УДК 512. 554

**А. П. Петравчук,** канд. физ.-мат. наук (Центр НТТМ Киев. ун-та)

# О СУММЕ ДВУХ АЛГЕБР ЛИ С КОНЕЧНОМЕРНЫМИ КОММУТАНТАМИ

We prove that an infinite-dimensional Lie algebra over an arbitrary field, which can be decomposed into the sum of two its subalgebras having finite-dimensional commutants, is almost solvable.

Доведено, що нескінченновимірна алгебра Лі над довільним полем, яка розкладається в суму двох своїх підалгебр із скінченновимірними комутантами, майже розв'язна.

Изучение свойств алгебры Ли $L$, разложимой в сумму $L = A + B$ своих подалгебр $A$ и $B$ с теми или иными свойствами, тесно связано с аналогичным вопросом в теории групп, т. е. с изучением факторизуемых групп. Так, для алгебр Ли справедлив аналог известной теоремы Н. Ито [1] из теории групп: алгебра Ли, разложимая в сумму двух своих абелевых подалгебр, разрешима ( ступени разрешимости не выше двух). Это замечание принадлежит Я. С. Крылюку и отмечено в [2]. Так как (бесконечномерные) алгебры Ли с конечномерными коммутантами в определенном смысле близки к абелевым, то естественным представляется вопрос: будет ли сумма двух таких алгебр Ли почти разрешимой ? Положительный ответ на этот вопрос содержится в теореме 1 настоящей работы, при доказательстве которой использованы некоторые подходы из теории групп [1, 3]. Отметим, что аналогичный вопрос в теории групп в общем случае открыт, хотя и решен положительно в весьма широких классах групп [4].

Из теоремы 1 с учетом основного результата работы [5] следует, что алгебра Ли $L$ над полем характеристики не равной 2, разложимая в сумму $L = A + B$ нильпотентных подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами, разрешима, т. е. в этом случае ответ на вопрос О. Кегеля из [6] положителен. Ограничение на характеристику поля здесь существенно [7].

Все алгебры Ли рассматриваются над произвольным полем (если дополнительно не указана характеристика поля). В работе используются стандартные обозначения, произведения левонормированные. Ступень нильпотентности (нильпотентной) алгебры Ли $L$ будем обозначать через $c(L)$, ступень разрешимости (разрешимой) алгебры Ли $L$ — через $s(L)$. Так как при доказательстве теоремы 1 используются некоторые свойства $FC$-алгебр Ли, то далее приводятся некоторые определения и результаты, связанные с такими алгебрами Ли.

**Определение 1** (см. [8]). *Алгебра Ли $L$ над полем называется $FC$-алгеброй Ли, если централизатор каждого ее элемента в $L$ имеет конечную коразмерность.*

Легко видеть, что класс $FC$-алгебр Ли замкнут относительно взятия подалгебр, фактор-алгебр и прямых сумм с конечным числом слагаемых.

**Определение 2.** *$FC$-центром алгебры Ли $L$ называется множество всех элементов из $L$, централизаторы которых в $L$ имеют конечные коразмерности.*

$FC$-центр алгебры Ли $L$ будем обозначать через $FC(L)$. Нетрудно убедиться, что $FC(L)$ — характеристический идеал алгебры $L$.

**Лемма 1** [8] (теорема 3.2). *Любое конечное множество элементов $FC$-алгебры Ли $L$ содержится в некотором ее конечномерном идеале.*

***Следствие 1.*** *Если $FC$-алгебра Ли $L$ содержит некоторую подалгебру $A$ конечной коразмерности, то $L = A + N$, где $N$ — некоторый конечномерный идеал алгебры $L$.*

***Следствие 2.*** *Если $I$ — идеал конечной коразмерности $FC$-алгебры Ли $L$, то $I^2$ имеет конечную коразмерность в $L^2$.*

Действительно, ввиду следствия 1 существует конечномерный идеал $N$ алгебры $L$ такой, что $L = I + N$. Тогда $L^2 = I^2 + [I, N] + N^2 \subseteq I^2 + N$ и, следовательно, $\dim L^2 / I^2 < \infty$.

