УДК 517.949.8

Ю. А. Митропольский, акад. (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. Х. Шхануков, д-р физ.-мат. наук (Кабардино-Балк. ун-т, НИИ ПМА),
А. А. Березовский, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

A nonlocal boundary-value problem for a parabolic equation in a two-dimensional domain is studied. An a priori estimate with respect to the energy norm is obtained. Existence and uniqueness of a generalized solution, which belongs to the class $W_2^{1,0}(Q_T)$, is proved. A difference scheme for the second-order approximation is constructed.

Вивчена нелокальна задача для параболічного рівняння у двовимірній області. Одержано апріорну оцінку в енергетичній нормі, доведені існування і єдиність узагальненого розв'язку із класу $W_2^{1,0}(Q_T)$, побудована різницева схема другого порядку апроксимації.

1. В области $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = \{(r, \varphi)\colon\ r_1 < r < r_2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + f(r, \varphi, t), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \beta_1(r_1, \varphi, t)u + \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, u(r_1, \psi, t)\, d\psi + \mu_1, \\ -\frac{\partial u}{\partial r} &= \beta_2(r_2, \varphi, t)u + \mu_2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), \quad u(r, \varphi, t) = u(r, \varphi + 2\pi, t), \tag{3}$$

где $R(\varphi, \psi)$ — резольвента ядра интегрального уравнения лучистого теплообмена, которая представляется в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда [1]; r_1, r_2, r и t — безразмерные величины.

Нелокальные задачи вида (1) – (3) возникают при изучении теплового режима в теплопроводящем полом цилиндре $\{ r_1 \le r \le r_2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < \infty \}$ с теплоизлучающими серыми однородными поверхностями $\{ r = r_1 \}$, $\{ r = r_2 \}$.

Предположим, что регулярное решение задачи (1) – (3) существует. Тогда с учетом граничных условий (2), (3) получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(1, ru^2\right) + \left(ru_r^2, 1\right) + \\ &+ \int_0^{2\pi} r_2\beta_2\, u^2(r_2, \varphi, t)\, d\varphi + \int_0^{2\pi} r_1\beta_1\, u^2(r_1, \varphi, t)\, d\varphi + \\ &+ \int_0^{2\pi} r_1\, u(r_1, \varphi, t)\left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, u(r_1, \psi, t)\, d\psi\right) d\varphi + \left(\frac{1}{r}, u_\varphi^2\right) \\ &= (f, ru) + \int_0^{2\pi} r_2\, u(r_2, \varphi, t)\,\mu_2(\varphi, t)\, d\varphi + \int_0^{2\pi} r_1\, u(r_1, \varphi, t)\,\mu_1(\quad \varphi. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} r_2\, u(r_2, \varphi, t)\, \mu_2\, d\varphi \le$$

$$\le \varepsilon \frac{r_2}{2r_1} \|\sqrt{r}\, u_r\|^2_{2,\Omega} + C_\varepsilon \frac{r_2}{2r_1} \|\sqrt{r}\, u_r\|^2_{2,\Omega} + \frac{r_2}{2} \int_0^{2\pi} \mu_2^2\, d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} r_1\, u(r_1, \varphi, t)\, \mu_1\, d\varphi \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2} \|\sqrt{r}\, u_r\|^2_{2,\Omega} + C_\varepsilon \|\sqrt{r}\, u_r\|^2_{2,\Omega} + \frac{r_1}{2} \int_0^{2\pi} \mu_1^2\, d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi} r_1\, u(r_1, \varphi, t) \int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\, u(r_1, \psi, t)\, d\psi\, d\varphi \le M \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{r_1}\, \left| u(r_1, \varphi, t) \right| d\varphi \right)^2 \le$$

$$\le 2\pi M \left(\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \left(\sqrt{r}\, u_r \right)^2 dr\, d\varphi + C_\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} r u^2 dr\, d\varphi \right) =$$

$$= 2\pi M \varepsilon \left\| \sqrt{r}\, u_r \right\|^2_{2,\Omega} + 2\pi M C_\varepsilon \left\| \sqrt{r}\, u_r \right\|^2_{2,\Omega},$$

