УДК 517.9

Р. І. Петришин, канд. фіз.-мат. наук (Ін-т математики НАН України, Київ)

МЕТОД УСЕРЕДНЕННЯ В ДЕЯКИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ НЕЛІНІЙНИХ КОЛИВАНЬ

By using the averaging method, we prove the solvability of multipoint problems for nonlinear oscillation systems. The deviation of solutions of original and averaged problems is estimated.

Доведена розв'язність багатоточкових задач для нелінійних коливних систем за допомогою методу усереднення. Встановлені також оцінки відхилення розв'язків вихідних і усереднених задач.

Метод усереднення виявився одним із ефективних методів якісного дослідження коливних явищ, що є характерними для багатьох задач нелінійної механіки [1, 2]. Цей метод також часто використовують при розв'язуванні крайових задач, які виникають безпосередньо при вивченні детермінованих процесів, а також в задачах оптимального керування [3, 4]. В даній роботі продовжуються дослідження багатоточкових задач для багаточастотних коливних систем, які були розпочаті в [5], на випадок однієї крайової задачі. Доведено теореми про розв'язність деяких задач у припущенні, що існує розв'язок відповідної усередненої задачі.

Нехай задана нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,\varepsilon) + \varepsilon A(x,\theta,t,\varepsilon), \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega(x,t,\varepsilon)}{\varepsilon} + B(x,\theta,t,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x \in D \subset R^n$, $\theta \in R^m$, $m \geq 1$, $t \in [0, L]$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0 < 1$ — малий додатний параметр; праві частини (1) — 2π-періодичні за кожною з компонент θ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора θ і при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ $l \geq \min\{m; 2\}$ раз неперервно диференційовні по $x \in D$, $\theta \in R^m$, $t \in [0, L]$, причому всі їх частинні похідні рівномірно обмежені сталою c_1, не залежною від ε. Крім того, вважатимемо, що

$$\sum_{\|k\|>0} \left[\|k\| \sup_G \|c_k(x,t,\varepsilon)\| + \sup_G \left\| \frac{\partial c_k(x,t,\varepsilon)}{\partial t} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial c_k(x,t,\varepsilon)}{\partial x} \right\| \right] \leq c_1. \tag{2}$$

Тут $G = D \times [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$, а $c_k(x,t,\varepsilon)$ — коефіцієнти Фур'є функції $[A(x,\theta, t,\varepsilon); B(x,\theta,t,\varepsilon)]$.

Задамо для рівнянь (1) багатоточкові умови

$$\Phi(x_{|t=t_1}, \ldots, x_{|t=t_r}, \varepsilon\theta_{|t=t_1}, \ldots, \varepsilon\theta_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0, \tag{3}$$

де $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_r \leq L$, $r \geq 1$, $\Phi(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ — $(n+m)$-вимірна вектор-функція змінних $p_j \in D$, $q_j \in R^m$, $j = \overline{1, r}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, яка двічі неперервно диференційовна при кожному фіксованому ε, причому

$$\sum_{1 \leq s \leq 2} \|D^s \Phi\| \leq c_2 = \text{const} \tag{4}$$

для всіх $p_j = (p_j^{(1)}, \ldots, p_j^{(n)}) \in D$, $q_j = (q_j^{(1)}, \ldots, q_j^{(m)}) \in R^m$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Тут D^s — довільна частинна похідна по $p_j^{(\nu)}$, $q_j^{(\mu)}$, $j = \overline{1, r}$, $\nu = \overline{1, n}$, $\mu = \overline{1, m}$, порядку s.

Задача (1), (3) — багатоточкова задача, якій властиве явище резонансу [6, 7]. У випадку одночастотної системи з відмінною від нуля частотою резонансні режими відсутні, але якщо число частот $m \geq 2$, то явище резонансу в досліджуваних задачах є типовим. Відмітимо також, що при $r = 2$, $t_1 = 0$ і $t_2 = L$ задача (1), (3) є крайовою задачею.

Поряд із (1), (3) розглянемо усереднену за всіма кутовими змінними θ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(\bar{x}, t, \varepsilon) + \varepsilon\bar{A}(\bar{x}, t, \varepsilon), \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \omega(\bar{x}, t, \varepsilon) + \varepsilon\bar{B}(\bar{x}, t, \varepsilon), \tag{5}$$

$$\Phi(\bar{x}_{|t=t_1}, \ldots, \bar{x}_{|t=t_r}, \bar{\varphi}_{|t=t_1}, \ldots, \bar{\varphi}_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0, \qquad \bar{\varphi} = \varepsilon\bar{\theta}, \tag{6}$$

де

$$[\bar{A}; \bar{B}] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} [A(\bar{x}, \theta, t, \varepsilon); B(\bar{x}, \theta, t, \varepsilon)]\, d\theta_1 \ldots d\theta_m.$$

Задача (5), (6) значно простіша, ніж задача (1), (3), оскільки рівняння для $\bar{x}$ розв'язуються незалежно від $\bar{\varphi}$, після чого $\bar{\varphi}$ визначається елементарно. Для того щоб оператор усереднення був ефективним при дослідженні коливних процесів, потрібно накласти деякі обмеження на компоненти $\omega_\nu(\bar{x}, t, \varepsilon)$, $\nu = \overline{1, m}$, вектора частот ω [5 – 7]. Надалі будемо вважати, що

$$\| W_l^T(\bar{x}, t, \varepsilon) W_l(\bar{x}, t, \varepsilon))^{-1} W_l^T(\bar{x}, t, \varepsilon) \| \le c_3 = \text{const} \quad \forall (\bar{x}, t, \varepsilon) \in G. \tag{7}$$