**Лемма 2.** *Пусть $L$ — алгебра Ли с конечномерным коммутантом $L^2$ $(= L')$. Тогда:*

*а) $L$ является $FC$-алгеброй Ли;*

*б) если $L^2 \cap Z(L) = 0$, то $L = A \oplus B$, где $A$ — абелев идеал алгебры $L$, $B$ — некоторый конечномерный идеал из $L$;*

*в) алгебра $L$ содержит характеристический нильпотентный (ступени нильпотентности $\leq 2$) идеал конечной коразмерности.*

***Доказательство.*** а). Пусть $g$ — произвольный элемент алгебры $L$. Число линейно независимых (над основным полем) элементов вида $[g, h]$, $h \in L$, очевидно, не превышает $\dim L^2$ и потому централизатор $C_L(g)$ имеет в $L$ конечную коразмерность. Следовательно, $L$ — $FC$-алгебра Ли.

б). Пусть $L^2 \cap Z(L) = 0$. Легко видеть, что централизатор $L_0 = C_L(L^2)$ является идеалом алгебры $L$ конечной коразмерности. Так как $L$ — $FC$-алгебра Ли, то ввиду следствия 1 существует конечномерный идеал $N$ алгебры $L$ такой, что $L = L_0 + N$. Обозначим через $A$ централизатор идеала $N$ в идеале $L_0$. Легко видеть, что $A$ — идеал алгебры $L$, имеющий конечную коразмерность в $L_0$ (и в $L$). Покажем, что $A \cap L^2 = 0$. Действительно, $A \cap L^2 \subseteq L_0 \cap L^2 \subseteq$ $\subseteq Z(L_0)$. Кроме того, $A \cap L^2 \subseteq C_{L_0}(N)$ и потому $[A \cap L^2, N] = 0$. Тогда ввиду равенства $L = L_0 + N$ получим $A \cap L^2 \subseteq Z(L)$ и, значит, $A \cap L^2 \subseteq Z(L) \cap L^2 =$ $= 0$. Следовательно, $A \cap L^2 = 0$ и потому, очевидно, $A \subseteq Z(L)$. Пусть $B / L^2$ — произвольная подалгебра абелевой алгебры Ли $L / L^2$, прямо дополняющая подалгебру $A + L^2 / L^2$ в $L / L^2$. Легко видеть, что $B$ — конечномерный идеал алгебры $L$, $A \cap B = 0$ и, значит, $L$ — прямая сумма своих идеалов $A$ и $B$.

в). Пусть, как и выше, $L_0 = C_L(L^2)$. Легко видеть, что $L_0$ — характеристический идеал алгебры $L$, имеющий в $L$ конечную коразмерность. Пересечение $L_0 \cap L^2$ содержится, очевидно, в центре идеала $L_0$, а фактор-алгебра $L_0 / (L_0 \cap L^2) \approx L_0 + L^2 / L^2$ абелева. Следовательно, идеал $L_0$ нильпотентен (ступени $\leq 2$). Утверждение в), а вместе с ним и лемма доказаны.

**Следствие 3.** *Если $L$ — бесконечномерная алгебра Ли с конечномерным коммутантом, то центр алгебры $L$ ненулевой.*

Если $L$ — почти разрешимая алгебра Ли (т. е. $L$ содержит разрешимый идеал конечной коразмерности), то через $\bar{s}(L)$ будем обозначать минимум ступеней разрешимости ее разрешимых идеалов конечной коразмерности.

**Лемма 3.** *Если $FC$-алгебра Ли содержит разрешимый идеал конечной коразмерности, то она содержит и характеристический разрешимый идеал конечной коразмерности.*

***Доказательство.*** Пусть лемма неверна и $L$ — контрпример к утверждению леммы с наименьшим возможным числом $\bar{s}(L)$ (очевидно, $\bar{s}(L) \geq 1$). Тогда алгебра $L$ содержит разрешимый идеал $I$ конечной коразмерности, ступень разрешимости которого равна $\bar{s}(L)$. Ввиду следствия 2 коммутант $L^2$ содержит разрешимый идеал $I^2$ ступени разрешимости $\bar{s}(L) - 1$, имеющий конечную коразмерность в $L^2$. В силу выбора $L$ идеал $L^2$ содержит разрешимый характеристический идеал $T$ конечной коразмерности в $L^2$. Очевидно, $T$ — разрешимый характеристический идеал алгебры $L$ и фактор-алгебра $L / T$

имеет конечномерный коммутант $L^2/T$. Ввиду леммы 2 алгебра $L/T$ содержит нильпотентный характеристический идеал $S/T$ конечной коразмерности в $L/T$. Но тогда $S$ — разрешимый характеристический идеал алгебры $L$ и $\dim L/S < \infty$, что противоречит выбору алгебры $L$. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 4.** *Если алгебра Ли $L$ содержит почти разрешимый $FC$-идеал $N$, фактор-алгебра по которому почти разрешима, то $L$ почти разрешима.*

