УДК 517.946

И. П. Мельниченко, С. А. Плакса,
кандидаты физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РЕДУКЦИЯ ОСНОВНОЙ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАДРАНТА К НЕСИНГУЛЯРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ*

The principal biharmonic problem for a quadrant with a piecewise continuous boundary condition is reduced to the system of nonsingular integral equations.

Основну бігармонічну задачу для квадранта з кусочно-неперервною крайовою умовою редуковано до системи несингулярних інтегральних рівнянь.

Известно, что в общем случае основная бигармоническая задача эквивалентна системе интегро-дифференциальных уравнений. Если граница области является кривой Ляпунова, то эта система сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма [1]. В работе [2] показано, что в случае ограниченных областей с угловыми точками и непрерывных краевых условий основные задачи теории упругости сводятся к интегральным уравнениям Мусхелишвили.

Ниже рассмотрена основная бигармоническая задача для неограниченной области с конкретной негладкой границей и кусочно-непрерывным краевым условием и показано, что эта задача сводится к системе несингулярных интегральных уравнений.

Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, $\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R} : r > 0\}$, $\mathbb{R}_- := \{r \in \mathbb{R} : r < 0\}$. Рассмотрим основную бигармоническую задачу для квадранта $K := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ нахождения функции $W : \overline{K} \to \mathbb{R}$, непрерывной на замыкании квадранта $\overline{K}$ и удовлетворяющей условиям

$$\begin{gathered} \Delta\Delta W(X,Y) = 0 \quad \forall\,(X,Y) \in K, \\ W(X,Y) = \Omega_1(X,Y) \quad \forall\,(X,Y) \in \partial K, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial W}{\partial n}(X,Y) = \Omega_2(X,Y) \quad \forall\,(X,Y) \in \partial K \setminus \{(0,0)\}, \tag{2}$$

где Ω_1 и Ω_2 — заданные функции, свойства которых будут определены ниже, $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$, $\frac{\partial W}{\partial n}$ — нормальная производная функции W, ∂K — граница множества K.

Решение задачи будем искать в виде

$$W(X,Y) = \Phi(X,Y) + (X^2 + Y^2)\Psi(X,Y), \tag{3}$$

где Φ — непрерывная на $\overline{K}$ и Ψ — непрерывная на $\overline{K} \setminus \{(0,0)\}$, гармонические в K функции такие, что

$$|\Phi(X,Y)| \le c(X^2 + Y^2)^{\alpha}, \quad X^2 + Y^2 \to \infty, \tag{4}$$

$$|\Psi(X,Y)| \le c(X^2 + Y^2)^{\alpha - 1}, \quad X^2 + Y^2 \to \infty, \tag{5}$$

$$|\Psi(X,Y)| \le c(X^2 + Y^2)^{-\beta}, \quad X^2 + Y^2 \to 0, \tag{6}$$

где $0 \le \alpha,\ \beta < 1$, постоянная c не зависит от X и Y.

* Выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда (грант №UB 4000 ISF) и Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий (грант №11.3/12).

Задачу нахождения функции W, удовлетворяющей условиям (1) – (6), назовем задачей I.

Конформным преобразованием $x = X^2 - Y^2$, $y = 2XY$ задача I приводится к эквивалентной ей задаче нахождения гармонических в полуплоскости $E^+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ таких, что φ — непрерывна на замыкании $\overline{E}^+$, ψ — непрерывна на $\overline{E}^+ \setminus \{(0, 0)\}$, и удовлетворяющих краевым условиям

$$\varphi(x, 0) + |x|\psi(x, 0) = \begin{cases} \omega_2(x), & \text{если } x < 0; \\ \omega_1(x), & \text{если } x > 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) + |x|\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) = \begin{cases} \omega_4(x), & \text{если } x < 0; \\ \omega_3(x), & \text{если } x > 0, \end{cases} \tag{8}$$