где $M = \sup |R|$, $\varepsilon > 0$, $C_\varepsilon > 0$ — некоторые постоянные числа, $\|u\|^2_{2,\Omega} = \int_\Omega u^2\, dr\, d\varphi$, то из (4) при малом $\varepsilon > 0$ находим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \|\sqrt{r}\, u\|^2_{2,\Omega} + \nu \|\sqrt{r}\, u\|^2_{2,\Omega} + \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} u_\varphi \right\|^2_{2,\Omega} \le$$

$$\le \frac{1}{2} \|\sqrt{r}\, f\|^2_{2,\Omega} + M_1 \|\sqrt{r}\, u\|^2_{2,\Omega} + \frac{r_1}{2} \int_0^{2\pi} \mu_1^2\, d\varphi + \frac{r_2}{2} \int_0^{2\pi} \mu_2^2\, d\varphi,$$

$$\nu = 1 - \left(2\pi M + \frac{1}{2} + \frac{r_2}{2r_1} \right) \cdot \varepsilon > 0,$$

$$M_1 = \frac{1}{2} + C_\varepsilon \left(2\pi M + \frac{1}{2} + \frac{r_2}{2r_1} \right).$$

Проинтегрировав последнее неравенство по τ от 0 до t, получим

$$\|\sqrt{r}\, u\|^2_{2,\Omega} + 2\nu \|\sqrt{r}\, u_r\|^2_{2,Q_t} + 2 \left\| \frac{1}{\sqrt{r}} u_\varphi \right\|^2_{2,Q_t} \le$$

$$\le \|\sqrt{r}\, f\|^2_{2,Q_t} + 2M_1(\varepsilon) \int_0^t \|\sqrt{r}\, u\|^2_{2,\Omega} d\tau +$$

$$+ r_1 \int_0^t \int_0^{2\pi} \mu_1^2\, d\varphi\, d\tau + r_2 \int_0^t \mu_2^2\, d\varphi\, d\tau + \|\sqrt{r}\, u_0(r, \varphi)\|^2_{2,\Omega}, \qquad (5)$$

где

$$\|u\|^2_{2,Q_t} = \int_0^t \|u\|^2_{2,\Omega} d\tau .$$

Из неравенства (5) находим

$$\|\sqrt{r}\,u\|^2_{2,\Omega} \le F(t) + 2M_1(\varepsilon)\int_0^t \|\sqrt{r}\,u\|^2_{2,\Omega} d\tau ,$$

$$F(t) \le \|\sqrt{r}\,f\|^2_{2,\Omega} + r_1 \int_0^t \int_0^{2\pi} \mu_1^2 \, d\varphi \, d\tau + r_2 \int_0^t \int_0^{2\pi} \mu_2^2 \, d\varphi \, d\tau .$$

Тогда на основании известной леммы [2] получаем

$$\int_0^t \|\sqrt{r}\,u\|^2_{2,\Omega} d\tau \le e^{2M_1(\varepsilon)t} \cdot t F(t) = M_2(\varepsilon, t) F(t). \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), находим требуемую априорную оценку

$$\|\sqrt{r}\,u\|^2_{2,\Omega} + \|\sqrt{r}\,u_r\|^2_{2,Q_t} + \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\,u_\varphi\right\|^2_{2,Q_t} \le$$

$$\le M(\varepsilon, t)\left(\|\sqrt{r}\,f\|^2_{2,Q_t} + \|\sqrt{r}\,u_0(r,\varphi)\|^2_{2,\Omega} + \int_0^t \int_0^{2\pi} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2\right) d\varphi \, d\tau \right). \tag{7}$$

Опуская громоздкие вычисления, отметим справедливость оценки в „энергетической" норме

$$|u|_{Q_t} \le M\left(\|\sqrt{r}\,f\|_{2,Q_t} + \|\sqrt{r}\,u(r,\varphi,0)\|_{2,\Omega} \right), \tag{8}$$

где

$$|u|_{Q_T} = \max_{0 \le t \le T} \|\sqrt{r}\,u\|_{2,\Omega} + \|\sqrt{r}\,u_r\|_{2,Q_T} + \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\,u_\varphi\right\|_{2,Q_T} .$$

Здесь мы сделали несущественные упрощения, положив $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Очевидно, что из оценок (7) или (8) следует единственность решения рассматриваемой нелокальной задачи в классе гладких коэффициентов.

