УДК 512.54

А. В. Тушев, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ОБ ИДЕАЛАХ ГРУППОВОЙ АЛГЕБРЫ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ 2 НАД ПОЛЕМ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Let F be a free group with free generators x, y. In this paper, we find an element α of the group algebra $A = \mathbb{C}F$ such that, for any complex a, b such that $|a| = |b| = 1$, $A \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)A = 0$, where $\vartheta_{a,b}(\alpha)$ is an automorphism of A which maps x,y in ax, by, respectively. Thus, we give a negative answer to the question 12.46 of P. A. Linnel from "Kourovka Notebook".

Доведено, що в груповій алгебрі $A = \mathbb{C}F$ вільної групи F з двома твірними x, y над полем комплексних чисел C існує такий елемент α, що для будь-яких комплексних чисел a, b з модулем 1 перетин ідеалів αA і $\vartheta_{a,b}(\alpha)A$ нульовий, де $\vartheta_{a,b}(\alpha)$ — автоморфізм алгебри A, який переводить x, y в ax, by відповідно. Тим самим дана негативна відповідь на запитання П. Ліннела з "Коурівського зошита".

Известно, что групповая алгебра свободной неабелевой группы не является однородной справа, т. е. пересечение ее двух ненулевых правых идеалов может быть нулевым. В связи с этим представляет интерес следующий вопрос, предложенный П. Линнелом [1] (вопрос 12.46). Пусть F — свободная группа со свободными образующими x и y. Для $a, b \in \mathbb{C}$ таких, что $|a| = |b| = 1$, определим автоморфизм $\vartheta_{a,b}$ алгебры $\mathbb{C}F$ равенствами $\vartheta_{a,b}(x) = ax$ и $\vartheta_{a,b}(y) = by$. Всегда ли для данного ненулевого элемента $\alpha \in \mathbb{C}F$ можно найти такие элементы $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, что $|a| = |b| = 1$ и пересечение $\alpha\mathbb{C}F \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)\mathbb{C}F$ ненулевое? В данной работе показано, что для элемента $\alpha = (1-x)(1-y)$ алгебры $\mathbb{C}F$ не существует элементов $a, b \in \mathbb{C}F \setminus \{1\}$ таких, что $\alpha\mathbb{C}F \cap \cap\, \vartheta_{a,b}(\alpha)\mathbb{C}F \neq 0$.

Далее будем считать, что элемент f свободной группы F представлен его несократимой записью, которая является единственной [2]. Напомним, что длиной $l(f)$ элемента f свободной группы F называется количество букв, входящих в его несократимую запись. Степень элемента $\alpha = \sum_i c_i f_i$ групповой алгебры $\mathbb{C}F$ определяется следующим образом: $\deg(\alpha) = \max\{l(f_i) \mid c_i \neq \neq 0\}$. Слагаемые $c_i f_i$, входящие в сумму $\alpha = \sum_i c_i f_i$, такие, что $l(f_i) = = \deg(\alpha)$, будем называть старшими одночленами элемента α. Если X — множество свободных порождающих свободной группы F и $x \in X \cup X^{-1}$, то для элемента $\alpha = \sum_i c_i f_i$ групповой алгебры $\mathbb{C}F$ определим элемент $x(\alpha)$ как сумму тех элементов $c_i f_i$, у которых левой буквой, входящей внесократимую запись f_i, является x. Если свободная группа F свободно порождается элементами x и y, то нетрудно убедиться, что всякий элемент $\alpha \in \mathbb{C}F$ однозначно представим в виде $\alpha = a + x(\alpha) + x^{-1}(\alpha) + y(\alpha) + y^{-1}(\alpha)$, где $a \in \mathbb{C}$.

Лемма 1. *Пусть a — ненулевое комплексное число и F — свободная группа со свободными порождающими x и y. Если α — ненулевой элемент идеала $(a-x)\mathbb{C}F$, то* $\deg(\alpha) = \deg(x(\alpha) + x^{-1}(\alpha))$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что элемент α представим в виде $\alpha = (a-x)u$, где $u \in \mathbb{C}F$, причем либо $\deg(\alpha) = \deg(u)$, либо $\deg(\alpha) = = \deg(u) + 1$. Если $\deg(\alpha) = \deg(u) + 1$, то утверждение леммы очевидно. Если же $\deg(\alpha) = \deg(u)$, то $x^{-1}(u)$ совпадает с суммой старших одночленов элемента u. Тогда либо $\deg(xu) < \deg(u)$, либо сумма старших одночленов элемента xu входит как слагаемое в $x(\alpha)$. Отсюда следует, что сумма старших одночленов элемента α содержит $x^{-1}(u)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть F — свободная группа со свободными порождающими x и y и α — ненулевой элемент групповой алгебры $\mathbb{C}F$ такой, что* $\deg(\alpha) = \deg(y(\alpha) + y^{-1}(\alpha))$. *Тогда элемент α можно представить в виде $\alpha = \beta + \gamma$, где $\gamma \in (1-x)\mathbb{C}F$, $x(\beta) = x^{-1}(\beta) = 0$ и* $\deg(\beta) = \deg(y(\alpha) + y^{-1}(\alpha))$.