и условиям роста

$$|\varphi(x, y)| \le c(x^2 + y^2)^{\alpha/2}, \quad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{9}$$

$$|\psi(x, y)| \le c(x^2 + y^2)^{(\alpha-1)/2}, \quad x^2 + y^2 \to \infty, \tag{10}$$

$$|\psi(x, y)| \le c(x^2 + y^2)^{-\beta/2}, \quad x^2 + y^2 \to 0, \tag{11}$$

где $0 \le \alpha$, $\beta < 1$, постоянная c не зависит от x и y,

$$\begin{gathered} \varphi(X^2 - Y^2, 2XY) = \Phi(X, Y), \quad \psi(X^2 - Y^2, 2XY) = \Psi(X, Y), \\ \omega_1(X^2) = \Omega_1(X, 0), \quad \omega_2(-Y^2) = \Omega_1(0, Y), \\ \omega_3(X^2) = \Omega_2(X, 0), \quad \omega_4(-Y^2) = \Omega_2(0, Y). \end{gathered} \tag{12}$$

Задачу нахождения гармонических функций φ, ψ, удовлетворяющих условиям (7) – (11), назовем задачей II.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу нахождения гармонических в E^+ функций φ, ψ таких, что φ — непрерывна на $\overline{E}^+$, ψ — непрерывна на $\overline{E}^+ \setminus \{(0, 0)\}$, для которых при всех $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняются условия

$$\varphi(x, 0) + x\psi(x, 0) = S(x),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,0) + x\frac{\partial\psi}{\partial y}(x, 0) = T(x),$$

где S и T — заданные функции, свойства которых описываются ниже. Для φ и ψ будем полагать, что выполняются условия роста (9) – (11).

В дальнейшем будем обозначать множество $(\overline{E}^+ \setminus E^+) \setminus \{(0, 0)\}$ через $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, а область $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ — через E^+.

Пусть функция $u: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} |u(t) - u(x)| \le c|t - x|^{\alpha} \quad \forall\, t, \quad x \in (-\infty, -N] \cup [N, \infty), \\ |u(t) - u(x)| \le c\left|\frac{1}{t} - \frac{1}{x}\right|^{\alpha_0} \quad \forall\, t, \quad x \in [-N, N] \setminus \{0\}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $0 \le \alpha$, $\alpha_0 < 1$, N — некоторое положительное число, постоянная c не зависит от t и x. Тогда однозначно определяется гармоническая в E^+ функция $u(x, y)$ (решение задачи Дирихле), которая удовлетворяет условиям вида (9), (11), и такая, что

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0)\\(x,y)\in E^+}} u(x,y) = u(x_0) \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}; \tag{14}$$

при этом

$$u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi \quad \forall\,(x,y)\in E^+. \tag{15}$$

Функция $f_u(z) = u(x,y)+i\tilde{u}(x,y)$, $z = x+iy$, аналитическая в E^+ (решение задачи Шварца), удовлетворяющая условию (14) и условиям вида (9), (11), выражается равенством

$$f_u(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)(1+\xi z)}{(\xi^2+1)(\xi-z)}d\xi + ia \quad \forall\, z\in E^+, \tag{16}$$

где $a\in\mathbb{R}$. При этом

$$\tilde{u}(t) := \lim_{\substack{(x,y)\to(t,0)\\(x,y)\in E^+}} \tilde{u}(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)(1+\xi t)}{(\xi^2+1)(\xi-t)}d\xi + a,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(\xi)(1+\xi t)}{(\xi^2+1)(\xi-t)}d\xi = u(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{\xi^2+1}d\xi \quad \forall\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Здесь и в дальнейшем все сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Обозначим через H класс функций $u\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} u(x) = 0,$$

$$|u(t)-u(x)| \le c\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{x}\right|^{\alpha_\infty} \quad \forall\, t,\ \ x\in(-\infty,-N]\cup[N,\infty)$$

и условию (13), в которых $0\le\alpha_0$, $\alpha_\infty<1$, N — некоторое положительное число, а постоянная c не зависит от t и x.