***Доказательство.*** Пусть сначала идеал $N$ конечномерный. Возьмем какой-нибудь разрешимый идеал $I/N$ конечной коразмерности фактор-алгебры $L/N$. Легко видеть, что $T = C_I(N)$ — идеал конечной коразмерности алгебры $L$. Поскольку $T \cap N$ — идеал алгебры $L$, содержащийся в центре идеала $T$ и $T/(T \cap N) \approx T + N/N$ — разрешимая алгебра (как подалгебра разрешимой алгебры $I/N$), то идеал $T$ разрешим и, следовательно, $L$ почти разрешима.

Пусть теперь идеал $N$ бесконечномерный. Ввиду леммы 3 $N$ содержит характеристический разрешимый идеал $S$ конечной коразмерности (в $N$). Очевидно, $S$ — разрешимый идеал алгебры $L$ и фактор-алгебра $\overline{L} = L/S$ содержит конечномерный идеал $\overline{N} = N/S$ такой, что $\overline{L}/\overline{N}$ почти разрешима. По доказанному выше $\overline{L}$ почти разрешима и потому почти разрешима и алгебра $L$. Лемма доказана.

***Следствие 4.*** *Если $FC$-алгебра Ли $L$ разложима в сумму $L = A + B$ своих подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами, то $L$ почти разрешима.*

***Доказательство.*** Ввиду леммы 1 конечномерное подпространство $A^2 + B^2$ содержится в некотором конечномерном идеале $I$ алгебры $L$. Фактор-алгебра $L/I$ как сумма двух абелевых подалгебр $A + I/I$ и $B + I/I$ разрешима (см. [5]). Тогда алгебра $L$ почти разрешима в силу леммы 4.

**Лемма 5.** *Если $FC$-алгебра Ли $L$ содержит подалгебру $A$ конечной коразмерности, то $L$ содержит идеал конечной коразмерности, содержащийся в подалгебре $A$.*

***Доказательство.*** Ввиду следствия 1 алгебра $L$ содержит конечномерный идеал $N$ такой, что $L = A + N$. Легко видеть, что $I = C_A(N)$ — идеал алгебры $A$, имеющий конечную коразмерность в $A$ (а значит, и в $L$). Так как $[I, N] = 0$, то $I$ — идеал конечной коразмерности алгебры $L$, содержащийся в $A$. Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Если алгебра Ли $L$ содержит нильпотентную подалгебру конечной коразмерности, то $L$ почти разрешима.*

***Доказательство.*** Для алгебры Ли $L$, содержащей нильпотентные подалгебры конечной коразмерности, через $\overline{c}(L)$ будем обозначать минимум ступеней нильпотентности таких подалгебр из $L$. Допустим, что утверждение леммы неверно. Пусть $L$ — контрпример к утверждению леммы с минимально возможным числом $\overline{c}(L) = k$. Тогда алгебра $L$ содержит некоторую нильпотентную подалгебру $A$ ступени нильпотентности $k$, имеющую конечную коразмерность в $L$. Очевидно, $A^{k+1} = 0$, $A^k \neq 0$, подалгебра $A^k$ содержится в центре подалгебры $A$ и $A^k \subseteq FC(L)$. Так как $FC(L)$, очевидно, является $FC$-алгеброй Ли, содержащей нильпотентную подалгебру $FC(L) \cap A$ конечной коразмерности в $FC(L)$, то ввиду леммы 5 $FC(L)$ — почти разрешимый идеал алгебры $L$. Фактор-алгебра $L/FC(L)$ содержит нильпотентную подалгебру конечной коразмерности $A + FC(L)/FC(L)$ ступени нильпотентности $\leq k-1$ и поэтому ввиду выбора алгебры $L$ фактор-алгебра $L/FC(L)$ почти разрешима. Но тогда в силу леммы 4 алгебра $L$ почти разрешима, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Предложение 1.** *Пусть $L$ — алгебра Ли над произвольным полем $K$, разложимая в сумму $L = A + B$ нильпотентных подалгебр $A$ и $B$. Если хотя бы одна из подалгебр $A$ или $B$ конечномерна, то алгебра $L$ почти разрешима, а при* $\operatorname{char} K \neq 2$ — *разрешима.*

***Доказательство.*** Ввиду леммы 6 алгебра $L$ почти разрешима, т. е. содержит некоторый разрешимый идеал $I$ конечной коразмерности. Фактор-алгебра $\overline{L} = L/I$ разложима в сумму $\overline{L} = \overline{A} + \overline{B}$ конечномерных нильпотентных подалгебр $\overline{L} = A + I/I$ и $\overline{B} = B + I/I$ и потому при $\operatorname{char} K \neq 2$ разрешима ввиду [5]. Но тогда и алгебра $L$ разрешима при $\operatorname{char} K \neq 2$. Предложение доказано.