Тут через W_l і W_l^T позначено відповідно матрицю

$$W_l = \left(\frac{d^j \omega_\nu(\bar{x}, t, \varepsilon)}{dt^j}\right)_{j=0,\, \nu=1}^{l-1,\, m}$$

і транспоновану до неї, причому повні похідні по t від функцій $\omega_\nu(\bar{x}, t, \varepsilon)$ обчислюються в силу усередненої системи (5). Умова (7) гарантує [2, с. 380; 5, с. 958] виконання нерівності

$$\| U(t, y, \psi, \varepsilon)\| + \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial y} U(t, y, \psi, \varepsilon)\right\| + \varepsilon\left\|\frac{\partial}{\partial \psi} U(t, y, \psi, \varepsilon)\right\| \le c_4 \varepsilon^{1+\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{l}, \tag{8}$$

де $U(t, y, \psi, \varepsilon) = (x(t, y, \psi, \varepsilon) - \bar{x}(t, y, \varepsilon); \varphi(t, y, \psi, \varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y, \psi, \varepsilon))$, (x, φ) і $(\bar{x}, \bar{\varphi})$ — розв'язки відповідно систем (1) і (5), $\varphi = \varepsilon\theta$, які при $t = 0$ приймають значення $(y; \psi)$.

Позначимо через $P(y^0, \psi^0, \varepsilon)$ квадратну $(n + m)$-вимірну матрицю

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j} \frac{\partial\bar{x}(t_j, y^0, \varepsilon)}{\partial y^0} + \frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j} \int_0^{t_j} \frac{\partial\omega(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)}{\partial\bar{x}} \frac{\partial\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon)}{\partial y^0}\, d\tau;\ \frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j} \right).$$

Тут значення похідних $\partial\Phi^0/\partial p_j$ і $\partial\Phi^0/\partial q_j$ функції $\Phi(p_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ беруться при $p_j = \bar{x}(t_j, y^0, \varepsilon)$, $q_j = \bar{\varphi}(t_j, y^0, \psi^0, \varepsilon)$, $j = \overline{1, r}$.

Теорема 1. *Нехай:* 1) *виконуються умови* (2), (4), (7); 2) *при кожному* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *існує единий розв'язок* $(\bar{x}(t, y^0, \varepsilon); \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon))$ *усередненої задачі* (5), (6), *який лежить в* $D \times R^m$ *разом із своїм* ρ*-околом* $\forall (t, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_0]$; 3) *для даного розв'язку матриця* $P(y^0, \psi^0, \varepsilon)$ *невироджена, причому*

$$\| P^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon)\| \le c_5 = \text{const} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{9}$$

Тоді можна вказати такі сталі $c_6 > 0$ *і* $\varepsilon_1 > 0$, *що при всіх* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le$

$\leq \varepsilon_1$, *багатоточкова задача* (1), (3) *має єдиний розв'язок* $x = x(t, \varepsilon)$, $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$, *який задовольняє нерівність*

$$\| x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t, y^0, \varepsilon) \| + \| \varphi(t, \varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon) \| \leq c_6 \varepsilon^{1+\alpha}. \tag{10}$$

Доведення. Розв'язок вихідної задачі (1), (3) шукаємо у вигляді $(x(t, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon); \varphi(t, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon))$, де невідомий вектор $(y; \psi) \equiv z$ визначаємо з умов (3):

$$z = -P^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon)\{[\Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \bar{\varphi}(t_r, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- P(y^0, \psi^0, \varepsilon)z] + [\Phi(x(t_1, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \varphi(t_r, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon) -$$
$$- \Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \bar{\varphi}(t_r, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon)]\} \equiv M(z, \varepsilon). \tag{11}$$

Враховуючи умову (4) і оцінку (8), маємо

$$\| \Phi(x(t_1, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) - \Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \| \leq c_2 c_4 \varepsilon^{1+\alpha}. \tag{12}$$

Скориставшись далі умовами гладкості правої частини системи (5), одержимо рівності

$$\bar{x}(t, y^0 + y, \varepsilon) = \bar{x}(t, y^0, \varepsilon) + \frac{\partial \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)}{\partial y^0} y + X(t, y, \varepsilon),$$
$$\bar{\varphi}(t, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon) = \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon) + \psi +$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial \omega(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon)}{\partial y^0} d\tau y + Y(t, y, \varepsilon), \tag{13}$$

в яких $\| X(t, y, \varepsilon) \| \leq c_7 \| y \|^2$, $\| Y(t, y, \varepsilon) \| \leq c_7 (\| y \|^2 + \varepsilon \| y \|)$, c_7 — стала. Розкладемо тепер функцію $\Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \bar{\varphi}(t_r, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon)$ за формулою Тейлора, скориставшись при цьому рівностями (13) і нерівністю (4). Після очевидних перетворень будемо мати

$$\Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \bar{\varphi}(t_r, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon) = P(y^0, \psi^0, \varepsilon)z + R(z, \varepsilon), \tag{14}$$

де $\| R(z, \varepsilon) \| \leq c_8 (\| z \|^2 + \varepsilon \| z \|)$, c_8 — деяка стала. Об'єднуючи (12) – (14), знаходимо оцінку

$$\| M(z, \varepsilon) \| \leq c_5 [c_2 c_4 \varepsilon^{1+\alpha} + c_8 (\| z \|^2 + \varepsilon \| z \|)],$$

звідки випливає, що M відображає множину $V = \{ z : z \in R^{n+m}, \| z \| \leq \leq 2 c_2 c_4 c_5 \varepsilon^{1+\alpha} \}$ в себе при $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq \min \{ (4 c_5 c_8)^{-1}; (2 c_2 c_4 c_5)^{-1/\alpha} \}$.