Доказательство проведем индукцией по $d = \deg(x(\alpha) + x^{-1}(\alpha))$. Очевидно, $x(\alpha) = xu$ и $x^{-1}(\alpha) = x^{-1}v$, где $\deg(x(u) + x^{-1}(u)) < d$ и $\deg(x(v) + x^{-1}(v)) < d$. Тогда $\alpha = \beta - \gamma$, где $\beta = y(\alpha) + y^{-1}(\alpha) + u + v$ и $\gamma = (1-x)u + (1-x^{-1})v$. Очевидно, $\gamma \in (1-x)\mathbb{C}F$ и $\deg(x(\beta) + x^{-1}(\beta)) < d$. Тогда для доказательства леммы остается применить предположение индукции к элементу β. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть F — свободная группа с двумя образующими x и y. Тогда для любого ненулевого комплексного числа b выполняется соотношение* $(1-x)\mathbb{C}F \cap (b-y)\mathbb{C}F = 0$.

Доказательство. Предположим, что существует ненулевой элемент $\alpha \in (1-x)\mathbb{C}F \cap (b-y)\mathbb{C}F$. Так как $\alpha \in (b-y)\mathbb{C}F$, то по лемме 1 $\deg(y(\alpha) + y^{-1}(\alpha)) = \deg(\alpha)$. Тогда по лемме 2 $\alpha = \beta + \gamma$, где $\beta \neq 0$, $x(\beta) = x^{-1}(\beta) = 0$ и $\gamma \in (1-x)\mathbb{C}F$. Так как $\alpha \in (1-x)\mathbb{C}F$ и $\gamma \in (1-x)\mathbb{C}F$, то из соотношения $\alpha = \beta + \gamma$ следует, что $\beta \in (1-x)\mathbb{C}F$. Тогда по лемме 1 $\deg(x(\beta) + x^{-1}(\beta)) = \deg(\beta)$, что невозможно, так как $\beta \neq 0$, а $x(\beta) + x^{-1}(\beta) = 0$. Лемма доказана.

Утверждение. *Пусть F — свободная группа с двумя образующими x и y и $\alpha \in \mathbb{C}F$, $\alpha = (1-x)(1-y)$. Тогда для любых отличных от единицы комплексных чисел a, b пересечение $\alpha\mathbb{C}F \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)\ \mathbb{C}F$-нулевое.*

Доказательство. Очевидно, $\vartheta_{a,b}(\alpha) = (1-ax)(1-by) = (1-a)(1-by) + (1-x)a(1-by) = c(1-by) + d$, где $c = (1-a)$ — ненулевое комплексное число и $d = (1-x)a(1-by)$ — ненулевой элемент идеала $(1-x)\mathbb{C}F$. Если пересечение $\alpha\mathbb{C}F \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)\mathbb{C}F$ ненулевое, то существует элемент $h \in \mathbb{C}F$ такой, что $\vartheta_{a,b}(\alpha)h \in \alpha\mathbb{C}F$, а так как $\alpha \in (1-x)\mathbb{C}F$, то $\vartheta_{a,b}(\alpha)h \in (1-x)\mathbb{C}F$. Отсюда, так как $\vartheta_{a,b}(\alpha) = cb(b^{-1} - y) + d$, где $d \in (1-x)\mathbb{C}F$, следует, что $(b^{-1} - y)h \in (1-x)\mathbb{C}F$. Тогда из леммы 3 вытекает, что $h = 0$, а это противоречит предположению, что $\alpha\mathbb{C}F \cap \vartheta_{a,b}(\alpha)\mathbb{C}F \neq 0$. Утверждение доказано.

1. *Коуровская* тетрадь (нерешенные вопросы теории групп): Изд. 12. – Новосибирск, 1992. – 144 с.
2. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1972. – 240 с.

Получено 25.06.93