**Лемма 7.** *Пусть алгебра Ли $L$ представима в виде суммы $L = A + B$ своих подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Тогда $[Z(A), Z(B)]$ содержится в некотором идеале алгебры $L$, являющемся $FC$-алгеброй Ли.*

***Доказательство.*** Пусть $a' \in Z(A), b' \in Z(B)$ — произвольные, но фиксированные элементы из центров подалгебр $A$ и $B$ соответственно. Возьмем произвольные элементы $a \in A, b \in B$ и, следуя Н. Ито [1], обозначим $[a, b'] = a^* + b''$, $[b, a'] = a'' + b^*$, где $a^*, a'' \in A$, $b'', b^* \in B$. Учитывая, что $a' \in Z(A), b' \in Z(B)$, получаем

$$[a, b, a', b'] = -[b, a', a, b'] - [a', a, b, b'] = -[b, a', a, b'] =$$
$$= -[(a'' + b^*), a, b'] = -[a'', a, b'] - [b^*, a, b'] =$$
$$= [a, b', b^*] + [b', b^*, a] - [a'', a, b'] = [a^* + b'', b^*] - [a'', a, b'] =$$
$$= [a^*, b^*] + [b'', b^*] - [a'', a, b'].$$

Аналогично

$$[a, b, b', a'] = -[b, b', a, a'] - [b', a, b, a'] = -[b', a, b, a'] =$$
$$= [a^* + b'', b, a'] = [a^*, b, a'] + [b'', b, a'] =$$
$$= -[b, a', a^*] - [a', a^*, b] + [b'', b, a'] = -[a'' + b^*, a^*] + [b'', b, a'] =$$
$$= -[a'', a^*] + [a^*, b^*] + [b'', b, a'].$$

Отсюда имеем

$$[[a, b], [a', b']] = [a, b, a', b'] - [a, b, b', a'] =$$
$$= [b'', b^*] - [a'', a, b'] + [a'', a^*] - [b'', b, a'].$$

Следовательно, все произведения $[[a, b], [a', b']]$ содержатся в конечномерном подпространстве $A^2 + B^2 + [a', B^2] + [A^2, b']$. Но тогда централизатор элемента $[a', b']$ в подпространстве $[A, B]$ имеет конечную коразмерность. Отсюда следует, что централизатор элемента $[a', b']$ имеет конечную коразмерность и в коммутанте $L^2 = [A, B] + A^2 + B^2$, т. е. $[a', b'] \in FC(L^2)$. Легко видеть, что $FC(L^2)$ — идеал алгебры $L$, являющийся $FC$-алгеброй. Так как элементы $a' \in Z(A), b' \in Z(B)$ выбирались произвольно, то $[Z(A), Z(B)] \subseteq FC(L^2)$. Лемма доказана.

**Лемма 8.** *Пусть алгебра Ли $L$ разложима в сумму $L = A + B$ подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Тогда:*

а) $A \cap B$ *содержится в* $FC(L)$;

б) $FC(L)$ — *почти разрешимый идеал алгебры* $L$;

в) *если* $A^2 \cap B^2 = 0$, *то любой идеал алгебры* $L$, *имеющий нулевое пересечение с подпространством* $A^2 + B^2$, *разрешим.*

***Доказательство.*** а). Пусть $c$ — произвольный элемент из пересечения $A \cap B$. Ввиду леммы 2 подалгебры $A$ и $B$ являются $FC$-алгебрами Ли и потому централизаторы $C_A(c)$ и $C_B(c)$ имеют конечные коразмерности в $A$ и $B$ соответственно. Отсюда, очевидно, следует, что $C_L(c)$ имеет конечную коразмерность в алгебре $L = A + B$.