2. Пусть теперь $f \in L_{2,1,Q_T}$, $u_0(r,\varphi) \in L_2(\Omega)$,

$$|\beta_\alpha|, \left|\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial t}\right| \le C, \ \alpha = 1, 2; \quad \|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u|^q \, dr \, d\varphi \right)^{r/q} dt \right)^{1/r},$$

$W_2^{1,0}(Q_T)$ — гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u,v)_{W_2^{1,0}(Q_T)} = \int_{Q_T} \left(ruv + r u_r \cdot v_r + \frac{1}{r} u_\varphi \cdot v_\varphi \right) dr \, d\varphi \, dt ,$$

$V_2(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $W_2^{1,0}(Q_T)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{Q_T} \le \operatorname{vrai}\max_{0 \le t \le T} \|\sqrt{r}\,u\|_{2,\Omega} + \|\sqrt{r}\,u_r\|_{2,\Omega_T} + \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\,u_\varphi\right\|_{2,\Omega_T} ,$$

$V_2^{1,0}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех элементов $V_2(Q_T)$, непрерывных по t в норме $L_2(\Omega)$, с нормой

$$|u|_{Q_T} = \max_{0 \le t \le T} \left\|\sqrt{r}\, u\right\|_{2,\Omega} + \left\|\sqrt{r}\, u_r\right\|_{2,Q_T} + \left\|\frac{1}{\sqrt{r}}\, u_\varphi\right\|_{2,Q_T}.$$

Обобщенным решением задачи (1) – (3) из класса $W_2^{1,0}(Q_T)$ назовем функцию $u(r,\varphi,t) \in W_2^{1,0}(Q_T)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_{Q_T} \left(-ru\eta_t + ru_r\eta_r + \frac{1}{r}u_\varphi\eta_\varphi\right) dr\,d\varphi\,dt + \int_0^T \int_0^{2\pi} r_2\beta_2\, u(r_2,\varphi,t)\,\eta\, d\varphi\,dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^{2\pi} r_1\beta_1\, u(r_1,\varphi,t)\,\eta\, d\varphi\,dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\int_0^{2\pi} R(\varphi,\psi)\, u(r_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi\,dt =$$

$$= \int_{Q_T} r f \eta\, dr\,d\varphi\,dt + \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} r\, u(r,\varphi,0)\,\eta(r,\varphi,0)\, dr\,d\varphi \tag{9}$$

при любой $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$.

Для доказательства разрешимости задачи (1)–(3) возьмем фундаментальную систему $\psi_k(r,\varphi)$ из $W_2^1(\Omega)$, $k = 1, 2, \ldots$, и будем искать приближенное решение в виде

$$u^N(r,\varphi,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)\,\psi_k(r,\varphi), \quad C_k^N(t) = (u^N, \psi_k),$$

где $C_k^N(t)$ определяются из условий

$$\left(u_t^N, \psi_l\right) + \int_\Omega r u_r^N \psi_{lr}\, dr\,d\varphi + \sum_{\alpha=1}^{2} \int_0^{2\pi} r_\alpha\beta_\alpha u^N\left(r_\alpha,\varphi,t\right)\psi_l\left(r_\alpha,\varphi\right) d\varphi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} r_1\,\psi_l(r_1,\varphi)\left(\int_0^{2\pi} R(\varphi,\psi)\, u^N(R_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi +$$

$$+ \int_\Omega \frac{1}{r} u_\varphi^N \psi_{l\varphi}\, dr\,d\varphi = (f, \psi_l), \quad l = 1, 2, \ldots, N,$$

$$C_k^N(0) = (u_0, \psi_k), \quad (u, v) = \int_\Omega r u v\, d\Omega,$$

представляющих собой задачу Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для u^N справедлива оценка (8), откуда следует $|u^N|_{Q_T} \le C$, где C не зависит от N. Благодаря этой оценке из последовательности $\{u^N\}$ можно выделить подпоследовательность $\{u^{N_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$, слабо сходящуюся в $L_2(Q_T)$ вместе с производными $u_r^{N_k}$, $u_\varphi^{N_k}$ к некоторому элементу $u \in \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Этот элемент и есть обобщенное решение задачи (1) – (3). Последнее обосновывается почти так же, как и для классических краевых условий. Для обоснования возможности предельного перехода в выражении

$$\int_0^T \int_0^{2\pi} r_1 \Phi(r_1, \varphi, t) \left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi) u^N(r_1, \psi, t) d\psi \right) d\varphi dt,$$

где

$$\Phi(r, \varphi, t) = \sum_{l=1}^{N} d_l(t) \psi_l(r, \varphi),$$

$d_l(t)$ — абсолютно непрерывная функция $d_l'(t) \in L_2(0, T)$, $d_l(T) = 0$, необходимо воспользоваться представлением резольвенты

$$R(\varphi, \psi) = (2\pi\varepsilon_1)^{-1} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(4n^2 - \varepsilon_1\right)^{-1} \cos n(\varphi - \psi),$$

$\varepsilon_1 > 0$ — постоянная величина.

Теорема 1. *Обобщенное решение задачи* (1)–(3) *единственно.* .

