УДК 517.929

Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук,
Р. Мустафаева, асп. (Киев. ун-т)

РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Linear stationary systems of differential equations with delay are considered. The matrices that determine the dynamics of a system change in a certain interval. We obtain sufficient conditions of the robust stability of a system; these conditions are uniform with respect to the delay and depend on the deviation of the argument.

Розглядаються лінійні стаціонарні системи диференціальних рівнянь із загаюванням. Матриці, що визначають динаміку системи, змінюються в деякому інтервалі. Одержані достатні умови робастної стійкості систем, рівномірні за загаюванням і такі, що залежать від відхилення аргументу.

При составлении математических моделей реальных объектов точно определить их параметры практически невозможно. Обычно они известны в некотором интервале. В связи с этим в последние два десятилетия возникла и бурно развивается так называемая робастная теория управления и устойчивости. Ее особенность состоит в том, что параметры, определяющие динамику системы, могут принимать значения из некоторого интервала. И, соответственно, теория управления и устойчивости называется робастной или интервальной [1]. Основные результаты по теории устойчивости получены для скалярных уравнений и опираются на теоремы В. Л. Харитонова [2, 3]. Как показано в [4], перенесение полученных результатов на многомерные системы встречает принципиальные затруднения, связанные как с размерностью, так и с нелинейной зависимостью коэффициентов характеристического уравнения от элементов матриц.

В настоящей работе будут рассматриваться системы линейных стационарных уравнений с отклоняющимся аргументом запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau). \tag{1}$$

Здесь A, B — матрицы с постоянными коэффициентами, $\tau > 0$ — постоянное запаздывание. Наряду с ней рассмотрим интервальную систему вида

$$\dot{x}(t) = (A+\Delta A)x(t) + (B+\Delta B)x(t-\tau), \tag{2}$$

где $\Delta A = \{\Delta a_{ij}\}$, $\Delta B = \{\Delta b_{ij}\}$, $i, j = \overline{1,n}$, — матрицы с элементами, принимающими значения из некоторых симметричных интервалов, т. е. $-\alpha_{ij} \le \Delta a_{ij} \le \alpha_{ij}$, $-\beta_{ij} \le \Delta b_{ij} \le \beta_{ij}$, $i, j = \overline{1,n}$. Предполагается, что система (1) ассимптотически устойчива. Необходимо найти условия, при которых будет асимптотически устойчивой и система (2). Следует отметить, что при исследовании робастной устойчивости уравнений с запаздыванием с использованием оценок собственных чисел характеристическое уравнение дает уже счетное число корней [5]. Исследование систем усложняется нелинейной зависимостью коэффициентов уравнений от элементов матриц.

В настоящей работе предлагается использовать метод функций Ляпунова, который в ряде случаев дает эффективные результаты [6 – 10]. Воспользуемся функцией Ляпунова квадратичного вида $V(x) = x^T Hx$, где H — некоторая положительно определенная матрица. Через $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ будем обозначать наибольшее и наименьшее собственные числа симметричной матрицы, под векторной и матричной нормами будем понимать соответственно

$$|x(t)| = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i^2(t) \right\}^{1/2}, \quad \|x(t)\|_\tau = \max_{-\tau \le s \le 0} \{ |x(t+s)| \},$$

$$|A| = \left\{\lambda_{\max}\left(AA^T\right)\right\}^{1/2}.$$

Обычно считается, что система $\dot{x} = (A + B)x(t)$ асимптотически устойчивая. Это является необходимым условием асимптотической устойчивости интервальной системы

$$\dot{x}(t) = [(A+B) + (\Delta A + \Delta B)]x(t) \tag{3}$$

и интервальной системы с запаздыванием (2).