б). Ввиду следствия 4 достаточно показать, что $FC(L) = A_0 + B_0$ для некоторых подалгебр $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$. Возьмем произвольный элемент $g \in FC(L)$. Тогда $g = a + b$ для некоторых элементов $a \in A, b \in B$. Покажем, что $a \in FC(L)$. Действительно, так как $\dim B / C_B(b) < \infty$ и $\dim B / C_B(g) < \infty$, то, очевидно, $C_B(a) = C_B(g - b)$ имеет конечную коразмерность в $B$. Поскольку $A$ — $FC$-алгебра Ли, то $\dim A / C_A(a) < \infty$ и, следовательно, $C_L(a) = C_{A+B}(a)$ имеет конечную коразмерность в $L$, т. е. $a \in FC(L)$. Но тогда $b = g - a \in FC(L)$. Отсюда легко следует, что $FC(L) = A_0 + B_0$ для некоторых подалгебр $A_0 \subseteq A, B_0 \subseteq B$.

в). Пусть $N$ — произвольный идеал алгебры $L$, имеющий нулевое пересечение с подпространством $A^2 + B^2$. Обозначим далее $A_N = A \cap (N + B), B_N = B \cap (N + A)$. Легко видеть, что $A_N + B_N$ — подалгебра из $L$, содержащая идеал $N$. Возьмем произвольные элементы $n_1, n_2$ из $N$. Тогда, очевидно, $n_1 = a_1 + b_1, n_2 = a_2 + b_2$ для некоторых $a_i \in A, b_i \in B$, $i = 1, 2$. Непосредственно проверяется, что

$$[n_1, n_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2] = [a_1, a_2] - [b_1, b_2] + [n_1, b_2] - [n_2, b_1]$$

Так как $[n_1, b_2] - [n_2, b_1] \in N$, то отсюда получаем $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] \in N$, откуда в силу выбора $N$ следует $[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = 0$. По условию леммы $A^2 \cap B^2 = 0$ и потому $[a_1, a_2] = 0, [b_1, b_2] = 0$. Но тогда из очевидных соотношений $A_N + B_N = N + A_N = N + B_N$ вытекает $[A_N, A_N] = 0$, $[B_N, B_N] = 0$. Алгебра $A_N + B_N$, как сумма двух абелевых подалгебр, разрешима [2] и потому разрешим и идеал $N$, в ней содержащийся. Лемма доказана.

**Лемма 9.** *Пусть* $L$ — *алгебра Ли, разложимая в сумму* $L = A + B$ *своих подалгебр* $A$ *и* $B$ *с конечномерными коммутантами, удовлетворяющая следующим условиям:*

а) $FC(L) = 0$;

б) *алгебра* $L$ *содержит такой* $FC$-*идеал* $N$, *что* $L = N + A = N + B$.

*Тогда для любого элемента* $n_0$ *из* $N$ *вида* $n_0 = a_0 + b_0$ *с* $a_0 \in Z(A)$, $b_0 \in Z(B)$ *справедливо равенство* $[n_0, N^2] = 0$.

***Доказательство.*** Обозначим через $N_0$ конечномерный идеал алгебры $N$, содержащий элемент $n_0$ (он существует в силу леммы 1). Легко видеть, что $I = C_N(N_0)$ — идеал алгебры $N$ конечной коразмерности в $N$. Покажем сначала, что $C_{I^2}(a_0)$ — подалгебра конечной коразмерности в $I^2$.

Возьмем произвольные элементы $n_1 = a_1 + b_1, n_2 = a_2 + b_2$, $a_i \in A$, $b_i \in B$, из $I$. Так как $[n_0, I] = 0$, то $[n_0, n_1] = 0, [n_0, n_2] = 0$, т. е. $[a_0 + b_0, a_1 + b_1] = 0, [a_0 + b_0, a_2 + b_2] = 0$.

Поскольку $a_0 \in Z(A), b_0 \in Z(B)$, то из последних двух равенств следует $[a_0, b_1] + [b_0, a_1] = 0, [a_0, b_2] + [b_0, a_2] = 0$, т. е.