Доказательство теоремы будем проводить по схеме, предложенной в [2, 3]. Пусть задача (1)–(3) имеет два обобщенных решения $u_1, u_2 \in W_2^{1,0}(Q_T)$. Тогда $u = u_1 - u_2 \in W_2^{1,0}(Q_T)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{Q_T} \left(-ru\eta_t + ru_r\eta_t + \frac{1}{r} u_\varphi \eta_\varphi \right) dr d\varphi dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^{2\pi} r_2 \beta_2 u(r_2, \varphi, t) \eta(r_2, \varphi, t) d\varphi dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^{2\pi} r_1 \beta_1 u(r_1, \varphi, t) \eta(r_1, \varphi, t) d\varphi dt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^{2\pi} r_1 \eta(r_1, \varphi, t) \left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi) u(r_1, \psi, t) d\psi \right) d\varphi dt = 0 \qquad (10)$$

при любой $\eta \in W_2^{1,1}(Q_T)$, равной нулю при $t = T$.

Возьмем в качестве $\eta(r, \varphi, t)$ функцию

$$\eta(r, \varphi, t) = \begin{cases} 0, & t \in [b, T]; \\ \int_b^t u(r, \varphi, \tau) d\tau, & t \in [0, b], \end{cases}$$

где $b \in (0, T)$. Нетрудно проверить, что она является допустимой для (10). Так как $u = \eta_t$ $\forall\, t \in (0, b)$, то (10) можно переписать иначе:

$$\int_{Q_b} \left(-r\eta_t^2 + r\eta_{tr}\eta_r + \frac{1}{r} \eta_{t\varphi} \eta_\varphi \right) d\Omega dt +$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{2} \int_0^b \int_0^{2\pi} r_\alpha \beta_\alpha \eta_t(r_\alpha, \varphi, t) \eta(r_\alpha, \varphi, t) d\varphi dt +$$

$$+ \int_0^b \int_0^{2\pi} r_1 \eta(r_1, \varphi, t) \left(\int_0^{2\pi} R(\varphi, \psi) \eta_t(r_1, \psi, t) d\psi \right) d\varphi dt = 0. \qquad (11)$$

Запишем $\eta_{tr}\eta_r$, $\eta_{t\varphi}\eta_\varphi$, $\beta\eta_t(r_\alpha,\varphi,t)\eta(r_\alpha,\varphi,t)$ в виде

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\eta_r^2, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\eta_\varphi^2,$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\beta_\alpha\eta^2(r_\alpha,\varphi,t)\right) - \frac{\partial\beta_\alpha}{\partial t}\eta^2(r_\alpha,\varphi,t)\right], \quad \alpha = 1, 2.$$

Тогда тождество (11) примет вид

$$\int\limits_{Q_b} r\eta_t^2\, d\Omega\, dt + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} r\eta_r^2(r,\varphi,0)\, d\Omega + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\frac{1}{r}\eta_\varphi^2(r,\varphi,0)\, d\Omega +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{2\pi} r_\alpha\beta_\alpha\eta^2(r_\alpha,\varphi,0)\, d\varphi + \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_\alpha\frac{\partial\beta_\alpha}{\partial t}\eta^2(r_\alpha,\varphi,t)\, d\varphi\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\int\limits_0^{2\pi} R(\varphi,\psi)\,\eta_t(r_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi\, dt. \tag{12}$$

Оценим последовательно суммы, входящие в тождество (12):

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{2\pi} r_\alpha\beta_\alpha\eta^2(r_\alpha,\varphi,0)\, d\varphi \le \frac{\varepsilon}{2}\, C\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\int\limits_{\Omega} r\eta_r^2(r,\varphi,0)\, d\Omega +$$

$$+ \frac{b}{2}\, C\, C_\varepsilon\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\int\limits_{Q_b} r\eta_r^2(r,\varphi,t)\, d\Omega\, dt, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_\alpha\frac{\partial\beta_\alpha}{\partial t}\eta^2(r_\alpha,\varphi,t)\, d\varphi\, dt \le \frac{1}{2}\, C\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\int\limits_{Q_b} r\eta_r^2(r,\varphi,t)\, d\Omega\, dt +$$

$$+ \frac{b^2}{2}\, C\, C_\varepsilon\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right)\int\limits_{Q_b} r\eta_t^2(r,\varphi,t)\, d\Omega\, dt. \tag{14}$$

При получении последних оценок мы воспользовались неравенством

$$\int\limits_{\Omega} r\eta^2(r,\varphi,t)\, d\Omega \le b\int\limits_{Q_b} r\eta_t^2(r,\varphi,t)\, d\Omega\, dt,$$

неравенством Коши с $\varepsilon > 0$ и неравенством (6.24) из [2].