Покажемо, що відображення M є стиснутим, для чого зобразимо $\partial M / \partial z$ у вигляді

$$\frac{\partial M(z, \varepsilon)}{\partial z} = -P^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial y} (x(t_j, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon)) - \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon) \right) + \right.$$

$$+\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon)) - \overline{\varphi}(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon);$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial\psi}x(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon) +$$

$$\left.+\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\frac{\partial}{\partial\psi}(\varphi(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon) - \overline{\varphi}(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon))\right\} -$$

$$-P^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon)\left\{\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\frac{\partial\overline{x}(t_j, y^0+y, \varepsilon)}{\partial y} + \frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\frac{\partial\overline{\varphi}(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon)}{\partial y};\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\frac{\partial\overline{\varphi}(t_j, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon)}{\partial\psi} - P(y^0, \psi^0, \varepsilon)\right)\right\}. \tag{15}$$

Використовуючи нерівності (4) і (8), норму матриці, що записана в перших фігурних дужках у правій частині останньої рівності, можна оцінити зверху величиною $(n+m)^2 c_2 c_4 \varepsilon^{\alpha}$. Із умови гладкості правої частини (5) маємо зображення

$$\frac{\partial\overline{x}(t, y^0+y, \varepsilon)}{\partial y} = \frac{\partial\overline{x}(t, y^0, \varepsilon)}{\partial y} + \tilde{X}(t, y, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial\overline{\varphi}(t, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon)}{\partial y} = \int_0^t \frac{\partial\omega(\overline{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)}{\partial\overline{x}}\frac{\partial\overline{x}(\tau, y^0, \varepsilon)}{\partial y}d\tau + \tilde{Y}(t, y, \varepsilon), \tag{16}$$

$$\frac{\partial\overline{\varphi}(t, y^0+y, \psi^0+\psi, \varepsilon)}{\partial\psi} = E_m,$$

де E_m — одинична m-вимірна матриця, $\|\tilde{X}(t, y, \varepsilon)\| \le c_9\|y\|$, $\|\tilde{Y}(t, y, \varepsilon)\| \le$ $\le c_9(\|y\| + \varepsilon)$, $c_9 = \text{const}$, а з умови гладкості функції Φ і нерівностей (4) і (8) одержуємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_j} = \frac{\partial\Phi^0}{\partial p_j} + \tilde{\Phi}_j(z, \varepsilon), \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial q_j} = \frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j} + \underset{\sim}{\Phi}_j(z, \varepsilon),$$

де $\|\tilde{\Phi}_j(z, \varepsilon)\| + \|\underset{\sim}{\Phi}_j(z, \varepsilon)\| \le c_{10}(\|z\| + \varepsilon^{1+\alpha})$, $c_{10} = \text{const}$. Тому норма матриці, що записана в других фігурних дужках у правій частині (15), оцінюється зверху величиною

$$(n+m)^2\left[2c_2c_9\|y\| + c_2c_9\varepsilon + c_{10}(\|y\| + \|\psi\| + \varepsilon^{1+\alpha})\sup\left\|\frac{\partial\overline{x}(t, y, \varepsilon)}{\partial y}\right\| +\right.$$

$$+ 2c_{10}(\|y\| + \|\psi\| + \varepsilon^{1+\alpha})c_9\|y\| + c_{10}(\|y\| + \|\psi\| + \varepsilon^{1+\alpha})L\sup\left\|\frac{\partial\overline{x}(t, y, \varepsilon)}{\partial y}\right\| \times$$

$$\left.\times \sup\left\|\frac{\partial\omega(x, t, \varepsilon)}{\partial x}\right\|\right] \le c_{11}\varepsilon, \quad c_{11} = \text{const},$$

при $z \in V$. Таким чином,

$$\left\|\frac{\partial M}{\partial z}\right\| \le c_5(c_2c_4(n+m)^2\varepsilon^{\alpha} + c_{11}\varepsilon) \le \frac{1}{2}$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0 \le [2c_5(c_2c_4(n+m)^2 + c_{11})]^{-1/\alpha}$, тобто відображення M, що діє із V в V, є стиснутим. Отже, існує єдиний розв'язок $z = z(\varepsilon) \equiv (y(\varepsilon); \psi(\varepsilon))$ рівняння (11), що задовольняє умову $\|z(\varepsilon)\| \le 2c_2c_4c_5\varepsilon^{1+\alpha}$, а значить, існує розв'язок

$$(x(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon);\ \varphi(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon)) \equiv (x(t, \varepsilon); \varphi(t, \varepsilon))$$

