УДК 517.5

И. Я. Тырыгин, научн. сотр. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ КОДИРОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Upper estimates for the quantity of information in functional classes with initial indeterminacy are obtained. These classes are similar to the classes of images with a bounded dispersion. A probability model of theory of information-based complexity is used. As opposed to the case of classes KH_0^α, it turns out that, in this case, the differential PCM type method does not give any advantages as compared to the deterministic case.

Одержані оцінки зверху на кількість інформації у функціональних класах з первісною невизначеністю, аналогічних класам зображень з обмеженою дисперсією. Використовується ймовірнісна модель теорії інформаційної складності. На відміну від класів KH_0^α, виявляється, що за даних умов метод типу диференціальної імпульсно-кодової модуляції не дає виграшу відносно детерміністського випадку.

В данной работе продолжаются исследования ε-энтропии множеств в пространствах с особым типом метрик, в которые изначально введена неопределенность. Исходные классы функций, подлежащих кодированию и восстановлению, значительно шире своих прототипов в классическом случае пространств C или L_p. В силу "размытости" исходных функциональных классов восстановление функции возможно только в усредненной и вероятностной моделях теории информационной сложности [1]. Некоторые недавние результаты, связанные в рамках этой тематики с детерминистским случаем, можно найти в [2, 3]. Большинство известных результатов теории ε-энтропии [4, 5] могут быть использованы для построения оптимального алгоритма сжатия информации с использованием двухступенчатого способа кодирования [6]. Ниже получены некоторые порядковые оценки для ε-энтропии вероятностных аналогов классов изображений с ограниченной дисперсией при восстановлении в рамках вероятностной модели теории информационной сложности.

Пусть задано изображение в виде функции $x(k, l)$, $1 \le k, l \le m$, $0 \le x(k, l) \le \le 1$. Будем считать, что m — четное. Определим дисперсию dx изображения $x(k, l)$:

$$dx = \left\{ \sum_{k,l=1}^{m} (x(k,l) - Mx)^2 \right\}^{1/2},$$

где

$$Mx = \frac{1}{m^2} \sum_{k,l=1}^{m} x(k, l).$$

Можно показать, что

$$\max_{x(k,l)} dx = \frac{m}{2}.$$

Для этого достаточно рассмотреть более широкую m^2-мерную задачу о шаре максимального радиуса, вписанного в единичный куб. Максимум в этой задаче определяется шаром радиуса $m/2$ с центром $(1/2, \ldots, 1/2)$. Отсюда следует

$$\max_{x(k,l)} dx \le \frac{m}{2}.$$

С другой стороны, существует функция $x(k, l)$, равная 0 и 1 в равном количестве $m^2/2$ точек, для которой $dx = m/2$.

Предположим, что известна плотность распределения вероятности

$$\Pr(dx \leq d) = \int_0^d p(t)dt, \quad d \leq \frac{m}{2}, \quad \int_0^{m/2} p(t)dt = 1.$$

Будем восстанавливать изображение $x(k, l)$ с точностью ε в равномерной метрике

$$\| x \| = \max_{1 \leq k, l \leq m} |x(k, l)|$$

с вероятностью $0 < p_0 \leq 1$:

$$p_0 = \Pr(\| x - y \| \leq \varepsilon),$$

где $y(k, l)$ обозначает восстановленное изображение для исходного $x(k, l)$. Построим $y(k, l)$ следующим образом:

$$y(k, l) = \left[\frac{x(k,l)}{2\varepsilon}\right] \cdot 2\varepsilon + \varepsilon, \quad 1 \leq k, l \leq m.$$

Кодирование функции $x(k, l)$ осуществляется указанием массива целых чисел (метод типа дифференциально-кодовой модуляции)

$$n(k, l) = \left[\frac{x(k,l)}{2\varepsilon}\right] - \left[\frac{Mx}{2\varepsilon}\right] = \frac{y(k,l) - \overline{M}x}{2\varepsilon},$$

где $\overline{M}x = [Mx/2\varepsilon] \cdot 2\varepsilon + \varepsilon$ — квантованное значение Mx. Если $p_0 = 1$, то количество информации, необходимое для кодирования любой функции $x(k, l)$, может быть грубо оценено сверху через

$$H = m^2 \log_2 \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Пусть $0 < p_0 < 1$. Найдем d_0 такое, что

$$p_0 = \int_0^{d_0} p(t)dt.$$

При $dx \leq d_0$ будем восстанавливать $x(k, l)$ указанным ранее способом, а при $dx > d_0$ преобразуем $x(k, l)$ к новому виду $\overline{x}(k, l)$, "прижимая" $x(k, l)$ в точках максимального уклонения от Mx, так, чтобы $d\,\overline{x} = d_0$. Подробнее, упорядочим все значения $|x(k, l) - Mx| = z_i$, $i = \overline{1, m^2}$, $1 \leq k, l \leq m$, по убыванию. Начиная с самого большого значения z_1, уменьшаем $z_1 \to z_2$, потом $z_1 = z_2 \to z_3$ и т. д. до тех пор, пока для преобразованного таким образом изображения $\overline{x}(k, l)$ будет выполняться $d\overline{x} = d_0 < dx$. Затем $\overline{x}(k, l)$ кодируется указанным ранее способом. Нетрудно видеть, что при $m \to +\infty$ такое видоизменение $x(k, l)$ приводит к увеличению погрешности восстановления, верхняя оценка которой есть 1. Средняя погрешность ε_{av} восстановления при $m \to +\infty$ равна

$$\varepsilon_{av} = \int_0^{m/2} \varepsilon(t)p(t)dt = \int_0^{d_0} \varepsilon p(t)dt + \int_{d_0}^{m/2} p(t)dt = 1 - (1 - \varepsilon)p_0.$$