$$[a_0, b_1] = [a_1, b_0], \quad [a_0, b_2] = [a_2, b_0]. \tag{1}$$

Для элементов $a_i \in A, b_i \in B$, $i = 0, 1, 2$, запишем следующие тождественные соотношения (тождества Якоби):

$$[b_1, b_2, a_0] + [b_2, a_0, b_1] + [a_0, b_1, b_2] = 0,$$

$$[a_1, a_2, b_0] + [a_2, b_0, a_1] + [b_0, a_1, a_2] = 0.$$

Обозначим еще $[b_1, b_2] = b^*$, $[a_1, a_2] = a^*$. Тогда из этих тождеств с учетом равенств (1) следует

$$[b^*, a_0] - [a_0, b_2, b_1] + [a_0, b_1, b_2] = 0, \tag{2}$$

$$[a^*, b_0] + [a_0, b_2, a_1] - [a_0, b_1, a_2] = 0. \tag{3}$$

Вычитая из равенства (2) равенство (3), получаем

$$[b^*, a_0] - [a^*, b_0] - [a_0, b_2, a_1 + b_1] + [a_0, b_1, a_2 + b_2] = 0.$$

Так как $a_0 \in Z(A)$, то отсюда следует равенство

$$[b^*, a_0] - [a^*, b_0] - [a_0, a_2 + b_2, a_1 + b_1] + [a_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2] = 0,$$

т. е. $[a_0, n_1, n_2] - [a_0, n_2, n_1] = [a_0, b^*] + [a^*, b_0]$. Таким образом,

$$[a_0, [n_1, n_2]] = [a_0, b^*] + [a^*, b_0] \in [a_0, B^2] + [A^2, b_0].$$

Подалгебры $A^2$ и $B^2$ конечномерны и потому централизатор элемента $a_0$ в $I^2$ имеет конечную коразмерность в $I^2$.

Покажем теперь, что $[a_0, N^2] = 0$. Так как подалгебра $I^2$ имеет конечную коразмерность в $N^2$ (в силу следствия 2), то, очевидно, $C_{N^2}(a_0)$ — подалгебра конечной коразмерности в $N^2$. Обозначим через $T$ $FC$-центр подалгебры $A + N^2$. Нетрудно убедиться далее, что $T \cap N^2 = 0$. В самом деле, пусть $g = a + b$ $(a \in A, b \in B)$ — произвольный элемент из $T \cap N^2$. Так как $C_A(a)$ и $C_A(g)$ имеют конечные коразмерности в подалгебре $A$, то и подалгебра $C_A(b) = C_A(g - a)$ имеет конечную коразмерность в $A$. Но тогда, очевидно, $b \in FC(L)$ и ввиду условий леммы $b = 0$. Поскольку $g = a \in A \cap N^2$ и $L = N + A$, то $g \in FC(L)$, и, следовательно, $g = 0$. Таким образом, $T \cap N^2 = 0$, и так как, очевидно, $a_0 \in T$, то $[a_0, N^2] = 0$.

Заменяя в приведенных выше рассуждениях элемент $a_0$ на $b_0$ и подалгебру $A$ на подалгебру $B$, убеждаемся, что $[b_0, N^2] = 0$. Но тогда $[n_0, N^2] = 0$. Лемма доказана.

**Лемма 10.** *Пусть $L$ — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Если алгебра $L$ содержит такой $FC$-идеал $N$, что $L = A + N = B + N$, то $L$ содержит либо ненулевой конечномерный идеал, либо ненулевой абелев идеал.*

***Доказательство.*** Пусть лемма неверна и $L$ — контрпример к утверждению леммы. Алгебра $L$, очевидно, не является почти разрешимой и потому ввиду леммы 6 не содержит нильпотентных подалгебр конечной коразмерности. Поэтому в силу леммы 2 (п. в)) обе подалгебры $A$ и $B$ бесконечномерны. Нетрудно видеть, что $FC(L) = 0$. Действительно, идеал $FC(L)$ либо конечномерен, либо содержит ненулевой разрешимый характеристический идеал (см. лемму 3), являющийся идеалом алгебры $L$. Это невозможно ввиду выбора алгебры $L$ и, следовательно, $FC(L) = 0$. Поскольку $A, B, N$ — $FC$-алгебры Ли, то, как нетрудно убедиться, $A \cap N \subseteq FC(L)$, $B \cap N \subseteq FC(L)$ и, значит, $A \cap N = B \cap N = 0$.