багатоточкової задачі (1), (3). Оцінка (10) випливає з нерівностей

$$\begin{aligned} &\|x(t,\varepsilon) - \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)\| + \|\varphi(t,\varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon)\| \le \\ &\le \|x(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{x}(t, y^0 + y(\varepsilon), \varepsilon)\| + \\ &+ \|\varphi(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \psi(\varepsilon), \varepsilon)\| + \\ &+ \|\bar{x}(t, y^0 + y(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)\| + \|\bar{\varphi}(t, y^0 + y(\varepsilon), \psi^0 + \\ &+ \psi(\varepsilon), \varepsilon) - \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon)\| \le c_6\varepsilon^{1+\alpha}, \end{aligned}$$

де

$$c_6 = 2c_4 + 2c_2c_4c_5\left(1 + \sup\left\|\frac{\partial\bar{x}(t, y, \varepsilon)}{\partial y}\right\| + \sup\left\|\frac{\partial\bar{\varphi}(t, y, \psi, \varepsilon)}{\partial y}\right\|\right).$$

Для завершення доведення теореми залишилось накласти умову $\rho > c_6\varepsilon_0^{1+\alpha}$ для того, щоб розв'язок задачі (1), (3) не вийшов за межі області $D \times R^m$. Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** В теоремі 1 умови 2 і 3 вимагають виконання обмежень, пов'язаних з величиною малого параметра ε, які не завжди зручно перевіряти. Припустимо додатково, що функції a, ω і Φ є гладкими по ε при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, і розглянемо задачу

$$\frac{d\xi}{dt} = a(\xi, t, 0), \qquad \frac{d\eta}{dt} = \omega(\xi, t, 0), \qquad \Phi(\xi_{|t=t_1}, \ldots, \eta_{|t=t_r}, 0) = 0.$$

Нехай ця задача має єдиний розв'язок $(\xi(t, \xi^0); \eta(t, \xi^0, \eta^0))$, що міститься в $D \times R^m$ $\forall t \in [0, L]$, і для цього розв'язку виконується умова

$$\det \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial\Phi_0^0}{\partial p_j}\frac{\partial\xi(t_j, \xi^0)}{\partial\xi^0} + \frac{\partial\Phi_0^0}{\partial q_j}\int_0^{t_j}\frac{\partial\omega(\xi(\tau, \xi^0), \tau, 0)}{\partial\xi}\frac{\partial\xi(\tau, \xi^0)}{\partial\xi^0}d\tau;\ \frac{\partial\Phi_0^0}{\partial q_j}\right) \ne 0.$$

Тут значення похідних $\partial\Phi_0^0/\partial p_j$, $\partial\Phi_0^0/\partial q_j$ функції $\Phi(p_1, \ldots, q_r, 0)$ беруться при $p_j = \xi(t_j, \xi^0)$, $q_j = \eta(t_j, \xi^0, \eta^0)$. Як легко переконатись, цих припущень досить, щоб існував розв'язок $(\bar{x}(t, y^0, \varepsilon); \bar{\varphi}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon))$ задачі (5), (6), для якого виконується умова (9) і нерівність

$$\|x(t, y^0, \varepsilon) - \xi(t, \xi^0)\| + \|\varphi(t, y^0, \psi^0, \varepsilon) - \eta(t, \xi^0, \eta^0)\| \le \tilde{c}_6\varepsilon, \quad \tilde{c}_6 = \text{const}.$$

***Зауваження* 2.** Із оцінки (10) випливає, що обмеження (2), (4) і (7) на функції a, A, ω, B і Φ досить накладати не в усій області їх визначення, а тільки в деякому $\rho_1(\varepsilon)$-околі ($\rho_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) розв'язку усередненої задачі (5), (6).

Розглянемо тепер багатоточкову задачу виду

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t, \varepsilon) + \varepsilon A(x, \theta, t, \varepsilon), \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(x, t, \varepsilon) + B(x, \theta, t, \varepsilon), \tag{17}$$

$$F(x_{|t=t_1}, \ldots, x_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0, \tag{18.1}$$

$$\Phi(x_{|t=t_1}, \ldots, x_{|t=t_r}, \theta_{|t=t_1}, \ldots, \theta_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0, \tag{18.2}$$

де F і Φ — відповідно n- і m-вимірні вектор-функції. Основна відмінність цієї задачі від задачі (1), (3) полягає в тому, що в умовах (18.2) функція Φ залежить від аргументів $\theta_{|t=t_j}$ а в умовах (3) — від $\varepsilon\theta_{|t=t_j}$, $j=\overline{1,r}$. Розглянемо також відповідну усереднену задачу

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(\bar{x}, t, \varepsilon) + \varepsilon \bar{A}(\bar{x}, t, \varepsilon), \quad F(\bar{x}_{|t=t_1}, \ldots, \bar{x}_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0, \tag{19}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{1}{\varepsilon}\omega(\bar{x}, t, \varepsilon) + \bar{B}(\bar{x}, t, \varepsilon), \quad \Phi(\bar{x}_{|t=t_1}, \ldots, \bar{\theta}_{|t=t_r}, \varepsilon) = 0 \tag{20}$$

і припустимо, що існує розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(t, y^0, \varepsilon)$ задачі (19), для якого матриця

$$P_1(y^0, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial F^0}{\partial p_j} \frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0, \varepsilon)}{\partial y^0}$$

невироджена і задовольняє нерівність

$$\| P_1^{-1}(y^0, \varepsilon) \| \le c_{12} \varepsilon^{-\alpha_1} \tag{21}$$

з деякими сталими $c_{12} > 0$ і $\alpha_1 \ge 0$. Тут через $\partial F^0 / \partial p_j$ позначено матрицю частинних похідних вектор-функції $F(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ по $p_j = (p_j^{(1)}, \ldots, p_j^{(n)})$ при $p_\nu = \bar{x}(t_\nu, y^0, \varepsilon)$, $\nu = \overline{1,r}$.