Если $u\in H$, то решение задачи Шварца f_u, исчезающее в бесконечности и удовлетворяющее условию вида (11), выражается равенством

$$f_u(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi \quad \forall\, z\in E^+, \tag{17}$$

при этом

$$\tilde{u}(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi, \quad u(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{u}(\xi)}{\xi-t}d\xi \quad \forall\, t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Отметим, что поскольку гармоническая в E^+ функция u, непрерывно продолжимая на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и удовлетворяющая условиям вида (9), (11), однозначно восстанавливается по своим граничным значениям равенством (15), то всюду в дальнейшем при нахождении гармонических в E^+ функций мы ограничиваемся нахождением их предельных значений на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ввведем для функции $u\colon E \to \mathbb{R}$ модуль непрерывности $\omega_E(u(x), \varepsilon) :=$ $:= \sup\limits_{\substack{|t_1 - t_2| \le \varepsilon \\ t_1, t_2 \in E}} |u(t_1) - u(t_2)|$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция* $T\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ *дифференцируема, а непрерывная функция* $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема на* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *при этом* $S'(x), T(x) \in H$ *и для любого положительного числа* b *и любого отрезка* $I_b \subset \mathbb{R}$ *длины* b, *не содержащего* 0, *справедливы оценки*

$$\int_0^b \omega_{I_b}(S''(x), y)y^{-1}dy < c(I_b), \quad \int_0^b \omega_{I_b}(T'(x), y)y^{-1}dy < c(I_b),$$

где постоянная $c(I_b)$ *зависит только от отрезка* I_b.

Тогда рассматриваемая вспомогательная задача разрешима. Ее решение единственно и предельные значение на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *функций* φ, ψ *выражаются формулами*

$$\varphi(x, 0) = S(x) - x\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi)}{\xi - x}d\xi + S'(x)\right), \tag{18}$$

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi)}{\xi - x}d\xi + S'(x). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{\psi}$ — гармоническая в E^+ функция такая, что функция $f(z) = \tilde{\psi}(x, y) + i\psi(x, y)$, $z = x + iy$ — аналитическая в E^+.

Предположим, что $\tilde{\psi}$ непрерывно продолжается на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, удовлетворяет условиям вида (10), (11) и условию

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,0) \\ (x,y)\in E^+}} y\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial y}(x, y) = 0 \quad \forall\, x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{20}$$

Представляя φ, $\tilde{\psi}$ в виде

$$\varphi(x, y) = u(x, y) - y\tilde{\psi}(x, y) - x\psi(x, y), \tag{21}$$

$$\tilde{\psi}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) - v(x, y),$$

находим функции u и v как решения задач Дирихле:

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2}d\xi,$$

$$v(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2}d\xi.$$

Непосредственно убеждаемся, что условия вида (10), (11) для функции $\tilde{\psi}$ и условие (20) следуют из условий леммы. Тогда

$$\psi(x, y) = \mathrm{Im}\,\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\psi}(\xi)}{\xi - (x + iy)}d\xi \quad \forall\, (x, y) \in E^+ \tag{22}$$

и функция φ находится из (21). Равенства (18), (19) являются следствием равенств (21), (22) и граничных свойств интегралов (15), (17). Лемма доказана.

