УДК 519. 21, 517. 98

М. Ф. Городний, канд. физ.-мат. наук,
А. Я. Дороговцев, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Sufficient conditions for existence of bounded solutions of operator difference equations with quadratic nonlinearity are given.

Наведено достатні умови існування обмежених розв'язків різницевих операторних рівнянь з квадратичною нелінійністю.

Настоящая статья посвящена изучению свойств решений одного класса нелинейных разностных уравнений, а именно: уравнений — разностных аналогов уравнения Риккати. Такие уравнения часто встречаются в современных приложениях, к ним приводит также дискретизация некоторых нелинейных дифференциальных уравнений математической физики (см., например, [1, 2] и имеющиеся там ссылки). Методом исследования является метод работы [3] с естественными модификациями.

1. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть $(B, \|\cdot\|)$ — комплексное банахово пространство; $\mathcal{L}(B)$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из B в B; E — единичный и O — нулевой операторы в B; $\|T\|$ — норма $T \in \mathcal{L}(B)$, а $\sigma(T)$ и $\rho(T)$ обозначают соответственно спектр и резольвентное множество оператора T. Далее используются следующие предположения:

a) A — замкнутый линейный оператор, действующий в B и имеющий множество определения $\mathcal{D}(A)$;

b) последовательность операторов $\{F(n) \colon n \in Z\} \subset \mathcal{L}(B)$ такова, что

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}} \| F(n) \|^{1/|n|} < 1. \qquad (1)$$

Отметим, что при условии (1) операторнозначная функция

$$\mathcal{F}(z) := \sum_{n\in Z} F(n) z^n, \quad z \in C,$$

аналитична в некотором кольце вида $\{ z \mid s_0 < |z| < s_1 \}$, где $0 < s_0 < 1 < s_1$, а также то, что

$$f := \sum_{n\in Z} \| F(n) \| < +\infty;$$

c) для набора операторов $\{ G(j, k) \mid (j, k) \in Z^2 \} \subset \mathcal{L}(B)$ выполняется условие

$$g := \sum_{(j,k)\in Z^2} \| G(j, k) \| < +\infty. \qquad (2)$$

Для заданной последовательности $Y := \{ Y(n) \colon n \in Z \} \subset \mathcal{L}(B)$ рассмотрим уравнение

$$AX(n) = \sum_{j\in Z} F(j) X(n+j) +$$

$$+\sum_{(j,k)\in Z^2} X(n+j)G(j,k)X(n+k)+Y(n), \quad n\in Z, \tag{3}$$

относительно последовательности $X:=\{X(n): n\in Z\}\subset \mathcal{L}(B)$.

Последовательность операторов $X=\{X(n): n\in Z\}\subset \mathcal{L}(B)$ назовем ограниченной, если

$$\|X\|_\infty := \sup_{n\in Z}\|X(n)\| < +\infty.$$

Определение. *Последовательность $X=\{X(n): n\in Z\}\subset \mathcal{L}(B)$ называется соответствующим последовательности $Y=\{Y(n): n\in Z\}\subset \mathcal{L}(B)$ решением уравнения* (3), *если*

$$\forall\, n\in Z: X(n): B\to \mathcal{D}(A), \quad AX(n)\in \mathcal{L}(B) \tag{4}$$

и выполнены операторные равенства (3).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть последовательность $X=\{X(n): n\in Z\}$ из $\mathcal{L}(B)$ удовлетворяет условию* (4) *и, кроме того,*

$$\sum_{j\in Z}(\|X(n)\|+\|AX(n)\|) < +\infty.$$

Тогда оператор $\sum_{n\in Z} X(n)$ действует из B в $\mathcal{D}(A)$ и

$$A\sum_{n\in Z} X(n) = \sum_{n\in Z} AX(n).$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех последовательностей $\{c(\nu): \nu\in Z\}\subset \mathcal{L}(B)$ таких, что:

i) $\forall\, \nu\in Z: c(\nu): B\to \mathcal{D}(A)$;

ii) $\forall\, \nu\in Z: Ac(\nu)=c(\nu)A$ на $\mathcal{D}(A)$ и $Ac(\nu)\in \mathcal{L}(B)$;

iii) $\overline{\lim\limits_{|n|\to\infty}}\|c(n)\|^{1/|n|}<1, \quad \overline{\lim\limits_{|n|\to\infty}}\|Ac(n)\|^{1/|n|}<1.$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия a) и b). Если для каждой ограниченной последовательности $Y=\{Y(n): n\in Z\}$ уравнение*

$$AU(n) = \sum_{j\in Z} F(j)U(n+j)+y(n), \quad n\in Z, \tag{5}$$

имеет единственное ограниченное решение $U=\{U(n): n\in Z\}$, то

$$\forall\, z\in C,\ |z|=1:\ 0\in \rho(A-\mathcal{F}(z)). \tag{6}$$

Если условие (6) *выполнено, то для каждой ограниченной последовательности Y уравнение* (5) *имеет единственное ограниченное решение вида*

$$U(n) = \sum_{\nu\in Z} c(\nu-n)Y(\nu), \quad n\in Z, \tag{7}$$

с набором $\{c(\nu): \nu\in Z\}\in \mathcal{A}$.