Для розв'язності задачі (20), очевидно, досить розв'язати відносно ψ рівняння

$$\Phi\Big(\bar{x}(t_1, y^0, \varepsilon), \ldots, \bar{x}(t_r, y^0, \varepsilon), \psi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_1} [\omega(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon \bar{B}(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)]\, d\tau, \ldots, \psi + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t_r} [\omega(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon) +$$
$$+ \varepsilon \bar{B}(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)]\, d\tau, \varepsilon \Big) = 0.$$

Нехай існує єдиний розв'язок $\psi = \psi^0(\varepsilon)$ цього рівняння, тобто існує єдиний розв'язок

$$\bar{\theta}(t, y^0, \psi^0, \varepsilon) = \psi^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{t} [\omega(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon) + \varepsilon \bar{B}(\bar{x}(\tau, y^0, \varepsilon), \tau, \varepsilon)]\, d\tau$$

задачі (20). Вважатимемо також, що матриця $P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r} \partial \Phi^0 / \partial q_j$ задовольняє умову

$$\| P_2^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon) \| \le c_{13} \varepsilon^{-\alpha_2}, \quad c_{13} > 0, \quad \alpha_2 \ge 0, \tag{22}$$

де через $\partial \Phi^0 / \partial q_j$ позначено матрицю частинних похідних вектор-функції $\Phi(p_1, \ldots, p_r, q_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ по $q_j = (q_j^{(1)}, \ldots, q_j^{(m)})$ при $p_\nu = \bar{x}(t_\nu, y^0, \varepsilon)$, $q_\nu = \bar{\theta}(t_\nu, y^0, \psi^0, \varepsilon)$, $\nu = \overline{1,r}$. Надалі будемо припускати, що функції $F(p_1, \ldots, p_r, \varepsilon)$ і $\Phi(p_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0\, \varepsilon_0]$ двічі неперервно диференційовні при $p_j \in D$, $q_j \in R^m$, причому

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\left\| \frac{\partial F}{\partial p_j} \right\| + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 F}{\partial p_j \partial p_\nu^{(k)}} \right\| \right) \le c_{14},$$

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\varepsilon\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\|+\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right\|+\sum_{\nu=1}^{r}\left(\sum_{s=1}^{m}\left(\varepsilon\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial p_j\partial q_\nu^{(s)}}\right\|+\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j\partial q_\nu^{(s)}}\right\|\right)\right)\right]\le c_{14} \quad (23)$$

для всіх $p_j\in D$ і $q_j\in R^m$; $c_{14}=\mathrm{const}$.

Теорема 2. *Нехай:* 1) *при кожному* $\varepsilon\in(0\,\varepsilon_0]$ *існує єдиний розв'язок* $(\bar{x}(t,y^0,\varepsilon);\ \bar{\theta}(t,y^0,\psi^0,\varepsilon))$ *усередненої задачі* (19), (20), *повільні змінні* $\bar{x}(t, y^0,\varepsilon)$ *якого належать* D *разом із деяким своїм* ρ*-околом;* 2) *виконуються умови* (2), (7), (21) – (23) *при* $\alpha>\alpha_1+2\alpha_2$. *Тоді при досить малому* $\varepsilon_0>0$ *для всіх* $\varepsilon\in(0\,\varepsilon_0]$ *задача* (17), (18.1), (18.2) *має єдиний розв'язок* $(x(t,\varepsilon);\ \theta(t,\varepsilon))$, *який задовольняє умови*

$$\|x(t,\varepsilon)-\bar{x}(t,y^0,\varepsilon)\|\le c_{15}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1},$$

$$\|\theta(t,\varepsilon)-\bar{\theta}(t,y^0,\psi^0,\varepsilon)\|\le c_{15}\varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2},\quad c_{15}=\mathrm{const}. \quad (24)$$

Доведення. Невідомі параметри $(y;\psi)$ розв'язку $(x(t,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon);\ \theta(t,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon))$ системи (17) визначатимемо з умов (18.1) і (18.2). Перепишемо (18.1) у вигляді

$$y=-P_1^{-1}(y^0,\varepsilon)\{[F(\bar{x}(t_1,y^0+y,\varepsilon),\dots,\varepsilon)-P_1(y^0,\varepsilon)y]+$$
$$+[F(x(t_1,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon),\dots,\varepsilon)-F(\bar{x}(t_1,y^0+y,\varepsilon),\dots,\varepsilon)]\}\equiv T(y,\psi,\varepsilon). \quad (25)$$