Замечание. Пусть при условиях леммы гармоническая в E^+, непрерывно продолжимая на $\mathbb{R}$ функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условию вида (9) и при этом такая, что функция $F(z) = \tilde{\varphi}(x, y) + i\varphi(x, y)$, $z = x + iy$, аналитическая в E^+. С учетом того, что $x\tilde{\psi}(x, y) - y\psi(x, y)$ и $x\psi(x, y) + y\tilde{\psi}(x, y)$ — компоненты аналитической в E^+ функции $(x + iy)(\tilde{\psi}(x, y) + i\psi(x, y))$, можно представить $\tilde{\varphi}$ в виде $\tilde{\varphi}(x, y) = \tilde{u}(x, y) - x\tilde{\psi}(x, y) + y\psi(x, y)$ $\forall (x, y) \in E^+$, где $\tilde{u}$ — вещественная компонента аналитической в E^+ функции $\tilde{u}(x, y) + iu(x, y)$. Предельные значения на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функций $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ выражаются равенствами

$$\tilde{\varphi}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S(\xi)(1 + \xi x)}{(\xi^2 + 1)(\xi - x)}d\xi + x\left(T(x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S'(\xi)}{\xi - x}d\xi\right) + a_0, \tag{23}$$

$$\tilde{\psi}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S'(\xi)}{\xi - x}d\xi - T(x), \tag{24}$$

где a_0 — некоторое вещественное число. Равенства (23), (24) являются следствием граничных свойств интегралов (15) – (17).

Примем обозначение $\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} := \begin{cases} f_1(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}_-; \\ f_2(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть функции* $\omega_1 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\omega_2 \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, *трижды дифференцируемы соответственно на* $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$, *а функции* $\omega_3 \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\omega_4 \colon \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ *— дважды дифференцируемы соответственно на* $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$.

Пусть выполняются условия:

1) *существуют конечные пределы* $\omega_1(0) := \lim\limits_{x \to 0+0} \omega_1(x)$, $\omega_2(0) := \lim\limits_{x \to 0-0} \omega_2(x)$ *и* $\omega_1(0) = \omega_2(0)$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \omega_1'(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \omega_2'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \omega_3(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \omega_4(x) = 0$;

3) $\begin{bmatrix} x\omega_2''(x) \\ x\omega_1''(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x\omega_4'(x) \\ x\omega_3'(x) \end{bmatrix} \in H$;

4) *для любого положительного числа* b *и любого отрезка* $I_b \subset \mathbb{R}$ *длины* b, *не содержащего* 0, *справедливы оценки*

$$\int_0^b \omega_{I_b}\left(\begin{bmatrix} \omega_2'''(x) \\ \omega_1'''(x) \end{bmatrix}, y\right)y^{-1}dy < c(I_b), \quad \int_0^b \omega_{I_b}\left(\begin{bmatrix} \omega_4''(x) \\ \omega_3''(x) \end{bmatrix}, y\right)y^{-1}dy < c(I_b),$$

где постоянная $c(I_b)$ *зависит только от отрезка* I_b.

Тогда функции φ, ψ, *предельные значения которых на* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *выражаются формулами*

$$\psi(x, 0) = -\frac{1}{|x|}\varphi(x, 0) + \frac{1}{|x|}\begin{cases} \omega_2(x), & \textit{если } x \in \mathbb{R}_-; \\ \omega_1(x), & \textit{если } x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{25}$$

$$\varphi(x,0) = \begin{cases} \omega_2(x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{|x|} \big(h_1(\xi) - h_2(\xi)\big)d\xi, & \text{если } x \in \mathbb{R}_-; \\ \omega_1(x) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x} \big(h_1(\xi) + h_2(\xi)\big)d\xi, & \text{если } x \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{26}$$

являются решением задачи II. *Здесь* h_1, h_2 — *функции класса* H *и решения уравнений*

$$h_1(x) + \int_0^\infty K(\xi,x)h_1(\xi)d\xi = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{\xi}\,\frac{1+\xi x+\xi-x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}\Omega_5(\xi)d\xi,$$

$$h_2(x) - \int_0^\infty K(\xi,x)h_2(\xi)d\xi = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{\xi}\,\frac{1+\xi x+\xi-x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}\Omega_6(\xi)d\xi \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+, \tag{27}$$