Доказательство леммы 2 проводится с использованием леммы 1 по плану доказательства теоремы 5 из [4, с. 10] для аналогичного уравнению (5) уравнения в банаховом пространстве. Положим для набора $\{c(\nu): \nu\in Z\}$ из леммы 2

$$c := \sum_{k \in Z} \| c(k) \|,$$

$c < +\infty$ в силу принадлежности набора классу $\mathcal{Я}$.

2. Основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что выполнены условия a) – c), соотношение* (6) *и для ограниченной последовательности* $Y = \{ Y(n) : n \in Z \}$ *неравенство*

$$4 c^2 g \| Y \|_\infty \le 1. \tag{8}$$

Тогда уравнение (3) *имеет ограниченное решение* $X = \{ X(n) : n \in Z \}$.

Доказательство. Пусть $Y = \{ Y(n) : n \in Z \}$ — ограниченная последовательность; положим $Y_0(n) := Y(n), n \in Z$; $Y_0 := Y$. Условия леммы 2 выполнены и для последовательности $Y_0 = Y$, уравнение (5) имеет единственное решение $X_0 = \{ X_0(n) : n \in Z \}$ вида (7), причем

$$\| X_0 \|_\infty \le c \| Y \|_\infty. \tag{9}$$

Положим

$$Y_1(n) := \sum_{(j,k) \in Z^2} X_0(n+j) G(j,k) X_0(n+k), \quad n \in Z, \tag{10}$$

тогда

$$\| Y_1 \|_\infty \le c^2 g \| Y \|_\infty^2 \tag{11}$$

Пусть $X_1 = \{ X_1(n) : n \in Z \}$ — единственное ограниченное решение уравнения (5) для $Y = Y_1$, при этом с учетом (9)

$$\| X_1 \|_\infty \le c^3 g \| Y \|_\infty^2. \tag{12}$$

Построим теперь последовательность $X_m = \{ X_m(n) : n \in Z \}$, $m \ge 0$, следующим образом. Предположим, что для $m \ge 2$ последовательности $X_0, X_1, \ldots$ $\ldots, X_{m-1}$ определены как решения вида (7) соответственно уравнений

$$A X_k(n) = \sum_{j \in Z} F(j) X_k(n+j) + Y_k(n), \quad n \in Z; \quad 0 \le k \le m-1, \tag{13}$$

где

$$Y_k(n) := \sum_{(r,s) \in Z^2} \sum_{j=0}^{k-1} X_{k-1-j}(n+r) G(r,s) X_j(n+s), \; n \in Z; \; 1 \le k \le m-1, \tag{14}$$

причем

$$\| X_k \|_\infty \le \frac{1}{k+1} C_{2k}^k c^{2k+1} g^k \| Y \|_\infty^{k+1}, \quad 0 \le k \le m-1. \tag{15}$$

Заметим, что X_1 определено согласно формулам (13) и (14), а неравенство (15) сводится в этом случае к оценке (12). Определим с помощью $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$ последовательность Y_m формулой, аналогичной (14). Из оценок (15) и тождества 11а) из [5, с. 123] имеем

$$\| Y_m \|_\infty \le g \sum_{j=0}^{m-1} \| X_{m-j-1} \|_\infty \| X_j \|_\infty \le$$

$$\leq g \sum_{j=0}^{m-1} \left(\frac{1}{m-j} C_{2(m-1-j)}^{m-1-j} c^{2(m-1-j)+1} g^{m-1-j} \| Y \|_\infty^{m-j} \right) \frac{1}{j+1} C_{2j}^{j} c^{2j+1} g^j \| Y \|_\infty^{j+1} =$$

$$= c^{2m} g^m \| Y \|_\infty^{m+1} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(m-j)(j+1)} C_{2(m-1-j)}^{m-1-j} C_{2j}^{j} =$$

$$= \frac{1}{m+1} C_{2m}^{m} c^{2m} g^m \| Y \|_\infty^{m+1}. \qquad (16)$$

Для $m = 1$ оценка (16) сводится к неравенству (11). С ограниченной последовательностью Y_m рассмотрим уравнение (13) при $k = m$; пусть X_m — его ограниченное решение вида (7). Согласно (9) и оценке (16) для $\| X_m \|_\infty$ справедливо неравенство (15) при $k = m$. Таким образом, построена последовательность X_k, $k \geq 0$, решений уравнений (13) с $k \geq 0$, для которых справедливы оценки (15) с $k \geq 0$.