Перейдем к оценке интеграла, связанной с нелокальным условием (2). Для этого подставим выражение для резольвенты $R(\varphi,\psi)$ в правую часть (12). Тогда получим

$$\int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\int\limits_0^{2\pi} R(\varphi,\psi)\,\eta_t(r_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\int\limits_0^{2\pi}\eta_t(r_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi\, dt -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{b}\int\limits_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-\varepsilon_1}\int\limits_0^{2\pi}\cos n\varphi\cdot\cos n\psi\;\eta_t(r_1,\psi,t)\, d\psi\right) d\varphi\, dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^b\int_0^{2\pi} r_1\,\eta(r_1,\varphi,t)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-\varepsilon_1}\int_0^{2\pi}\sin n\varphi\sin n\psi\,\eta_t(r_1,\psi,t)\,d\psi\right)d\varphi\,dt =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Интегралы I_1, I_2 оцениваются так:

$$I_1 \le 2\pi\varepsilon\int_{\Omega} r\eta_r^2(r,\varphi,0)\,d\Omega + 2\pi C_\varepsilon\cdot b\int_{Q_b}\eta_t^2(2,\varphi,t)\,d\Omega dt, \tag{15}$$

$$I_2 \le M_1\varepsilon\int_{\Omega} r\eta_r^2(r,\varphi,0)\,d\Omega + M_1 C_\varepsilon b\int_{Q_b} r\eta_t^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt, \tag{16}$$

где

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-\varepsilon_1} \le M_1.$$

Интеграл I_3 оценивается аналогично.

Подставляя неравенства (13) – (16) в тождество (12) и выбирая $\varepsilon>0$, $b>0$ столь малыми, что $1-bC_\varepsilon M_1>0$, $1-\varepsilon M_1>0$, находим

$$\int_{Q_b} r\eta_t^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt + \int_{\Omega} r\eta_r^2(r,\varphi,0)\,d\Omega + \int_{\Omega}\frac{1}{r}\eta_\varphi^2(r,\varphi,0)\,d\Omega \le$$

$$\le M\left(\int_{Q_b} r\eta_r^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt + \int_{Q_b}\frac{1}{r}\eta_\varphi^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt\right), \tag{17}$$

где M — некоторая постоянная.

Введем обозначение

$$y(r,\varphi,t) = \int_0^t u(r,\varphi,\tau)\,dr.$$

Тогда

$$y(r,\varphi,t) - y(r,\varphi,b) = \eta(r,\varphi,t) \quad \forall\, t\in[0,b].$$

Подставим это выражение в (17), отбросив пока первый член в (17). В результате получим

$$\int_{\Omega} r y_r^2(r,\varphi,b)\,d\Omega + \int_{\Omega}\frac{1}{r}y_\varphi^2(r,\varphi,b)\,d\Omega \le$$

$$\le 2M\left(\int_{Q_b} r y_r^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt + \int_{Q_b}\frac{1}{r}y_\varphi^2(r,\varphi,t)\,d\Omega dt + \right.$$

$$\left. + b\int_{\Omega} r y_r^2(r,\varphi,b)\,d\Omega + b\int_{\Omega}\frac{1}{r}y_\varphi^2(r,\varphi,b)\,d\Omega\right).$$

Если $b<1/2M$, то отсюда получаем неравенство

$$\int_{\Omega} r y_r^2(r,\varphi,b)\,d\Omega + \int_{\Omega}\frac{1}{r}y_\varphi^2(r,\varphi,b)\,d\Omega \le$$

$$\leq M_2 \left(\int\limits_{Q_b} r y_r^2(r, \varphi, t)\, d\Omega dt + \int\limits_{Q_b} \frac{1}{r} y_\varphi^2(r, \varphi, t)\, d\Omega dt \right), \tag{18}$$

$$M_2 = 2M/(1-2Mb).$$

Последнее неравенство верно при всех $b \in [0, b_1]$, $b_1 = \min\{1/2M, 1/C_\varepsilon M_1\}$.

