УДК 517.5

Ю. В. Крякин, канд. физ.-мат. наук (Одес. политех. ун-т),
М. Д. Такев, д-р наук (Софий. ун-т)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ КОНСТАНТЫ УИТНИ

New estimates of interpolate Whitney constants are proved.

Доведені нові оцінки інтерполяційних констант Уітні.

1. Введение. Для функции, определенной на $I = [0, 1]$, положим

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x + jh).$$

В 1957 г. Х. Уитни [1] доказал следующий, ставший классическим, результат.

Теорема А. *Для любого натурального $n \geq 1$ найдется положительное число $W(n)$ такое, что если функция $f(x)$ непрерывна на I, то существует алгебраический полином P_f степени не выше $n-1$, для которого*

$$\sup_{x \in I} |f(x) - P_f(f; x)| \leq W(n) \sup_{y,\, y+nh \in I} |\Delta_h^n f(y)|.$$

При доказательстве теоремы А Х. Уитни использовал интерполяционный полином по равномерной сетке: $P(i/(n-1)) = f(i/(n-1))$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Константа в этом случае обозначается $W'(n)$.

В 1982 г. Б. Сендов [2] выдвинул гипотезу об ограниченности констант $W(n)$ единицей и констант $W'(n)$ двойкой. Гипотеза Сендова выглядела достаточно смелой — оценки констант при больших n были весьма грубыми: $W(n) \leq \leq \text{const}\,(n)^{2n}$ (Ю. А. Брудный [3]). В 1985 г. удалось существенно улучшить известные ранее оценки (см. работы К. Иванова, М. Такева [4] $(W(n) \leq cn \ln(n))$, П. Бинева [5] $(W(n) \leq cn)$ и Б. Сендова [6] $(W(n) \leq \text{const})$). В 1986 г. Б. Сендов доказал [7], что $W(n) \leq 6$. В 1989 г. Б. Сендов [8], Ю. А. Брудный [9] и Ю. В. Крякин [10] независимо доказали неравенство $W(n) \leq 3$. В 1993 г. оценку $W(n)$ удалось понизить еще на 1 [11]: $W(n) \leq 2$. Что касается интерполяционных констант $W'(n)$, то непосредственно из ограниченности констант Уитни $W(n)$ вытекало неравенство $W'(n) \leq \text{const} \ln(n)$ [12, с. 55].

Недавно М. Такев, опираясь на результат Б. Сендова $W(n) \leq 6$, установил, что $W'(n) \leq 38$ [13].

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C(I)$, $Q_{n-1}(f; x)$ — интерполяционный многочлен в случае равномерной сетки узлов*

$$f(i/(n-1)) = Q_{n-1}(f; i/(n-1)), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\sup_{x \in I} |f(x) - Q_{n-1}(f; x)| \leq 5\,\omega_n(f),$$

где

$$\omega_n(f) = \sup_{y,\, y+h \in I} |\Delta_h^n f(y)|.$$

2. Вспомогательные утверждения. Введем обозначения, которые будем использовать в дальнейшем:

$$\alpha_i = \begin{cases} (n-1-i)/(n-1), & i \geq (n-1)/2; \\ i/(n-1), & i \leq (n-1)/2, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \dbinom{n}{i}, & i \leq (n-1)/2; \\ \dbinom{n}{i+1}, & i \geq (n-1)/2, \end{cases}$$

$$l_{n,j}(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (t-k)/(j-k), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_j = 1 + \dots + 1/j,$$

$$A_i(n,x) = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}^{-1} (j/i) \int_{nix}^{i} | \, l'_{n,j}(t)_t \, dt \, |,$$

$$L_{n,i}(y) = \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} | \, l_{n-1,i}(y) |,$$

$$q_i = i/(n-1).$$

Ключевым вспомогательным утверждением является приведенное ниже интегральное тождество.

Лемма А [11; 14, с. 47; 15]. *Пусть* $f \in L^1(I)$, $n \in N$ *и* $\int_0^{i/n} f(t)\,dt = 0$, $i = 0, \dots, n$. *Тогда для* $x \in [1/(n+1), 1/n]$

$$f(ix) = \varphi_i(x) - \int_x^{1/n} \sum_{j=1}^{n} (j/i) \varphi_j(y) \big(l_{n,j}(ix/y) \big)'_x \, dy,$$

где

$$\varphi_i(x) = (-1)^i \binom{n}{i}^{-1} (1/x) \int_0^x \Delta_y^n f(i/(x-y)) \, dy.$$

Лемма А и следующая ниже лемма позволяют оценить величины $A_i(n,x)$.