Теорема 1. *Пусть* $A + B$ *— асимптотически устойчивая матрица и существует симметричная, положительно определенная матрица* H, *при которой выполняется неравенство*

$$\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] - 2\,\|H(\Delta A + \Delta B)\| > 0. \tag{4}$$

Тогда система (3) *интервально устойчива. Здесь*

$$\|H(\Delta A + \Delta B)\| = \max_{\Delta a_{ij}, \Delta b_{ij}} \{|H(\Delta A + \Delta B)|\}.$$

Доказательство. Рассмотрим полную производную функции $V(x) = x^T H x$ в силу системы (3):

$$V(x(t)) = -x^T(t)[-(A+B)^T H - H(A+B)]x(t) + 2x^T(t)H(\Delta A + \Delta B)x(t).$$

Если матрица $(A+B)$ асимптотически устойчива, то всегда найдется положительно определенная матрица H, при которой матрица

$$C = -(A+B)^T H - H(A+B)$$

также будет положительно определенной. Поэтому, чтобы полная производная функции $V(x)$ в силу системы (3) была отрицательно определенной, достаточно, чтобы

$$\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] > 2\,|H(\Delta A + \Delta B)|.$$

А для робастной устойчивости, т. е. устойчивости, равномерной по изменению коэффициентов матриц ΔA, ΔB, достаточно выполнение неравенства (4). Теорема доказана.

Вместо неравенства (4) можно записать более грубое, но легче вычисляемое соотношение.

Следствие. *Пусть* $A + B$ *— асимптотически устойчивая матрица и существует положительно определенная матрица* H, *при которой справедливо*

$$\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] - 2\lambda_{\max}(H)\,\|\Delta A + \Delta B\| > 0. \tag{4'}$$

Тогда система (3) *интервально устойчивая. Здесь*

$$\|\Delta A + \Delta B\| = \max_{\Delta a_{ij}, \Delta b_{ij}} \{|\Delta A + \Delta B|\}.$$

Использовав полученные условия робастной устойчивости системы без запаздывания (3), рассмотрим систему (2). Обозначим поверхность уровня $V(x) = \alpha$ функции Ляпунова $V(x) = x^T H x$ через ∂V^{α}, а область, которую она содержит, через V^{α}, т. е.

$$\partial V^{\alpha} = \{x : x^T H x = \alpha\}, \quad V^{\alpha} = \{x : x^T H x < \alpha\}.$$

Теорема 2. *Пусть* $A + B$ *— асимптотически устойчивая матрица и существует симметричная, положительно определенная матрица* H, *при которой справедливо неравенство*

$$\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] -$$
$$- 2[\|H(B-\Delta A)\| + \|H(B+\Delta B)\| \sqrt{\varphi(H)}] > 0. \tag{5}$$

Тогда система (2) *асимптотически устойчива при произвольном отклонении аргумента* $\tau > 0$. *Причем для произвольного решения* $x(t)$ *системы выполняется неравенство* $|x(t)| < \varepsilon$, $t > 0$, *если* $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$. *Здесь*

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}, \tag{6}$$

$$\varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H), \quad \|H(B-\Delta A)\| = \max_{\Delta a_{ij}} \{|H(B-\Delta A)|\},$$

$$\|H(B+\Delta B)\| = \max_{\Delta b_{ij}} \{|H(B+\Delta B)|\}.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\alpha = \varepsilon^2 \lambda_{\min}(H)$. Тогда поверхность уровня ∂V^α функции Ляпунова $V(x) = x^T H x$ будет находиться внутри ε-окрестности положения равновесия и содержать $\delta(\varepsilon)$-шар, где $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}$, $\varphi(H) = \lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)$. Рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы (2) с начальными условиями $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon)$. Пусть, от противного, при некотором $T > 0$ решение $x(T)$ достигло поверхности уровня, т. е. $x(T) \in \partial V^\alpha$. Вычислим полную производную функции $V(x)$ в силу интервальной системы с запаздыванием

$$\dot V(x(t)) = -x^T(t)[-(A+B)^T H - H(A+B)]x(t) +$$
$$+ 2[x^T(t)(\Delta A - \Delta B)^T H x(t) + x^T(t-\tau)(B+\Delta B)^T H x(t)].$$

Если $-(A+B)^T H - H(A+B)$ — положительно определенная матрица, то

$$\dot V(x(t)) \le -\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)]|x(t)|^2 +$$
$$+ 2|H(B-\Delta A)||x(t)|^2 + 2|H(B+\Delta B)||x(t)||x(t-\tau)|.$$