Так как $y_r(r, \varphi, 0) = y_\varphi(r, \varphi, 0) = 0$, то из (18) следует (см. лемму 1.1 [2])

$$y_r(r, \varphi, b) = y_\varphi(r, \varphi, b) = 0 \quad \forall\, b \in [0, b_1].$$

Тогда

$$\eta_r(r, \varphi, t) = y_r(r, \varphi, t) - y_r(r, \varphi, b) = 0,$$

$$\eta_\varphi(r, \varphi, t) = y_\varphi(r, \varphi, t) - y_\varphi(r, \varphi, b) = 0 \quad \forall\, t \in [0, b_1].$$

Отсюда и из неравенства (17) заключаем, что

$$\eta_r(r, \varphi, t) = u(r, \varphi, t) = 0 \quad \forall\, t \in [0, b_1].$$

Тем самым доказано совпадение u_1 и u_2 в цилиндре $Q_{b\,1} = \Omega \times [0, b_1]$.

Повторяя это рассуждение для цилиндров $\Omega \times [b_1, 2b_1]$, $\Omega \times [2b_1, 3b_1], \ldots$, мы исчерпаем весь цилиндр Q_T.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты уравнения и граничных условий удовлетворяют условиям*

$$f \in L_{2,1,Q_T}, \quad u_0(r, \varphi) \in L_2(\Omega), \quad |\beta_\alpha|, \left|\frac{\partial \beta_\alpha}{\partial t}\right| \leq C,$$

где C — некоторая постоянная.

Тогда задача (1) – (3) *имеет единственное обобщенное решение из класса* $W_2^{1,0}(Q_T)$.

3. В области Q_T введем сетку $\omega = \omega_r \times \omega_\varphi \times \omega_t$, где

$$\overline{\omega}_r \equiv \{ r_i = i h_r :\ i = 0, 1, \ldots, N \}, \quad \overline{\omega}_\varphi \equiv \{ \varphi_m = m h_\varphi :\ m = 0, 1, \ldots, M \},$$

$$N h_r = r_2 - r_1, \quad h_\varphi = 2\pi/M, \quad \omega_t = \{ t_j = j\tau :\ j = 0, 1, \ldots, j_0 \}, \quad \tau = T/j_0.$$

Дифференциальной задаче (1) – (3) поставим в соответствие разностную задачу [4]

$$y_t = 0{,}5\, \overline{\Lambda}(\hat{y} + y) + F, \tag{19}$$

$$\overline{\Lambda} y = \overline{\Lambda}_r y + \Lambda_\varphi y, \quad \Lambda_\varphi y = \frac{1}{r^2}\, y_{\overline{\varphi}\varphi},$$

$$\overline{\Lambda}_r y = \begin{cases} \Lambda_r y = \dfrac{1}{r_i}\left(r_{i-1/2}\, y_{\overline{r}}\right)_{r,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1; \\[2ex] \Lambda_r^- y = \dfrac{r_{1/2}\, y_{\overline{r},1} - \beta_1 r_0 y_0}{0{,}5 h_r r_0} - \dfrac{1}{0{,}5 h_r r_0} \displaystyle\sum_{k=0}^{M} R_{mk}\, y(r_0, \psi_k, t)\, \overline{h}_\varphi; \\[2ex] \Lambda_r^+ y = -\dfrac{r_{N-1/2}\, y_{\overline{r},N} + \beta_2 r_N y_N}{0{,}5 h_r r_N}. \end{cases}$$

$$y(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi),$$

$$\bar{h}_\varphi = \begin{cases} h_\varphi, & k = 1,2,\ldots,M-1; \\ \dfrac{h_\varphi}{2}, & k = 0;\, M-1; \end{cases}$$

$$F = \begin{cases} \varphi, & (r,\varphi,t)\in\omega; \\ \bar{\mu}_1 = \dfrac{\mu_1(\bar{t})}{0{,}5h_r} + f\left(r_0,\varphi,\bar{t}\right), & r = r_0; \\ \bar{\mu}_2 = \dfrac{\mu_2(\bar{t})}{0{,}5h_r} + f\left(r_N,\varphi,\bar{t}\right), & r = r_N, \quad \bar{t} = t_{j+1/2}, \end{cases}$$

$$\hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad y_t = \frac{\hat{y}-y}{\tau}, \quad \bar{t} = t_{j+1/2},$$

$$y_{\bar{r}} = \frac{y(r,\varphi,t) - y\left(r-h_r,\varphi,t\right)}{h_r}, \quad y_r = \frac{y\left(r+h_r,\varphi,t\right) - y(r,\varphi,t)}{h_r}.$$

Обозначим через

$$[u,v] = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N} u_{nm}v_{nm}h_r h_\varphi, \quad [u,v]_{(r)} = \sum_{i=0}^{N} u_i v_i h_r,$$

$$(u,v)_{(r)} = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h_r, \quad (u,v]_r = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h_r, \quad [u,v)_{(\varphi)} = \sum_{k=0}^{M-1} u_k v_k h_\varphi$$

скалярные произведения в пространстве сеточных функций.