За допомогою оцінки похибки методу усереднення (8) і нерівностей (23) знайдемо

$$\|F(x(t_1,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon),\dots,\varepsilon)-F(\bar{x}(t_1,y^0+y,\varepsilon),\dots,\varepsilon)\|\le$$
$$\le\sum_{j=1}^{r}\|x(t_j,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon)-\bar{x}(t_j,y^0+y,\varepsilon)\|\sup\left\|\frac{\partial F}{\partial p_j}\right\|\le rc_4c_{14}\varepsilon^{1+\alpha}. \quad (26)$$

Скориставшись далі зображеннями (13), нерівностями (23) і умовою (19), одержимо рівність

$$F(\bar{x}(t_1,y^0+y,\varepsilon),\dots,\varepsilon)=P_1(y^0,\varepsilon)y+\tilde{F}(y,\varepsilon),$$

в якій $\|\tilde{F}(y,\varepsilon)\|\le c_{16}\|y\|^2$, $c_{16}=\mathrm{const}$. Враховуючи цю рівність і (26), для $T(y,\psi,\varepsilon)$ можемо записати оцінку

$$\|T\|\le\|P_1^{-1}(y^0,\varepsilon)\|(c_4c_{14}r\varepsilon^{1+\alpha}+c_{16}\|y\|^2)\le$$
$$\le c_{12}(c_4c_{14}r+c_{16}\|y\|^2\varepsilon^{-1-\alpha})\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1},$$

з якої випливає, що $T(y,\psi,\varepsilon)$ відображає множину $\|y\|\le 2c_4c_{12}c_{14}r\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}\equiv$ $\equiv c_{17}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}$ в себе при $\varepsilon\le\varepsilon_0\le(4rc_4c_{12}^2c_{14}c_{16})^{-1/(\alpha+1-2\alpha_1)}$, $\psi\in R^m$. Обчислимо тепер

$$\frac{\partial T}{\partial y}=-P_1(y^0,\varepsilon)\left\{\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial}{\partial p_j}F(\bar{x}(t_1,y^0+y,\varepsilon),\dots,\varepsilon)\frac{\partial\bar{x}(t_j,y^0+y,\varepsilon)}{\partial y}-\right.\right.$$
$$\left.-P_1(y^0,\varepsilon)\right]+\left[\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial}{\partial p_j}F(x(t_1,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon),\dots,\varepsilon)\times\right.\right.$$
$$\times\frac{\partial x(t_j,y^0+y,\psi^0+\psi,\varepsilon)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial p_j}F(\bar{x}(t_1,y^0+$$

$$+\, y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon)\, \frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon)}{\partial y} \Bigg) \Bigg] \Bigg\}. \tag{27}$$

Оскільки

$$\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} F(x(t_1, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial x(t_j, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial p_j} F(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon)}{\partial y} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} F(x(t_1, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial y} \Big(x(t_j, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon) -$$

$$- \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon) \Big) + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} \big(F(x(t_1, y^0 + y, \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) -$$

$$- F(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon)}{\partial y},$$

то з урахуванням нерівностей (8) і (23) норма матриці, що записана в других квадратних дужках в правій частині (27) оцінюється зверху величиною $c_{18}\varepsilon^{\alpha}$, $c_{18} = \text{const}$. Якщо далі використати (16) і записати рівність

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} F(\bar{x}(t_1, y^0 + y, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0 + y, \varepsilon)}{\partial y} = \sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial F^0}{\partial p_j} + \right.$$

$$\left. + F_j(y, \varepsilon) \right) \left(\frac{\partial \bar{x}(t_j, y^0, \varepsilon)}{\partial y} + \tilde{X}(t_j, y, \varepsilon) \right) \equiv P_1(y^0, \varepsilon) + K(y, \varepsilon),$$

де $\| K(y, \varepsilon) \| \le c_{19} \| y \|$, $c_{19} = \text{const}$, то норму матриці, що записана в перших квадратних дужках у правій частині рівності (27), можна оцінити величиною $c_{20} \| y \|$, $c_{20} = \text{const}$. Таким чином,

$$\left\| \frac{\partial T(y, \psi, \varepsilon)}{\partial y} \right\| \le c_{12} \varepsilon^{-\alpha_1} (c_{18}\varepsilon^{\alpha} + c_{20} \| y \|) \le \frac{1}{2}$$

при $\alpha > \alpha_1$, $\| y \| \le c_{17} \varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}$, $\psi \in R^m$ і $\varepsilon \le \varepsilon_0 \le [2c_{12}(c_{18} + c_{17}c_{20})]^{1/(\alpha_1 - \alpha)}$, тому рівняння (25) має єдиний розв'язок $y = y(\psi, \varepsilon)$, $\| y(\psi, \varepsilon) \| \le c_{17} \varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}$, який можна визначити методом послідовних наближень

$$y_k(\psi, \varepsilon) = T(y_{k-1}(\psi, \varepsilon), \psi, \varepsilon), \quad k \ge 1,$$

$$y_0(\psi, \varepsilon) = 0, \quad y(\psi, \varepsilon) = \lim_{k \to \infty} y_k(\psi, \varepsilon).$$

