\,\begin{matrix}1/2,(2k-m)/2-n/2-1/2\\(2k-m)/2-n/2,(2k-m)/2+n/2,(2k-m)/2-n/2-1/2,-1/2\end{matrix}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k/k!(m+k)!\right](\alpha/\beta)^{2k+m}\left[\sum_{s=1}^{m+k}(1/s)+\sum_{s=1}^{k}(1/s)\right]\times$$

$$\left.\times G_{24}^{21}\left((\beta R/2)^2\,\middle|\,\begin{matrix}1/2,(2k+m)/2-n/2-1/2\\(2k+m)/2-n/2,(2k+m)/2+n/2,(2k+m)/2-n/2-1/2,-1/2\end{matrix}\right)\right].$$

Условия применения полученного интеграла I для выражения (17) аналогичны указанным выше для интеграла (13).

В заключение отметим, что полученное выражение для интегралов вида (1) применено к расчету резонансной частоты ячейки ускоряющего волновода линейного ускорителя электронов. Полученный численный результат совпадает с точностью 1% с экспериментальными данными работы [7, с.35].

Полученные в статье выражения для интегралов можно использовать при решении прикладных задач электродинамики, газодинамики, теории упругости и теплопроводности.

1. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 798 с.
3. *Керимов М. К., Скороходов С. А.* О некоторых асимптотических формулах для цилиндрических функций Бесселя // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1990. – №12. – С. 1775 – 1784.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3-х т. – М.: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.; 1974. – Т. 2. – 295 с.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
7. *Вальднер О. А., Шальнов А. В., Диденко А. Н.* Ускоряющие волноводы. – М.: Атомиздат, 1973. – 214 с.

Получено 28.04.93