Умножим разностное уравнение (19) на $rY = r(\hat{y}+y)$ скалярно и применим формулу суммирования по частям. Тогда с учетом граничных условий получим

$$[r,y^2]_t + 0{,}5\sum_{m=0}^{M-1}\left(\bar{r}, Y_{\bar{r}}^2\right]_{(r)} h_\varphi + 0{,}5\sum_{i=0}^{N}\left(\frac{1}{r}, Y_{\bar{\varphi}}^2\right]_{(\varphi)} \bar{h}_r +$$

$$+ 0{,}5\sum_{m=0}^{M-1} r_0\beta_1 Y_0^2 h_\varphi + 0{,}5\sum_{m=0}^{M-1} r_N\beta_2 Y_N^2 h_\varphi +$$

$$+ 0{,}5\sum_{k=0}^{M-1}\left(Y\left(r_0,\varphi_k,t\right)\sum_{m=0}^{M-1} R_{km}Y\left(r_0,\varphi_m,t\right)h_\varphi\right)h_\varphi = [F,rY]. \tag{20}$$

Тождество (20) будем называть основным энергетическим тождеством. Правую часть тождества (20) перепишем иначе

$$[F,rY] = [f,rY] + \sum_{m=0}^{M-1}\mu_1(\bar{t})\, r_0 Y\left(r_0,\varphi_m,t\right)h_\varphi +$$

$$+ \sum_{m=0}^{M-1}\mu_2(\bar{t})\, r_N Y\left(r_n,\varphi_m,t\right)h_\varphi. \tag{21}$$

Каждое слагаемое равенства (21) оценим с помощью разностного аналога теорем вложения и ε-неравенства

$$\sum_{m=0}^{M-1}[f,rY]_{(r)}h_\varphi \le \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1}\left\|\sqrt{r}\,f\right\|_0^2 h_\varphi + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1}\left\|\sqrt{r}\,Y\right\|_0^2 h_\varphi,$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \mu_1 r_0 Y\left(r_0, \varphi_m, t\right) h_\varphi \le$$

$$\le \frac{r_0}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_1^2 h_\varphi + \sum_{m=0}^{M-1} \left(\frac{\varepsilon}{2} \left\| \sqrt{r}\, Y_{\bar{r}} \right\|_{(r)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \left\| \sqrt{r}\, Y \right\|_{(r)}^2 \right) \bar{h}_\varphi ,$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \mu_2 r_N Y\left(r_n, \varphi_m, t\right) h_\varphi \le$$

$$\le \frac{r_N}{2} \sum_{m=0}^{M-1} \mu_2^2 h_\varphi + \sum_{m=0}^{M-1} \left(\frac{\varepsilon}{2} \left\| \sqrt{r}\, Y_{\bar{r}} \right\|_{(r)}^2 + \frac{1}{2} C_\varepsilon \left\| \sqrt{r}\, Y \right\|_{(r)}^2 \right) \bar{h}_\varphi ,$$

где $C_\varepsilon = 1/(r_2 - r_1) + 2/\varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Оценим последнюю сумму, стоящую в правой части (20):

$$0{,}5 \sum_{k=0}^{M-1} \left(Y\left(r_0, \varphi_k, t\right) \sum_{m=0}^{M-1} R_{km} Y\left(r_0, \varphi_m, t\right) h_\varphi \right) h_\varphi \le$$

$$\le 0{,}5\, M_1 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \left| Y\left(r_0, \varphi_k, t\right) \right| h_\varphi \right)^2 \le$$

$$\le \pi M_1 \sum_{m=0}^{M-1} \left(\left\| \sqrt{r}\, Y_{\bar{r}} \right\|_0^2 + C_\varepsilon \left\| \sqrt{r}\, Y \right\|_0^2 \right), \quad |R| \le M_1 .$$

Подставляя последние неравенства в тождество (20) и выбирая ε достаточно малым, получаем

$$[r, y^2]_t + \nu \sum_{m=0}^{M-1} \left(\bar{r}, Y_{\bar{r}}^2\right]_{(r)} \bar{h}_\varphi + 0{,}5 \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{1}{r}, Y_{\bar{\varphi}}^2\right]_{(\varphi)} \bar{h}_r \le$$

$$\le M_2(\varepsilon) \left\| \sqrt{r}\, Y \right\|_{(r)}^2 + M_3(\varepsilon) \left[|[f]|_{(r)}^2 + \sum_{m=0}^{M-1} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{h}_\varphi \right],$$