Виходячи із рівності (25), обчислимо

$$\frac{\partial y_k(\psi, \varepsilon)}{\partial \psi} = -P_1^{-1}(y^0, \varepsilon) \left\{ \left[\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial}{\partial p_j} F(\bar{x}(t_1, y^0 + y_{k-1}, \varepsilon), \ldots, \varepsilon) \frac{\partial}{\partial y} \bar{x}(t_j, y^0 + \right. \right.$$

$$\left. + y_{k-1}, \varepsilon \right) \frac{\partial y_{k-1}}{\partial \psi} - P_1(y^0, \varepsilon) \frac{\partial y_{k-1}}{\partial \psi} \Bigg] + \left[\sum_{j=1}^{r} \left(\frac{\partial}{\partial p_j} F(x(t_1, y^0 + y_{k-1}, \psi^0 + \right. \right.$$

$$+ \psi, \varepsilon), \ldots, \varepsilon\bigg)\bigg(\frac{\partial}{\partial y} x(t_j, y^0 + y_{k-1}, \psi^0 + \psi, \varepsilon)\frac{\partial y_{k-1}}{\partial \psi} + \frac{\partial}{\partial \psi} x(t_j, y^0 + y_{k-1}, \psi^0 +$$

$$+ \psi, \varepsilon)\bigg) - \frac{\partial}{\partial p_j} F\big(\bar{x}(t_1, y^0 + y_{k-1}, \varepsilon), \ldots, \varepsilon\big)\frac{\partial}{\partial y}\bar{x}(t_j, y^0 + y_{k-1}, \varepsilon)\frac{\partial y_{k-1}}{\partial \psi}\bigg)\bigg]\bigg\}$$

і скористаємось методикою, запропонованою при вивченні властивостей $T(y, \psi, \varepsilon)$. Тоді одержимо нерівність

$$\left\| \frac{\partial y_k}{\partial \psi} \right\| \le c_{21}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1} + c_{22}\varepsilon^{\alpha-\alpha_1}\left\| \frac{\partial y_{k-1}}{\partial \psi} \right\|$$

із деякими сталими c_{21} і c_{22}, яка приводить до оцінки

$$\left\| \frac{\partial y_k(\psi, \varepsilon)}{\partial \psi} \right\| \le \frac{c_{21}}{1 - c_{22}\varepsilon_0^{\alpha-\alpha_1}}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1} \equiv c_{23}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1} \quad \forall k \ge 1$$

при умові $\varepsilon_0 \le (2c_{22})^{1/(\alpha_1-\alpha)}$. Отже, послідовність $\{\partial y_k(\psi, \varepsilon)/\partial\psi\}$ рівномірно обмежена сталою $c_{23}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}$. Цього досить, щоб гранична функція $y(\psi, \varepsilon)$ задовольняла умову Ліпшіца

$$\| y(\psi^{(1)}, \varepsilon) - y(\psi^{(2)}, \varepsilon)\| \le c_{23}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\| \quad \forall \psi^{(1)}, \psi^{(2)} \in R^m, \tag{28}$$

яка буде нами істотно використовуватись для знаходження ψ.

Перепишемо рівність (18.2) у вигляді

$$\psi = -P_2^{-1}(y^0, \psi^0, \varepsilon)\{[\Phi - \overline{\Phi}] + [\overline{\Phi} - P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon)\psi]\} \equiv \tilde{T}(\psi, \varepsilon), \tag{29}$$

де

$$\Phi = \Phi(x(t_1, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \theta(t_r, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon),$$

$$\overline{\Phi} = \Phi(\bar{x}(t_1, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \varepsilon), \ldots, \bar{\theta}(t_r, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon).$$

Оцінимо кожний доданок у правій частині рівності (29).

Скориставшись нерівностями (8) і (23), одержимо

$$\|\Phi - \overline{\Phi}\| \le \sum_{j=1}^{r}\left(\frac{1}{\varepsilon}c_4 c_{14}\varepsilon^{1+\alpha} + c_4 c_{14}\varepsilon^{\alpha}\right) = 2rc_4c_{14}\varepsilon^{\alpha},$$

$$\|\overline{\Phi} - P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon)\psi\| \le \|\overline{\Phi} - \Phi(\bar{x}(t_1, y^0, \varepsilon), \ldots, \bar{x}(t_r, y^0, \varepsilon), \bar{\theta}(t_1, y^0 +$$
$$+ y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \ldots, \bar{\theta}(t_r, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon)\| +$$
$$+ \|\Phi(\bar{x}(t_1, y^0, \varepsilon), \ldots, \bar{x}(t_r, y^0, \varepsilon), \bar{\theta}(t_1, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 +$$
$$+ \psi, \varepsilon), \ldots, \bar{\theta}(t_r, y^0 + y(\psi, \varepsilon), \psi^0 + \psi, \varepsilon), \varepsilon) - P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon)\psi\| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^{r}\left[\sup\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial p_j}\right\|\sup\left\|\frac{\partial\bar{x}(t, y, \varepsilon)}{\partial y}\right\|\|y(\psi, \varepsilon)\| + \left\|\frac{\partial\Phi^0}{\partial q_j}\right\|c_{24}\frac{1}{\varepsilon}\|y(\psi, \varepsilon)\| +\right.$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{s=1}^{m}\sup\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j \partial q_\nu^{(s)}}\right\|\left(c_{24}\frac{1}{\varepsilon}\|y(\psi, \varepsilon)\| + \|\psi\|\right)^2\right], \tag{30}$$