в которых

$$K(\xi,x) := \frac{2\sqrt{\xi x}}{\pi(\xi+x)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi\sqrt{x}}\,\frac{2\xi^3 - 2\sqrt{2}\xi^2\sqrt{\xi} + 4\sqrt{2}\xi\sqrt{\xi} - 6\xi + 2\sqrt{2}\sqrt{\xi}}{(\xi^2+1)^2},$$

$$\Omega_5(x) := \Omega_3(x) + \Omega_4(-x) + x\big(\Omega_3'(x) - \Omega_4'(-x)\big), \quad \Omega_6(x) := \Omega_3(x) -$$

$$- \Omega_4(-x) + x\big(\Omega_3'(x) + \Omega_4'(-x)\big), \quad \Omega_3 := \omega_3 - n_+^*, \quad \Omega_4 := \omega_4 - n_-^*,$$

$$\begin{bmatrix} n_-^*(x) \\ n_+^*(x) \end{bmatrix} := \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \omega_2'(\xi) \\ \omega_1'(\xi) \end{bmatrix} \frac{d\xi}{\xi - x}.$$

При дополнительном условии $\lim\limits_{x\to+\infty}\omega_1(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\omega_2(x) = 0$ *для того, чтобы выполнялись соотношения*

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty}\varphi(x,y) = \lim_{x^2+y^2\to\infty}\sqrt{x^2+y^2}\,\psi(x,y) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^\infty h_1(\xi)d\xi = \int_0^\infty h_2(\xi)d\xi = 0. \tag{28}$$

Доказательство. Очевидно, что для решения задачи II достаточно найти предельные значения на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функции φ. Предельные значения на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функции ψ выражаются тогда из условия (7) равенством (25).

Представим предельные значения на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ функции φ в виде

$$\varphi(x,0) = g(x) + \begin{bmatrix} \omega_2(x) \\ \omega_1(x) \end{bmatrix}$$

и будем искать функцию g. Из равенств (7), (8) для каждого $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ получаем

$$g(x) + |x|\psi(x,0) = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) + |x|\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,0) = \begin{bmatrix} \Omega_4(x) \\ \Omega_3(x) \end{bmatrix}, \tag{29}$$

где $g(x, y) := \dfrac{y}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi \quad \forall\, (x, y) \in E^+$.

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\text{задача III}_1: \begin{cases} g_1(x,0) + x\psi_1(x,0) = S_1(x), \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,0) + x\dfrac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,0) = T_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

$$\text{задача III}_2: \begin{cases} g_2(x,0) + x\psi_2(x,0) = S_2(x), \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,0) + x\dfrac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,0) = T_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

где

$$S_1(x) := \begin{bmatrix} 2g_-(x) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad S_2(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 2g_+(x) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$T_1(x) := \begin{bmatrix} 2f_-(x) - \Omega_4(x) \\ \Omega_3(x) \end{bmatrix}, \quad T_2(x) := \begin{bmatrix} \Omega_4(x) \\ 2f_+(x) - \Omega_3(x) \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$g_\pm(x) := g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_\pm,$$

$$f_\pm(x) := \frac{\partial g}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} g'_-(\xi) \\ g'_+(\xi) \end{bmatrix} \frac{d\xi}{\xi - x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_\pm. \tag{32}$$

Задача (29) эквивалентна задачам III_1, III_2 в том смысле, что решение g, ψ задачи (29) по формулам

$$\begin{gathered} g_1(x, y) = g_2(x, y) = g(x, y), \\ \psi_1(x, y) = -\psi_2(x, y) = \psi(x, y) \end{gathered} \tag{33}$$

порождает решение g_1, ψ_1 и g_2, ψ_2 задач III_1, III_2, и наоборот, решения g_1, ψ_1 и g_2, ψ_2 задач III_1, III_2, связанные между собой соотношениями (33), этими же равенствами порождают решение g, ψ задачи (29).

Предположим, что функции S_1, S_2 удовлетворяют условиям, наложенным в лемме на функцию S, а T_1, T_2 — на функцию T. Тогда решения задач III_1, III_2 выражаются равенствами вида (18), (19).