Покажем теперь, что идеал $N$ содержит ненулевой элемент $n_0 = a_0 + b_0$, с $a_0 \in Z(A)$, $b_0 \in Z(B)$. Так как подалгебра $A$ бесконечномерная, то в силу следствия 2 найдется ненулевой элемент $a_0 \in Z(A)$. Тогда из равенства $L = A + N$ следует, что существует элемент $b_0 \in B$ такой, что элемент $n_0 = a_0 + b_0$ принадлежит идеалу $N$. Пусть $b$ — произвольный элемент из подалгебры $B$. Покажем, что $[b, b_0] = 0$. Ввиду равенства $L = N + B$ найдется элемент $a \in A$ такой, что $a + b = n \in N$. Из легко проверяемого соотношения

$$[n_0, n] = [a_0 + b_0, a + b] = [a_0, a] - [b_0, b] + [n_0, b] - [n, b_0]$$

с учетом соотношений $[n_0, b] - [n, b_0] \in N$ и $[a_0, a] = 0$ следует, что $[b_0, b] \in N$. Но тогда $[b_0, b] \in N \cap B = 0$ и, значит, $[b_0, b] = 0$. Итак, идеал $N$ содержит ненулевой элемент $n_0 = a_0 + b_0$, с $a_0 \in Z(A)$, $b_0 \in Z(B)$. Рассмотрим теперь централизатор $I = C_N(N^2)$, являющийся, очевидно, идеалом алгебры $L$. Так как $I \cap N^2$ — абелев идеал алгебры $L$, то в силу выбора $L$ имеем $I \cap N^2 = 0$. Но тогда $I$ — абелев идеал алгебры $L$, содержащий ввиду леммы 9 ненулевой элемент $n_0$. Это противоречит выбору $L$ и полученное противоречие доказывает лемму.

**Лемма 11.** *Пусть $L$ — алгебра Ли, разложимая в сумму $L = A + B$ подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Если $L$ содержит такой $FC$-идеал $N$, что $L = A + N = B + N$, то $L$ почти разрешима.*

***Доказательство.*** Пусть лемма неверна и $L$ — контрпример к утверждению леммы с минимально возможной размерностью $\dim(A^2 + B^2)$ (очевидно, $\dim(A^2 + B^2) \geq 1$, так как сумма двух абелевых алгебр Ли разрешима [2]). Покажем, что $A^2 \cap B^2 = 0$. Действительно, рассмотрим пересечение $FC(L) \cap \cap (A^2 + B^2)$. Если это пересечение отлично от нуля, то фактор-алгебра $\overline{L} = L / FC(L) = \overline{A} + \overline{B}$, где $\overline{A} = A + FC(L) / FC(L)$, $\overline{B} = B + FC(L) / FC(L)$, имеет, очевидно, меньшую размерность $\dim(\overline{A}^2 + \overline{B}^2)$ и потому почти разрешима. Но тогда ввиду леммы 4 $L$ почти разрешима, что невозможно. Следовательно, $FC(L) \cap (A^2 + B^2) = 0$ и, в частности, $A^2 \cap B^2 = 0$ (ввиду леммы 8 $A^2 \cap B^2 \subseteq \subseteq FC(L)$). Обозначим через $M$ максимальный элемент в частично упорядоченном множестве идеалов алгебры $L$, имеющих нулевое пересечение с подпространством $A^2 + B^2$ (он существует по лемме Цорна). Ввиду леммы 8 идеал $M$ разрешим. Так как фактор-алгебра $L / M$ также является контрпримером к утверждению леммы, то не теряя общности можно считать, что $M = 0$, т. е. что любой ненулевой идеал алгебры $L$ имеет ненулевое пересечение с $A^2 + B^2$. Далее, в силу леммы 10 алгебра $L$ содержит ненулевой идеал $I$, который либо конечномерен, либо абелев. Поскольку $I \cap (A^2 + B^2) \neq 0$, то фактор-алгебра $\overline{L} = L / I = \overline{A} + \overline{B}$ имеет меньшую размерность подпространства $\overline{A}^2 + + \overline{B}^2$ и потому почти разрешима. Но тогда, используя лемму 4, нетрудно убедиться, что и алгебра $L$ почти разрешима, что противоречит ее выбору. Полученное противоречие доказывает лемму.

**Теорема 1.** *Пусть $L$ — алгебра Ли над произвольным полем, разложимая в сумму $L = A + B$ своих подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Тогда алгебра $L$ почти разрешима.*

***Доказательство.*** Пусть теорема неверна и $L$ — контрпример с минимально возможной размерностью подпространства $A^2 + B^2$. Ввиду леммы 6 алгебра $L$ не содержит нильпотентных подалгебр конечной коразмерности и потому в силу леммы 2 (п. в)) обе подалгебры $A$ и $B$ бесконечномерны. Кроме того, ввиду следствия 3 $Z(A) \neq 0$, $Z(B) \neq 0$. Далее, не теряя общности можно считать, что любой ненулевой идеал из $L$ имеет нетривиальное пересечение с $A^2 + B^2$ (достаточно повторить рассуждения из доказательства леммы 11). Поэтому в силу выбора $L$ фактор-алгебра $L/I$ почти разрешима для любого идеала $I \neq 0$ из $L$.