ν, $M_2(\varepsilon)$, $M_3(\varepsilon)$ — положительные постоянные, не зависящие от сетки. Не нарушая структуры последнего неравенства, всюду r можно опустить. Суммируя полученное таким образом неравенство по τ от 0 до t и применяя лемму 4 из [5], получаем оценку

$$\sum_{k=0}^{M-1} \left| \left[y^{j+1} \right] \right|_{(r)}^2 \bar{h}_\varphi + \nu \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \left| \left[Y_{\bar{r}}^{j'} \right] \right|_{(r)}^2 \bar{h}_\varphi \right) \tau +$$

$$+ 0{,}5 \sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{i=0}^{M-1} \left| \left[Y_{\bar{\varphi}}^{j'} \right] \right|_{(\varphi)}^2 \bar{h}_r \right) \tau \le$$

$$\le M(\varepsilon) \left[\sum_{j'=0}^{j} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \left(\left| \left[f^{j'} \right] \right|_{(r)}^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 \right) \bar{h}_\varphi \right) \tau + \sum_{k=0}^{M-1} \left\| u_0 \right\|_{(r)}^2 \bar{h}_\varphi \right], \tag{22}$$

$$|[u]|_{(r)}^2 = [u, u]_{(r)}, \quad |[u]|_{(r)} = (u, u], \quad \|u\|_0^2 = [u, u].$$

Из оценки (22) следует устойчивость разностной схемы (19) в норме, „близкой" к сеточной норме W_2^1. Так как разностная схема (19) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу в классе достаточно гладких решений с точностью до $O(|h|^2+\tau^2)$, $|h|^2 = h_r^2 + h_\varphi^2$, то из оценки (22) следует сходимость разностной схемы при $|h|$, $\tau \to 0$ с той же скоростью $O(|h|^2+\tau^2)$.

Наличие интегрального члена в условии (2) не позволяет строить по исходной схеме (19) схему с расщепляющимся оператором. Поэтому для численного решения исходной задачи строим итерационный процесс [6]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial t} = L\overset{s+1}{u} + f, \quad Lu = L_r u + L_\varphi u, \\
\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial r} = \beta_1 \overset{s+1}{u} + \int\limits_0^{2\pi} R(\varphi, \psi)\overset{s}{u}\, d\psi + \mu_1, \quad r = r_1, \\
-\frac{\partial \overset{s+1}{u}}{\partial r} = \beta_2 \overset{s+1}{u} - \mu_2, \quad r = r_2, \\
\overset{s+1}{u}\Big|_{t=0} = u_0(r, \varphi), \quad s = 0, 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{23}$$

где s — итерационный индекс.

На каждой итерации можно по исходной схеме (19) построить схему расщепления и строить ряд одномерных алгоритмов переменных направлений.

Обозначим $\overset{s+1}{z} = \overset{s+1}{u} - u$. Тогда, подставляя $\overset{s+1}{u} = \overset{s+1}{z} + u$ в (23), для погрешности $\overset{s+1}{z}$ получаем задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial t} = L\overset{s+1}{z}, \\
\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r} = \beta_1 \overset{s+1}{z} + \int\limits_0^{2\pi} R\overset{n}{z}\, d\psi, \\
-\frac{\partial \overset{s+1}{z}}{\partial r} = \beta_2 \overset{s+1}{z}, \quad \overset{s+1}{z}(r, \varphi, 0) = 0.
\end{gathered} \tag{24}$$

Применяя априорные оценки, полученные выше, к задаче (24), имеем оценку

$$\max_{0 \le r \le t} \left\| \overset{s+1}{u} - u \right\|_0 \le (M \cdot t)^s \max_{0 \le r \le t} \left\| \overset{0}{u} - u \right\|_0, \quad M \equiv \mathrm{const} > 0.$$

Отсюда следует, что при подобном выборе начального приближения итерационный процесс будет сходящимся в норме $L_2(\Omega)$ при малом t.

1. *Березовская Л. М.* Расчет стационарного температурного поля многоэкранной изоляции // Нелинейные краевые задачи теплопроводности. – Киев, 1980. – С. 14–28. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.36).
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Фрязинов И. В.* О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1971. – **11**, № 5. – С. 1219–1228.
5. *Самарский А. А.* Однородные разностные схемы на неравномерных сетках для уравнений параболического типа // Там же. – 1963. – **3**, № 2. – С. 266–298.
6. *Гордезиани Д. Г.* О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. – Тбилиси, 1981. – 37 с. – (Препринт / Ин-т прикл. математики им. И. Н. Векуа).

Получено 22.11.94