Так как функции ψ_1, ψ_2 и им сопряженные гармонические функции $\tilde\psi_1$, $\tilde\psi_2$ вида (24) исчезают в бесконечности, то соотношения $\psi_1(x, 0) = -\psi_2(x, 0)$ $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и

$$\tilde\psi_1(x, 0) = -\tilde\psi_2(x, 0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{34}$$

являются эквивалентными.

Из равенства

$$g_1(x, 0) = g_2(x, 0) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \tag{35}$$

следует, что сопряженные к g_1, g_2 гармонические функции $\tilde g_1$, $\tilde g_2$ связаны соотношением

$$\tilde g_1(x, 0) = \tilde g_2(x, 0) + a \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{36}$$

где a — некоторое вещественное число. Обратно, если выполнено соотношение (36), то, учитывая, что $g_1(0, 0) = g_2(0, 0) = 0$, получаем равенство (35).

Таким образом, система (33) эквивалентна системе соотношений (34), (36), или в развернутом виде

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_1'(\xi)+S_2'(\xi)}{\xi-x}d\xi = T_1(x)+T_2(x),\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(S_2(\xi)-S_1(\xi))(1+\xi x)}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi - \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_2'(\xi)-S_1'(\xi)}{\xi-x}d\xi = x\big(T_1(x)-T_2(x)\big)+a.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Преобразуем систему (37) к виду

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(S_2(\xi)-S_1(\xi))(1+\xi x)}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi + x\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_1'(\xi)}{\xi-x}d\xi = 2xT_1(x)+a,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(S_2(\xi)-S_1(\xi))(1+\xi x)}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi - x\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_2'(\xi)}{\xi-x}d\xi = -2xT_2(x)+a.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Подставляя (30), (31) в (38), имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-(\xi)\\ g_+(\xi)\end{bmatrix}\frac{1+\xi x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi + \frac{2x}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{g_-'(\xi)}{\xi-x}d\xi = x\begin{bmatrix}-\Omega_4(x)+2f_-(x)\\ \Omega_3(x)\end{bmatrix}+a,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-(\xi)\\ g_+(\xi)\end{bmatrix}\frac{1+\xi x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi - \frac{2x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{g_+'(\xi)}{\xi-x}d\xi = -x\begin{bmatrix}\Omega_4(x)\\ -\Omega_3(x)+2f_+(x)\end{bmatrix}+a.
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Подставляя выражения $f_+(x)$ и $f_-(x)$, определенные формулой (32), в систему (39), получаем следующее парное уравнение:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-(\xi)\\ g_+(\xi)\end{bmatrix}\frac{1+\xi x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi - \frac{2x}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{g_+'(\xi)}{\xi-x}d\xi = -x\Omega_4(x)+a \quad \forall x\in\mathbb{R}_-,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-(\xi)\\ g_+(\xi)\end{bmatrix}\frac{1+\xi x}{(\xi^2+1)(\xi-x)}d\xi + \frac{2x}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{g_-'(\xi)}{\xi-x}d\xi = x\Omega_3(x)+a \quad \forall x\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
\tag{40}
$$

В работе [3] исследуемая бигармоническая задача сведена к парному интегральному уравнению при более жестких краевых условиях.

Продифференцировав уравнение (40), имеем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-'(\xi)\\ g_+'(\xi)\end{bmatrix}\frac{d\xi}{\xi-x} - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\xi g_+'(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = \Omega_4(x)-x\Omega_4'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}_-,\\
&\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}-g_-'(\xi)\\ g_+'(\xi)\end{bmatrix}\frac{d\xi}{\xi-x} + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\xi g_-'(\xi)}{(\xi-x)^2}d\xi = \Omega_3(x)+x\Omega_3'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Обозначая $g_1(x):=g_+(x)$, $g_2(x):=g_-(-x)$ $\forall x\in\mathbb{R}_+$, получаем из уравнения (41) систему сингулярных интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{g_2'(\xi)}{\xi-x}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(\xi-x)g_1'(\xi)}{(\xi+x)^2}d\xi = \Omega_4(-x)-x\Omega_4'(-x),\\
&\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{g_1'(\xi)}{\xi-x}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{(\xi-x)g_2'(\xi)}{(\xi+x)^2}d\xi = \Omega_3(x)+x\Omega_3'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}_+.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