де

$$c_{24} = L\sup\left\|\frac{\partial\bar{x}(t, y, \varepsilon)}{\partial y}\right\|\left(\sup\left\|\frac{\partial\omega(x, t, \varepsilon)}{\partial x}\right\| + \varepsilon_0\sup\left\|\frac{\partial\overline{B}(x, t, \varepsilon)}{\partial x}\right\|\right).$$

Враховуючи, що $\|y(\psi, \varepsilon)\| \le c_{17}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}$, остаточно знаходимо

$$\| \overline{\Phi} - P_2(y^0, \psi^0, \varepsilon)\psi \| \le c_{25}(\varepsilon^{\alpha-\alpha_1} + \|\psi\|^2), \quad c_{25} = \text{const}. \tag{31}$$

Нерівності (30) і (31) приводять до оцінки

$$\| \tilde{T}(\psi, \varepsilon) \| \le c_{13}(2rc_4c_{14} + c_{25})(\varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2} + \varepsilon^{-\alpha_2}\|\psi\|^2) \equiv$$

$$\equiv c_{26}(\varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2} + \varepsilon^{-\alpha_2}\|\psi\|^2), \tag{32}$$

звідки випливає, що $\tilde{T}(\psi, \varepsilon)$ відображає множину $U = \{\psi : \psi \in R^m, \|\psi\| \le \le 2c_{26}\varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2}\}$ в себе при $\alpha > \alpha_1 + 2\alpha_2$. Покажемо, що відображення $\tilde{T}$ множини U в себе є стиснутим. Нехай $\psi^{(1)}$ і $\psi^{(2)}$ — довільні точки множини U. Тоді, застосувавши оцінки похибки методу усереднення (8) і нерівності (22) (23) і (28), будемо мати

$$\|\tilde{T}(\psi^{(1)}, \varepsilon) - \tilde{T}(\psi^{(2)}, \varepsilon)\| \le c_{27}\left(\sum_{j,\nu=1}^{r}\sum_{s=1}^{m}\sup\left\|\frac{\partial^2\Phi}{\partial q_j \partial q_\nu^{(s)}}\right\| \times \right.$$

$$\left. \times\, \varepsilon^{\alpha-\alpha_1-2\alpha_2} + \varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2}\right)\|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad c_{27} = \text{const}. \tag{33}$$

Оскільки $\alpha > \alpha_1 + 2\alpha_2$, то з останньої нерівності можна зробити висновок, що при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ відображення $\tilde{T}$ є стиснутим. Отже, існує єдиний розв'язок $\psi = \psi_0(\varepsilon) \in U$ рівняння (29), а значить, і розв'язок

$$(x(t, \varepsilon); \theta(t, \varepsilon)) \equiv (x(t, y^0 + y(\psi_0(\varepsilon), \varepsilon), \psi^0 + \psi_0(\varepsilon), \varepsilon);$$

$$\theta(t, y^0 + y(\psi_0(\varepsilon), \varepsilon), \psi^0 + \psi_0(\varepsilon), \varepsilon))$$

задачі (17), (18.1), (18.2). Оцінки (24) випливають із оцінок (8) і нерівностей

$$\|y(\psi_0(\varepsilon), \varepsilon)\| \le c_{17}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1}, \quad \|\psi_0(\varepsilon)\| \le 2c_{26}\varepsilon^{\alpha-\alpha_1-\alpha_2}$$

а умова $c_{15}\varepsilon^{1+\alpha-\alpha_1} < \rho$ гарантує, що $x = x(t, \varepsilon)$ лежить в D $\forall t \in [0, L]$ і $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Теорема доведена.

Зауваження 3. Якщо в умові (18.2) вектор-функція $\Phi(p_1, \ldots, q_r, \varepsilon)$ лінійно залежить від q_j, $j = \overline{1, r}$, тобто

$$\Phi = \sum_{j=1}^{r} A_j(x_{|t=t_1}, \ldots, x_{|t=t_r}, \varepsilon)\theta_{|t=t_j} + A_0(x_{|t=t_1}, \ldots, x_{|t=t_r}, \varepsilon),$$

то нерівність $\alpha > \alpha_1 + 2\alpha_2$ в теоремі 2 можна послабити, а саме, вважати, що $\alpha > \alpha_1 + \alpha_2$. Дійсно, в цьому випадку аналіз нерівностей (32) і (33) показує, що всі умови теореми про нерухому точку виконуються при $\alpha > \alpha_1 + \alpha_2$.

1. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1971. – 440 с.
2. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Об интегральных многообразиях многочастотных колебательных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1990. – **54**, № 2. – С. 378 – 395.
3. *Черноусько Ф. Л.* Асимптотические методы в некоторых задачах оптимального управления // Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Киев: Наук. думка, 1979. – С. 239 – 246.
4. *Плотников В. А., Зверкова Т. С.* Усреднение краевых задач в терминальных задачах оптимального управления // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 8. – С. 1381 – 1387.
5. *Самойленко А. М., Петришин Р. И.* Метод усреднения в некоторых краевых задачах // Там же. – 1989. – **25**, № 6. – С. 956 – 964.
6. *Бахтин В. И.* Об усреднении в многочастотных системах // Функцион. анализ. – 1986. – **20**, № 2. – С. 1 – 7.
7. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем. – М.: Наука, 1974. – 432 с.

Одержано 29.03.94