Положим

$$X(n) := \sum_{k=0}^{\infty} X_k(n), \quad n \in Z. \qquad (17)$$

С учетом оценки (15) для ряда (17) имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| X_k \|_\infty \leq c \| Y \|_\infty \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} C_{2k}^{k} (c^2 g \| Y \|_\infty)^k. \qquad (18)$$

Поскольку $C_{2k}^k \sim 4^k / \sqrt{\pi k}$, $k \to \infty$, то при условии (8) ряд в (18) сходится, следовательно, сходится ряд в (17), операторы $X(n)$, $n \in Z$, определены и образуют ограниченную последовательность $X = \{ X(n) : n \in Z \}$.

Согласно определению решения уравнений (13) для каждого $k \geq 0$

$$\forall n \in Z : X_k(n) : B \to \mathcal{D}(A), \quad A X_k(n) \in \mathcal{L}(B). \qquad (19)$$

Докажем, что для каждого $n \in Z$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A X_k(n) \| < +\infty.$$

Сначала аналогично оценке (18) проверяем, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| Y_k \|_\infty < +\infty, \qquad (20)$$

а согласно равенствам (13) при $k \geq 0$ имеем для каждого $n \in Z$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A X_k(n) \| \leq f \sum_{k=0}^{\infty} \| X_k \|_\infty + \sum_{k=0}^{\infty} \| Y_k \|_\infty. \qquad (21)$$

С учетом (18), (20) правая часть (21) конечна. Из (19) и леммы 1 теперь следует, что для каждого $n \in Z$

$$X_n(n) : B \to \mathcal{D}(A), \quad A X(n) = \sum_{k=0}^{\infty} A X_k(n). \qquad (22)$$

Принимая во внимание соотношение (22), просуммируем по $k \geq 0$ равенства (13). Получаем для каждого $n \in Z$

$$AX(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in Z} F(j) X_k(n+j) \right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{(r,s) \in Z^2} \sum_{j=0}^{k-1} X_{k-1-j}(n+r) G(r,s) X_j(n+s) \right) + Y(n) =$$

$$= \sum_{j \in Z} F(j) X(n+j) + \sum_{(r,s) \in Z^2} X(n+r) G(r,s) X(n+s) + Y(n).$$

Тем самым доказано, что X — решение уравнения (3). Теорема 1 доказана.

3. Операторная цепочка Вольтерра. Важным частным случаем уравнения (3) является следующее уравнение:

$$AX(n) = X(n)(X(n+1) - X(n-1)) + Y(n), \quad n \in Z, \tag{23}$$

не включающее в правой части линейный член относительно $X = \{X(n) : n \in$ $\in Z\}$. В случае уравнения (23) вместо леммы 2 можно воспользоваться следующим включающим более слабое ограничение утверждением.

Лемма 3. *Уравнение*

$$AX(n) = Y(n), \quad n \in Z, \tag{24}$$

имеет ограниченное решение $X = \{X(n) : n \in Z\}$ *для каждой ограниченной последовательности* $Y = \{Y(n) : n \in Z\}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, W \in \mathcal{L}(B) : W : B \to \mathcal{D}(A) \;\; и \;\; AW = E \;\; на \;\; B. \tag{25}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $Y(n) = E$, $n \in Z$. Тогда $W := X(0)$.

Достаточность. Пусть W — оператор из (25). Тогда $X(n) := WY(n)$, $n \in Z$, — решение уравнения (24), отвечающее последовательности Y.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены условия а), (25) и неравенство*

$$8\|W\|^2 \|Y\|_\infty \le 1 \tag{20}$$

для последовательности $Y = \{Y(n) : n \in Z\}$. *Тогда уравнение* (23) *имеет ограниченное решение* $X = \{X(n) : n \in Z\}$.

Доказательство теоремы 2 проводится по плану доказательства теоремы 1 с использованием вместо (9) неравенства

$$\|X\|_\infty \le \|W\| \, \|Y\|_\infty$$

для решения уравнения (24). Неравенство (26) играет роль, аналогичную условию (8).

Замечание. При выполнении условий теоремы 1 для существования ограниченного решения уравнения (23) нужно потребовать, чтобы $0 \in \rho(A)$. В этом случае оператор W существует и равен A^{-1}. В следующем пункте приведен пример оператора A, для которого оператор W существует, но $0 \,\overline{\in}\, \rho(A)$.

4. Примеры.