Лемма Б [15, 16]. *Для* $x \in [1/(n+1), 1/n]$

$$A_i(n,x) \leq \binom{n}{i}^{-1} \max_{0 \leq t \leq i-nix} \exp\{t(\sigma_{n-i} - \sigma_i)\} +$$

$$+ 2C \max_{0 \leq t \leq i-nix} t \exp\{t(\sigma_{n-i} - \sigma_i + 1)\},$$

где

$$C = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{j}{|j-i| i} \leq \sigma_{i-1} + \sigma_{n-i} + (n-2i+1)/i.$$

Из лемм А и Б вытекает следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\int_0^{i/n} f(x)\,dx = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, *и* $\omega_n(f) \leq 1$. *Тогда*

$$|f(q_0)| \leq 1, \quad |f(q_{n-1})| \leq 1,$$

$$|f(q_i)| \le \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}^{-1} \left\{1 + \frac{n+1}{n}\left(1 + 4\alpha_i \sigma_{n-1} e^{1/2}\right)\right\}.$$

Доказательство. В силу симметрии достаточно ограничиться случаем $i \ge$ $\ge (n-1)/2$. Считая $x \in [1/(n+1), 1/n]$, из леммы А выводим

$$|f(ix)| \le |\varphi_i(x)| + \left| \int\limits_x^{1/n} \sum_{j=1}^{n} |(j/i)\varphi_j(y)| \left|\left(l'_{n,j}(ix/y)\right)_x\right| dy \right| \le$$

$$\le \binom{n}{i}^{-1} + \int\limits_{nix}^{i} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}^{-1} (j/i) \left| l'_{n,j}(t)_t \frac{dy}{dx} \right| dt \le$$

$$\le \binom{n}{i}^{-1} + \frac{n+1}{n} \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j}^{-1} (j/i) \int\limits_{nix}^{i} |l'_{n,j}(t)_t| dt = \binom{n}{i}^{-1} + \frac{n+1}{n} A_i(n, x).$$

Используя лемму Б, получаем

$$|f(1)| = |f(q_{n-1})| \le 1,$$

$$|f(q_i)| = |f((i+1)i/((n-1)(i+1)))| \le$$

$$\le \binom{n}{i+1}^{-1} + \frac{n+1}{n} A_{i+1}(n, i/((n-1)(i+1))) \le$$

$$\le \binom{n}{i+1}^{-1} \left(1 + \frac{n+1}{n}\left(1 + 4\alpha_i \sigma_{n-1} e^{1/2}\right)\right).$$

Следующие две леммы связаны с оценками интерполяционных полиномов для функций, экспоненциально убывающих при приближении к середине отрезка.

Лемма 2. *Для любого* $y \in (n-1)I$ *справедлива оценка*

$$|l_{n-1,i}(y)| \le \frac{1}{i}\binom{n-1}{i} \frac{1}{ie(\sigma_{n-1} - 1)}.$$

Доказательство. Имеем

$$|l_{n-1,i}(y)| = \left| \frac{y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1)}{(y-i)i!(n-1-i)!} \right| \le$$

$$\le \left| \frac{1}{y-i} \frac{1-y/i}{1-y} \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} y(1-y)(1-y/2)\dots(1-y/(n-1)) \right| \le$$

$$\le \frac{1}{i}\binom{n-1}{i} y \exp\{-(\sigma_{n-1} - 1)y\} \le \frac{1}{i}\binom{n-1}{i} (ie(\sigma_{n-1} - 1))^{-1}.$$

Лемма 3. *Для любого* $y \in (n-1)I$

А) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} L_{n,i}(y) \le 1;$

Б) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} L_{n,i}(y) \le \frac{\sigma_{n-1}}{e(\sigma_{n-1} - 1)};$

В) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i L_{n,i}(y) \le \frac{1}{2e(\sigma_{n-1}-1)}.$

Доказательство. Так как

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \ge \binom{n-1}{i},$$

то неравенство А следует из известной оценки [7]:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}^{-1} |l_{n-1,i}(y)| \le 1.$$

Неравенство Б вытекает из леммы 2.