Покажем теперь, что алгебра $L$ содержит ненулевой $FC$-идеал. Действительно, пусть это не так. Тогда $FC(L) = 0$ и ввиду леммы 7 $[Z(A), Z(B)] = 0$. Обозначим через $L_0$ централизатор $C_L(Z(A))$. Очевидно, $L_0 = A + B_0$, где $B_0 = L_0 \cap B$ и из предыдущих соотношений следует, что $Z(B) \subseteq B_0$. Построим фильтрацию алгебры $L$ по подалгебре $L_0$:

$$L = L_{-1} \supseteq L_0 = A + B_0 \supseteq L_1 \supseteq \ldots \supseteq L_k \supseteq L_{k+1} \supseteq \ldots ,$$

где $L_{i+1} = \{x \in L_i \mid [x, L] \subseteq L_i\}$, $i = 0, 1, \ldots$. Нетрудно убедиться, что $T = \bigcap_{i \geq 0} L_i$ — идеал алгебры $L$, содержащийся в $L_0$ и содержащий $Z(B)$. Далее, пусть $I = C_L(T)$. Тогда $I$ — идеал алгебры $L$, содержащий подалгебру $Z(A)$. Поскольку $I \cap T \subseteq Z(T)$, то $I \cap T$ — $FC$-идеал алгебры $L$ и потому $I \cap T = 0$ по нашему предположению. Фактор-алгебры $L/I$ и $L/T$ почти разрешимы, как показано выше, и так как алгебра $L$ изоморфно вкладывается в прямую сумму $L/I \oplus L/T$, то $L$ почти разрешима, что невозможно. Следовательно, алгебра Ли $L$ имеет ненулевые $FC$-идеалы. Пусть $N$ — один из таких идеалов. Легко видеть, что идеал $N$ содержится в подалгебре $A_N + B_N$, где $A_N = A \cap (B + N)$ и $B_N = B \cap (A + N)$. При этом, очевидно, $A_N + B_N = N + A_N = N + B_N$. Ввиду леммы 11 подалгебра $A_N + B_N$ почти разрешима, что влечет за собой почти разрешимость идеала $N$. Так как по доказанному выше фактор-алгебра $L/N$ почти разрешима, то в силу леммы 4 и алгебра $L$ почти разрешима. Это противоречит выбору $L$ и полученное противоречие доказывает теорему.

**Теорема 2.** *Пусть алгебра Ли $L$ над произвольным полем характеристики $\neq 2$ разложима в сумму $L = A + B$ своих нильпотентных подалгебр $A$ и $B$ с конечномерными коммутантами. Тогда алгебра $L$ разрешима.*

***Доказательство.*** Ввиду теоремы 1 алгебра $L$ содержит разрешимый идеал $I$ конечной коразмерности. Фактор-алгебра $L/I$, как сумма двух конечномерных нильпотентных подалгебр, разрешима над полем характеристики $\neq 2$ (см. [5]). Но тогда и алгебра $L$ разрешима. Теорема доказана.

1. *Ito N.* Ueber das Produkt von zwei abelschen Gruppen // Math. Z. – 1955. – **62**, №4. – S. 400–401.
2. *Кострикин А. И.* Критерий разрешимости конечномерной алгебры Ли // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1982. – № 2. – С. 5–8.
3. *Зайцев Д. И.* Теорема Ито и произведения групп // Мат. заметки. – 1983. – **33,** № 6. – С. 807–818.
4. *Черников Н. С.* Факторизация групп почти *BFC*-группами // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. – С. 367–387.
5. *Панюков В. В.* О разрешимости конечномерной алгебры Ли положительной характеристики // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, № 4. – С. 163–164.
6. *Kegel O. H.* Zur Nilpotenz gewisser assoziativer Ringe // Math. Ann. – 1963. – **149**, № 3. – S. 258–260.
7. *Петравчук А. П.* Алгебры Ли, разложимые в сумму абелевой и нильпотентной подалгебр // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 3. – С. 385–388.
8. *Stewart I.* Lie algebras generated by finite dimensional ideals // Res Notes., Math. – 1972. – **2.**

Получено 26.04.94