***Пример* 1.** Пусть $B_1 := C([0,1], C) \cap \{x \,|\, x(0) = 0\}$ с равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$ и l_2 с обычной нормой $\|\cdot\|_2$; положим $B := l_2 \times B_1$ с нормой $\|(\xi, x)\| := \|\xi\|_2 + \|x\|_\infty$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots) \in l_2$ и $x \in B_1$. Для

$$\mathcal{D}(A) := l_2 \times (B_1 \cap C^1([0,1], C)) \tag{27}$$

значение оператора A в точке $(\xi, x) \in \mathcal{D}(A)$ положим равным $A(\xi, x) := ((\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, \ldots), x'(\cdot))$. Для оператора A число $0 \in \sigma(A)$, но оператор W существует и имеет вид

$$W(\xi, x) = \left((0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots), \int_0^t x(s)\,ds \right).$$

Следующие примеры касаются встречающегося в ряде прикладных задач уравнения

$$AX(n) = aX(n-1)(E + X(n)) + Y(n), \quad n \in Z, \tag{28}$$

где $a \in C$, $a \neq 0$.

***Пример* 2.** Пусть $B = B_1$ с равномерной нормой, где B_1 — пространство из примера 1, а оператор A определен равенством $(Ax)(t) = x'(t)$, $t \in [0, 1]$, $x \in B$. Тогда $\rho(A) = C$ и для каждого z, $|z| = 1$, оператор $\Phi(z) := (A - azE)^{-1}$ имеет вид

$$(\Phi(z)x)(t) = \int_0^t e^{az(t-u)} x(u)\,du, \quad x \in B.$$

Поэтому

$$c(j) = O, \quad j \leq -1;$$

$$(c(j)x)(t) = \frac{a^j}{j!} \int_0^t (t-u)^j x(u)\,du, \quad x \in B, \quad j \geq 0,$$

$$c = \frac{1}{|a|}(e^{|a|} - 1).$$

Заметим, что постоянная c в неравенстве $\|X\|_\infty \leq c\|Y\|_\infty$ неулучшаема. Действительно, для $Y(n) = e^{in\theta}E$, $n \in Z$, $\theta = \arg a$, имеем

$$\|Y\|_\infty = 1, \quad \|X\|_\infty = \frac{1}{|a|}(e^{|a|} - 1).$$

В этом примере $g = |a|$, а условие (8) теоремы 1 принимает вид

$$4\frac{1}{|a|}(e^{|a|} - 1)^2 \|Y\|_\infty \leq 1.$$

***Пример* 3.** Пусть $B = C([0, 1], C) \cap \{x \mid x(0) = x(1)\}$ с равномерной нормой и

$$(Ax)(t) = x'(t), \; t \in [0, 1]; \quad x \in \mathcal{D}(A) := B \cap C^1([0, 1], C). \tag{29}$$

При этом A — замкнутый оператор со спектром $\sigma(A) = 2\pi i Z$, а для любого $\lambda = \mu + i\nu \in \rho(A)$, $\mu \in \boldsymbol{R}$, $\nu \in \boldsymbol{R}$, оператор $\Phi(\lambda) := (A - \lambda E)^{-1}$ определяется равенством

$$\Phi(\lambda)(x)(t) = \frac{1}{1 - e^{\lambda}} \int_0^t e^{\lambda(t-u)} x(u)\,du +$$

$$+ \frac{e^{\lambda}}{1 - e^{\lambda}} \int_t^1 e^{\lambda(t-u)} x(u)\,du, \quad t \in [0, 1], \quad x \in B.$$

и имеет норму

$$\|\Phi(\lambda)\| = \frac{e^{|\mu|}-1}{|\mu|\,(e^{2|\mu|}-2e^{|\mu|}\cos\nu+1)^{1/2}}$$

для случая $\mu \neq 0$ и

$$\|\Phi(\lambda)\| = (2-2\cos\nu)^{-1/2}, \quad \mu = 0.$$

Для любого фиксированного целого $p \geq 0$ число $a := (2\pi p + (7\pi/4)) \in$ $\in \rho(A)$, а коэффициенты в разложении $\Phi(az)$ легко определяются и приводят к следующей оценке для числа c:

$$c \leq 6(8p+7)\sqrt{2+\sqrt{3}}\,.$$

Поэтому условие (8) теоремы 1 выполнено, если

$$12(8p+7)\sqrt{2+\sqrt{3}}\left(2\pi p+\frac{7}{4}\pi\right)^{1/2}\|Y\|_{\infty}^{1/2} \leq 1.$$

1. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально–разностные уравнения. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. – 168 с.
2. *Верещагин В. П.* Спектральная теория однофазных решений цепочки Вольтерра // Мат. заметки. – 1990. – **48**, вып. 2. – С. 145–147.
3. *Дороговцев А. Я.* О периодических и ограниченных решениях операторного уравнения Риккати // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 239–242.
4. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. – Киев: Вища шк., 1992. – 320 с.
5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Получено 06.04.94