Для доказательства неравенства В заметим, что из оценок

$$\alpha_i i^{-1} \binom{n}{i}^{-1} \binom{n-1}{i} = \frac{n-i}{n(n-1)}, \quad i \le \frac{n-1}{2},$$

$$\alpha_i i^{-1} \binom{n}{i+1}^{-1} \binom{n-1}{i} \le \frac{n-i}{n(n-1)}, \quad i \ge \frac{n-1}{2},$$

с учетом леммы 2 получаем

$$\sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i L_{n,i}(y) \le \frac{1}{n(n-1)e(\sigma_{n-1}-1)} \sum_{i=1}^{n-2} (n-i) \le \frac{1}{2e(\sigma_{n-1}-1)}.$$

3. Доказательство основного результата. Предположив $\omega_n(f) \le 1$, докажем, что

$$|f(x) - Q_{n-1}(f; x)| \le 5, \quad x \in I.$$

При этом используем „интерполяционные в среднем” многочлены, которые определяются условиями

$$\int_0^{i/n} (f(x) - P_{n-1}(f; x))\, dx = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$|f(x) - Q_{n-1}(f; x)| \le |f(x) - P_{n-1}(f; x) - Q_{n-1}(f; x) + P_{n-1}(f; x)| \le$$

$$\le |f(x) - P_{n-1}(f; x)| + |Q_{n-1}(f - P_{n-1}; x)|.$$

В работе [11] приведена оценка для первого слагаемого

$$|f(x) - P_{n-1}(f; x)| \le 2.$$

Наша задача — оценить

$$|Q_{n-1}(f - P_{n-1}; x)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(q_i) - P_{n-1}(f; q_i)]\, l_{n-1,i}((n-1)x) \right|. \tag{1}$$

Так как

$$\int_0^{i/n} (f(x) - P_{n-1}(f; x))\, dx = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

то для оценки $|f(q_i)-P_{n-1}(f;q_i)|$ применим лемму 1 и с учетом леммы 3 получим

$$|Q_{n-1}(f-P_{n-1};x)| \le$$

$$\le \sup_{y\in(n-1)I}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}L_{n,i}(y)+\frac{n+1}{n}\sum_{i=1}^{n-2}(1+4e^{1/2}\sigma_{n-1}\alpha_i)L_{n,i}(y)\right\}\le$$

$$\le 1+\frac{n+1}{n}\frac{\left(e^{-1}+2e^{-1/2}\right)\sigma_{n-1}}{\sigma_{n-1}-1}\le 3,\quad n\ge 100.$$

При $n\le 100$ справедливость утверждения проверяется непосредственным вычислением суммы (1).

4. Некоторые близкие результаты. Теорема 2. *Пусть* $f(x)\in C(I)$ *и* $R_{n-1}(f;x)$ — *алгебраический многочлен степени не выше* $n-1$ $(n\ge 2)$ *такой, что*

$f(i/n)=R_{n-1}(f;i/n),\ i=0,\dots,n,\ i\ne k$ *при* $n=2k$;
$f(i/n)=R_{n-1}(f;i/n),\ i=0,\dots,n,\ i\ne k,k+1$ *при* $n=2k+1$;

$$f(1/2)=R_{n-1}(f;1/2).$$

Тогда

$$\sup_{x\in I}|f(x)-R_{n-1}(f;x)|\le 3\sup_{y,\,y+nh\in I}|\Delta_h^n f(y)|.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только вместо неравенства

$$\sup_{x\in I}|Q_n(f-P_{n-1};x)|\le 3\sup_{y,\,y+nh\in I}|\Delta_h^n f(y)|$$

используется оценка

$$\sup_{x\in I}|R_n(f-P_{n-1};x)|\le \sup_{y,\,y+nh\in I}|\Delta_h^n f(y)|. \tag{2}$$

Доказательство (2) основано на неравенствах (считаем $\omega_n(f)\le 1$)

$$f(i/n)-P_{n-1}(i/n)\le \binom{n}{i}^{-1},\quad i=0,\dots,n, \tag{3}$$

$$f(1/2)-P_{n-1}(1/2)\le \sigma_{(n-1)/2}\binom{n}{(n-1)/2}^{-1},\quad n=2k+1.$$

Первое неравенство — непосредственное следствие леммы А, второе получается с помощью усреднения по узлам разностей с неподвижным центральным узлом в точке $1/2$.