Оценим количество информации $H(d)$, необходимое для кодирования указанным ранее способом изображения $x(k, l)$, $dx \leq d$, с точностью ε. Для записи чисел $n(k, l)$ используем префиксное кодирование натуральных чисел с добавлением бита на знак. Длина $L(n(k, l))$ такого кодирования равна [7]

$$L(n(k, l)) = (1 + o(1)) \log_2 2 \cdot |n(k, l)|.$$

Тогда

$$H(d) = \max_{n(k,l)} \sum_{k,l=1}^{m} (1 + o(1)) \log_2 2 \cdot |n(k, l)| =$$

$$= \max_{n(k,l)} (1 + o(1)) \log_2 \prod_{k,l=1}^{m} 2|n(k, l)|,$$

где

$$n(k, l) = \left[\frac{x(k,l)}{2\varepsilon}\right] - \left[\frac{Mx}{2\varepsilon}\right], \qquad \sum_{k,l=1}^{m} (x(k, l) - Mx)^2 = d^2.$$

С помощью оценки

$$|n(k, l)| = \frac{|x(k,l) - Mx|}{2\varepsilon} + o(1)$$

получаем

$$H(d) = \max_{n(k,l)} (1 + o(1)) \log_2 \prod_{k,l=1}^{m} \left\{\frac{|x(k,l) - Mx|}{\varepsilon} + o(1)\right\}.$$

Можно показать, что задача

$$\left\{\prod_{i=1}^{n} (y_i + c) \to \max, \ \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = d^2 \, (c > 0) \right\}$$

имеет решение

$$\max \prod_{i=1}^{n} (y_i + c) = \left(\frac{d}{\sqrt{n}} + c\right)^n$$

при $y_i = d/\sqrt{n}$, $i = \overline{1, n}$.

Полагая $y_i + c = |x(k, l) - Mx| + \varepsilon\, o(1)$, $n = m^2$, получаем

$$H(d) = m^2 (1 + o(1)) \log_2 \left(\frac{d}{\varepsilon m} + o(1)\right).$$

Эта оценка точна, поскольку достигается для $x(k, l)$:

$$x(k, l) = \begin{cases} \dfrac{2d}{m} & \text{в } \dfrac{m^2}{2} \text{ точках;} \\[2ex] 0 & \text{в } \dfrac{m^2}{2} \text{ точках.} \end{cases}$$

Подсчитаем теперь среднее количество информации $H(\varepsilon, p_0)$, необходимое для кодирования $x(k, l)$ с точностью ε и вероятностью $0 < p_0 < 1$. Используя оценку для $H(d)$, получаем

$$H(\varepsilon, p_0) = \int_0^{d_0} H(t) p(t) dt + H(d_0) \int_{d_0}^{m/2} p(t) dt = \int_0^{m/2} H(t) p(t) dt -$$

$$-\int_{d_0}^{m/2}(H(t)-H(d_0))p(t)dt = MH - \Delta H(d_0),$$

где

$$MH = \int_0^{m/2} H(t)p(t)dt,$$

$$\Delta H(d_0) = m^2(1+o(1))\int_{d_0}^{m/2}\log_2\left(\frac{t+o(\varepsilon)}{d_0+o(\varepsilon)}\right)p(t)dt.$$

При $\varepsilon \to 0$, $\Delta H(d_0) = o(1)$, т. е.

$$H(\varepsilon, p_0) \le MH = H(\varepsilon, p_0) + o(1).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$MH = m^2(1+o(1))\log_2\frac{1}{\varepsilon} + o(1).$$

Тогда

$$H(\varepsilon, p_0) = m^2(1+o(1))\log_2\frac{1}{\varepsilon} + o(1)$$

для всех $0 < p_0 < 1$.

Таким образом, мы получили, что порядковые константы в оценке для $H(\varepsilon, p_0)$ не зависят от p_0 и $p(t)$. Кодирование в вероятностной модели здесь не приносит выигрыша по сравнению с обычным квантованием при $p_0 = 1$. Это отличает данный случай от вероятностных классов, подобных KH_0^{α}, для которых порядковые константы в оценке количества информации существенно зависят от p_0 и плотности распределения вероятности, что приносит большой выигрыш при использовании усредненной и вероятностной моделей.

1. *Traub I. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H.* Information-based complexity. – Boston etc.: Acad. press, 1988.
2. *Тырыгин И. Я.* Уточненные оценки ε-энтропии классов KH_0^{α} // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 760 – 764.
3. *Тырыгин И. Я.* Оптимальное цифровое кодирование последовательности сложных телевизионных изображений. – Киев, 1991. – 20 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики).
4. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. – М.: Физматгиз, 1959. – 228 с.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**. – С. 3 – 86.
6. *Тырыгин И. Я.* ε-энтропийный подход к проблеме сжатия информации // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1598 – 1604.
7. *Кричевский Р.Е.* Сжатие и поиск информации. – М.: Радио и связь, 1989. – 168 с.

Получено 11.10.93