По предположению при $t \in T$ выполняется $x(T) \in \partial V^\alpha$. Поскольку для функции квадратичного вида выполняются неравенства

$$\lambda_{\min}(H)|x|^2 \le V(x) \le \lambda_{\max}(H)|x|^2, \tag{7}$$

а при $t = T - \tau$ будет $x(T-\tau) \in V^\alpha$, то

$$|x(T-\tau)| \le \sqrt{\varphi(H)}\,|x(t)|. \tag{8}$$

Поэтому для полной производной функции Ляпунова справедливо

$$\dot V(x(t)) \le -\{\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] -$$
$$-2|H(B-\Delta A)| - 2|H(B+\Delta B)|\sqrt{\varphi(H)}\}|x(t)|^2.$$

И при выполнении условий (5) теоремы 2 полная производная будет отрицательно определенной. Это означает, что вектор движения $x(t)$ при $t = T$ направлен внутрь ∂V^α, и решение содержится в V^α и при $t > T$.

Условие (5) обеспечивает устойчивость, равномерную по отклонению аргумента $\tau > 0$. Можно не требовать его выполнения и получать асимптотическую устойчивость для запаздывания, зависящего от параметров системы. Предварительно приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть для решения* $x(t)$ *системы* (2) *выполняется* $\|x(0)\|_\tau < \delta$. *Тогда при* $0 \le t \le \tau$ *будет*

$$|x(t)| < (1 + \|B + \Delta B\|\tau)\delta e^{\|A + \Delta A\|\tau}, \tag{9}$$

где $\|B + \Delta B\| = \max\limits_{b_{ij}}\{|B + \Delta B|\}$, $\|A + \Delta A\| = \max\limits_{a_{ij}}\{|A + \Delta A|\}$.

Доказательство. Запишем систему (2) в виде

$$x(t) = x(0) + \int\limits_0^t [(A + \Delta A)x(S) + (B + \Delta B)x(S - \tau)]\, dS.$$

При $0 \le t \le \tau$ справедливо соотношение

$$|x(t)| < \delta + |A + \Delta A| \int\limits_0^t x(S)\, dS + |B + \Delta B|\delta\tau.$$

Используя неравенство Р. Беллмана, получаем (9).

Лемма 2. *Пусть для произвольного* $\alpha > 0$ *существует* $T > \tau$ *такое, что* $x(T) \in \partial V^\alpha$, *а при* $T - 2\tau \le S < T$: $x(S) \in V^\alpha$. *Тогда для решений* $x(t)$ *системы* (2) *выполняется неравенство*

$$|x(t) - x(t - \tau)| \le [\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|]\sqrt{\varphi(H)}\,\tau|x(T)|. \tag{10}$$

Доказательство. Запишем систему (2) в виде

$$x(t) = x(t - \tau) + \int\limits_{t-\tau}^t [(A + \Delta A)x(S) + (B + \Delta B)x(S - \tau)]\, dS.$$

Поскольку при $T - 2\tau \le S \le T$ будет $x(S) \in V^\alpha$, а $x(T) \in \partial V^\alpha$, то $|x(S)| < \sqrt{\varphi(H)}\,|x(T)|$. Следовательно,

$$|x(T) - x(T - \tau)| \le [|A + \Delta A| + |B + \Delta B|]\tau \max_{T - 2\tau \le S \le T}\{|x(S)|\} \le$$

$$\le [|A + \Delta A| + |B + \Delta B|]\sqrt{\varphi(H)}\,|x(T)|.$$

Отсюда следует неравенство (10).