Рассмотрим случай $n=2k$. Ввиду (3) доказательство (2) сводится к оценке функции

$$g(x)=\left|\frac{x(1-x)\dots(n-x)}{n!}\frac{1}{n/2-x}\right|\sum_{\substack{j=0\\ j\ne n/2}}^{n}\frac{|j-n/2|}{|j-x|}$$

при $0\le x\le n$.

Максимальное значение функция принимает на отрезке $[0,1/2]$ ($[n-$

$-1/2, n]$). Непосредственно вычисляя величину $g(x)$ при $n \le 100$, получаем $g(x) \le g(0) = 1$.

При больших n оценка сохраняется — нетрудно показать, что при $0 \le x \le$ $\le 1/2$

$$g(x) \le e^{-\sigma_n x}\left(x\sigma_n + \frac{x}{1-x} + \frac{n/2}{n/2-x}\right) \le 1.$$

Аналогично рассматривается случай $n = 2k+1$.

Теорема 3. *Пусть многочлен* $G_{n-1}(x)$ *интерполирует функцию в точках* $\{x_i\}_0^{n-1}$ *почти равномерного разбиения* I: $1/Cn \le |x_i - x_{i+1}| \le C/n$, $x_0 = 0$, $x_{n-1} = 1$. *Тогда*

$$|f(x) - G_{n-1}(x)| \le W(C)\sup|\Delta_h^n f(y)|, \quad x \in I;\ y, y+nh \in I.$$

Доказательство. Достаточно заметить, что:

1) с учетом леммы А имеем

$$f(x) \le \operatorname{const}\sigma_n \binom{n}{i}^{-1}, \quad x \in [\,i/(n+1), i/n];$$

2) базисные полиномы формулы Лагранжа $l_n(x, x_j)$ в случае почти равномерного разбиения отличаются от $l_{n,j}(x)$ множителем, зависящим только от C.

1. *Whitney H.* On functions with bounded n-th differences // J. Mat. Pure and Appl. – 1957. – **36**. – P. 67–95.
2. *Sendov B.* On the constants of H. Whitney // C. R. Acad. Bul. Sci. – 1982. – **35**. – P. 431–434.
3. *Брудный Ю. А.* Об одной теореме локальных наилучших приближений // Уч. зап. Казан. ун-та. – 1964. – **124**, № 6. – С. 43–49.
4. *Ivanov K., Takev M.* $O(n \ln(n))$ bounds of constants of H. Whitney // C. R. Acad. Bul. Sci. – 1985. – **38**, № 9. – P. 1129–1131.
5. *Binev P.* $O(n)$ bounds of Whitney constants // Ibid. – № 10. – P. 1315–1317.
6. *Sendov Bl.* The constants of H. Whitney are bounded // Ibid. – № 10. – P. 1299–1302.
7. *Sendov Bl.* On the theorem and constants of Whitney // Construct. Approxim. – 1987. – **3**. – P. 1–11.
8. *Sendov B., Popov V.* The average moduli of smoothness. – New York: J. Wiley & Sons, 1988. – 310 p.
9. *Брудный Ю. А.* Константы Уитни // Соврем. пробл. теории функций: Тез. докл. Всесоюз. шк.-конф. (Баку, 19–29 мая 1989 г.). – Баку, 1989. – С. 24.
10. *Крякин Ю. В.* О константах Уитни // Мат. заметки. – 1989. – **46**, № 2. – С. 155–157.
11. *Крякин Ю. В.* Константы Уитни, ограниченные двойкой // Там же. – 1993. – **5**, № 53. – С. 158–160.
12. *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости. – М.: Мир, 1988. – 328 с.
13. *Takev M.* On the theorem of Whitney–Sendov // Constructive theory of functions: Proc. … Int. conf. (Varna, May 28 – June 3, 1991). – Sofia, 1992. – P. 269–275.
14. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
15. *Kryakin Yu. V.* On the theorem of H. Whitney in L_p // Mathematica Balkanica. – 1990. – Fasc. 4. – P. 158–171.
16. *Крякин Ю. В., Коваленко Л. Г.* О теореме Уитни в метрике L_p // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 1. – С. 69–77.

Получено 16.03.94