И теперь, полагая $h_1 := g_1' + g_2'$, $h_2 := g_1' - g_2'$, из системы (42) получаем

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{h_1(\xi)}{\xi - x}d\xi = \Omega_5(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\xi - x)h_1(\xi)}{(\xi + x)^2}d\xi, \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{h_2(\xi)}{\xi - x}d\xi = \Omega_6(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{(\xi - x)h_2(\xi)}{(\xi + x)^2}d\xi \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.\end{gathered} \tag{43}$$

Обратив сингулярные интегралы в системе (43), будем иметь

$$\begin{gathered}h_1(x) - \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{t}\frac{1+tx}{(t^2+1)(t-x)}\int_0^\infty \frac{(\xi - t)h_1(\xi)}{(\xi + t)^2}d\xi dt - \\ - \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\int_0^\infty \frac{(\xi - t)h_1(\xi)}{(\xi + t)^2}d\xi dt = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{t}\frac{1+tx+t-x}{(t^2+1)(t-x)}\Omega_5(t)dt, \\ h_2(x) + \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{t}\frac{1+tx}{(t^2+1)(t-x)}\int_0^\infty \frac{(\xi - t)h_2(\xi)}{(\xi + t)^2}d\xi dt + \\ + \frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1}\int_0^\infty \frac{(\xi - t)h_2(\xi)}{(\xi + t)^2}d\xi dt = \\ = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{x}}\int_0^\infty \sqrt{t}\frac{1+tx+t-x}{(t^2+1)(t-x)}\Omega_6(t)dt \quad \forall\, x \in \mathbb{R}_+.\end{gathered} \tag{44}$$

Меняя порядок интегрирования в повторных интегралах системы (44), приходим к системе несингулярных интегральных уравнений (27).

Если h_1, h_2 — решения уравнений (27), то

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{|x|}(h_1(\xi) - h_2(\xi))d\xi & \forall x \in \mathbb{R}_-; \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{x}(h_1(\xi) + h_2(\xi))d\xi & \forall x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Для завершения доказательства теоремы необходимо убедиться в том, что функции (30) удовлетворяют условиям, наложенным в лемме на функцию S, а функции (31) — на функцию T. При условии, что решения уравнений (27) h_1, $h_2 \in H$, последнее легко достигается путем непосредственной проверки, а именно — подстановкой найденной функции $g(x)$ в равенства (30), (31). Теорема доказана.

В завершение рассмотрим вопрос о соответствии классов граничных функций в задачах I и II.

Примем обозначения: $Z := (X, Y) \in \partial K$, $|Z_1 - Z_2| := \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$, где $Z_1 := (X_1, Y_1) \in \partial K$, $Z_2 := (X_2, Y_2) \in \partial K$. Контурные производные функций $\Omega_1 \colon \partial K \to \mathbb{R}$, $\Omega_2 \colon \partial K \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ вдоль границы квадранта ∂K обозначим через $\Omega_1'(Z)$, $\Omega_2'(Z)$, $\Omega_1''(Z)$ и т. д. Легко установить: для того чтобы функции ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, определяемые равенствами (12), удовлетворяли условиям 1 – 4 теоремы, необходимо и достаточно, чтобы на $\partial K \setminus \{(0, 0)\}$ непрерывная функция $\Omega_1 \colon \partial K \to \mathbb{R}$ имела контурные производные до третьего порядка, а функция $\Omega_2 : \partial K \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ — контурные производные до второго порядка включительно и выполнялись условия:

1) $$\lim_{\substack{|Z|\to\infty \\ Z\in\partial K}} \frac{\Omega_1'(Z)}{|Z|} = \lim_{\substack{|Z|\to\infty \\ Z\in\partial K}} \Omega_2(Z) = \lim_{\substack{|Z|\to\infty \\ Z\in\partial K}} \Omega_1''(Z) = \lim_{\substack{|Z|\to\infty \\ Z\in\partial K}} \Omega_2'(Z) = 0;$$

2) $$\left|\Omega_1''(Z_1) - \Omega_1''(Z_2)\right| \le \frac{c}{|Z_1|^{\alpha_1}} \frac{|Z_1 - Z_2|^{\alpha_1}}{|Z_1|^{\alpha_1} |Z_2|^{\alpha_1}} \quad \forall\, Z_1, Z_2 \in \partial K : N \le |Z_1| \le |Z_2|,$$

$$\left|\Omega_1''(Z_1) - \Omega_1''(Z_2)\right| \le \frac{c}{|Z_1|^{\beta_1}} \frac{|Z_1 - Z_2|^{\beta_1}}{|Z_1|^{\beta_1} |Z_2|^{\beta_1}}$$

$$\forall\, Z_1, Z_2 \in \partial K :\ 0 \le |Z_1| \le |Z_2| \le N,$$

$$\left|\Omega_2'(Z_1) - \Omega_2'(Z_2)\right| \le \frac{c}{|Z_1|^{1+\alpha_2}} \frac{|Z_1 - Z_2|^{\alpha_2}}{|Z_1|^{\alpha_2} |Z_2|^{\alpha_2}}$$

$$\forall\, Z_1, Z_2 \in \partial K : N \le |Z_1| \le |Z_2|,$$

$$\left|\Omega_2'(Z_1) - \Omega_2'(Z_2)\right| \le \frac{c}{|Z_1|^{1+\beta_2}} \frac{|Z_1 - Z_2|^{\beta_2}}{|Z_1|^{\beta_2} |Z_2|^{\beta_2}}$$

$$\forall\, Z_1, Z_2 \in \partial K :\ 0 \le |Z_1| \le |Z_2| \le N,$$

где $0 \le \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 < 1$, N — некоторое положительное число и постоянная c не зависит от Z_1, Z_2;

3) для любого положительного числа b и любого отрезка $L_b \subset \partial K$ длины b, не содержащего точки $(0,0)$, справедливы неравенства

$$\int_0^b \omega_{L_b}\big(\Omega_1'''(Z), y\big)\, y^{-1} dy < c(L_b), \qquad \int_0^b \omega_{L_b}\big(\Omega_2''(Z), y\big)\, y^{-1} dy < c(L_b),$$

где постоянная $c(L_b)$ зависит только от отрезка L_b.

Сравнивая выписанные условия на функции Ω_1 и Ω_2 с условиями 1 – 4 теоремы и пользуясь соотношениями (12), легко проверить их эквивалентность.

При выписанных условиях на функции Ω_1 и Ω_2 решение $W(X, Y)$ задачи I строится (с учетом равенств (3) и (12)) указанным в теореме способом из решения полученной системы несингулярных интегральных уравнений (27). При дополнительном условии $\lim_{|Z|\to\infty} \Omega_1(Z) = 0$ таким же способом из решения системы уравнений (27), (28) получим решение $W(X, Y)$ задачи I, обращающееся в нуль на бесконечности вместе с функцией Φ из равенства (3).

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.
2. *Магнарадзе Л. Г.* Основные задачи плоской теории упругости для контуров с угловыми точками // Тр. Тбилис. мат.ин-та. – 1938. – 4. – С. 43 – 76.
3. *Мельниченко И. П.* Об одной обобщенной задаче Гильберта // Комплексные методы в математической физике. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1984. – С. 27.

Получено 14. 11. 94