Теорема 3. *Пусть* $(A + B)$ — *асимптотически устойчивая матрица и существует положительно определенная матрица* H, *при которой выполняется* (4). *Тогда при* $\tau < \tau_0$, *где*

$$\tau_0 = -\frac{\lambda_{\min}\left[-(A + B)^T H - H(A + B)\right] - 2\|H(\Delta A + \Delta B)\|}{2\|H(B + \Delta B)\|\left[\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|\right]\sqrt{\varphi(H)}}, \tag{11}$$

система (2) *будет асимптотически устойчивой. При этом для произвольного решения* $x(t)$ *будет выполняться* $|x(t)| < \varepsilon$, $t < 0$, *лишь только* $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$, *где*

$$\delta(\varepsilon, \tau) = \frac{e^{-\|A + \Delta A\|\tau}}{1 + \|B + \Delta B\|\tau}\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varphi(H)}}. \tag{12}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ положим $\alpha = \varepsilon^2\lambda_{\min}(H)$. Тогда поверхность уровня ∂V^α будет находиться внутри ε-окрестности положения равновесия и содержать $\delta_1(\varepsilon, \tau)$-шар, где $\delta_1(\varepsilon, \tau) = \varepsilon / \sqrt{\varphi(H)}$. Рассмотрим произвольное решение $x(t)$ системы (2), удовлетворяющее начальному условию $\|x(0)\|_\tau < \delta(\varepsilon, \tau)$, где функция $\delta(\varepsilon, \tau)$ выбирается согласно (12). Тогда, как следует из леммы 1, при $-\tau \le t < \tau$ для него будет справедливо неравенство $|x(t)| < \delta_1(\varepsilon, \tau)$. Покажем, что при всех $t > \tau$ $x(t) \in \partial V^\alpha$. Пусть, от противного, при некотором $T > \tau$ решение $x(t)$ выйдет на границу, т. е. $x(T) \in \partial V^\alpha$. Оценим полную производную функции Ляпунова $V(x) = x^T H x$ в силу системы (2)

$$\dot V(x(t)) = -x^T(t)[-(A+B)^T H - H(A+B)]x(t) +$$
$$+ 2x^T(t) H(\Delta A + \Delta B)x(t) + 2x^T(t) H(B + \Delta B)[x(t-\tau) - x(t)],$$

или

$$\dot V(x(t)) \le -\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)]|x(t)|^2 +$$
$$+ 2|H(\Delta A + \Delta B)||x(t)|^2 + 2|H(B+\Delta B)||x(t)||x(t-\tau) - x(t)|.$$

При $t = T$, как следует из неравенства (10), будет выполняться

$$\dot V(x(T)) \le -\{\lambda_{\min}[-(A+B)^T H - H(A+B)] - 2|H(\Delta A + \Delta B)| -$$
$$- 2|H(B+\Delta B)|[\|A + \Delta A\| + \|B + \Delta B\|]\sqrt{\varphi(H)}\,\tau\}|x(T)|^2$$

и при $\tau < \tau_0$, где τ_0 определено в (11), полная производная будет отрицательно определенной. Таким образом при $\tau < \tau_0$ векторное поле системы направлено внутрь ∂V^α и $|x(t)| < \varepsilon$ при всех $t > 0$.

1. *Джури Е. И.* Робастность дискретных систем. Обзор // Автоматика и телемеханика. – 1990. – № 5. – С. 3–28.
2. *Харитонов В. Л.* Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, №11. – С. 2086 – 2088.
3. *Харитонов В. Л.* Об обобщении критерия устойчивости // Изв. АН КазССР. – 1978. – **14**, № 11. – С. 2086 – 2088.
4. *Гусев Ю. М., Ефанов В. Н., Крымский В. Г., Рутковский В. Ю.* Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ устойчивости интервальных матриц и синтез робастных регуляторов // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1991. – № 2. – С. 3–30.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. –421 с.
6. *Хусаинов Д. Я., Шарковский А. Н.* Об устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Функцион. и дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. – С. 141–147.
7. *Хусаинов Д. Я., Юнькова Е. А.* Оценка величины запаздывания в линейных дифференциальных системах с отклоняющимся аргументом // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, №2. – С. 261–264.
8. *Хусаинов Д. Я.* Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференц. уравнения. – 1989. – **25**, №9. – С. 1631–1633.
9. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.
10. *Te-Jen Su, Chuan–Guey Huang.* Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1992. – **37**, №10. – P. 1656–1659.

Получено 28.10.93