УДК 517.956

Л. В. Фардигола, канд. физ.-мат. наук (Харьков.ун-т)

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В СЛОЕ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

Criteria for correctness and strong correctness (solutions can be made smooth compared with given functions) are obtained for boundary-value problems for evolution partial differential equations in an infinite layer. The boundary condition is non-local and gives a relation between values of the unknown function and its derivatives taken with respect to spatial coordinates. The relation is defined on shifts inside the layer of its connected bounary components.

Одержано критерії коректності та сильної коректності (згладжування розв'язків порівняно до заданих функцій) крайових задач у нескінченному шарі для лінійних еволюційних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Крайова умова є нелокальною і зв'язує значення шуканої функції та її похідних відносно просторових змінних на зсувах всередину шару компонент зв'язності його межі.

Настоящая работа посвящена исследованию следующей краевой задачи в слое $\Pi(T_1, T_2) = \mathbb{R}^n \times [T_1, T_2]$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = P(-iD_x)\,u(x,t) + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi(T_1,T_2), \tag{1}$$

$$A(-iD_x)\,u(x,t_1) + B(-iD_x)\,u(x,t_2) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $P(\sigma)$, $A(\sigma)$ и $B(\sigma)$ — произвольные полиномы с постоянными комплексными коэффициентами $(\sigma \in \mathbb{R}^n)$, $T_1 \le t_1 \le t_2 \le T_2$.

Нелокальным краевым задачам в различных областях для линейных дифференциальных уравнений в частных производных уделяется значительное внимание, как в связи с тем, что для многих таких уравнений невозможно поставить корректную локальную краевую задачу, так и с тем, что такие задачи возникают как математические модели реальных процессов (см., например, [1–3]). Нелокальные краевые задачи с краевыми условиями, связывающими следы искомой функции и ее производных на кусках границы, сдвинутых внутрь области, рассматривались в работах [3–7]. В работе [6] исследовалась задача с условием (2) при $A(\sigma) \equiv \mathrm{const} \ne 0$, $B(\sigma) \equiv \mathrm{const} \ne 0$. В работе [7] изучалась задача с интегральным краевым условием, частным случаем которого при $A(\sigma) \equiv B(\sigma)$ является условие (2). В работе [8] исследовалась задача с условием вида (2) при $t_1 = T_1$, $t_2 = T_2$.

В настоящей работе получены критерий корректной разрешимости задачи (1), (2) в классах конечногладких функций степенного роста; критерий сильной корректности задачи (1), (2) (сглаживаемости по x решений краевой задачи по сравнению с заданными функциями u_0 и f) и для таких задач исследован вопрос о равномерных по t оценках производных (по x) решений этих задач.

Свойство сильной корректности задачи (1), (2) является аналогом соответствующего свойства решений локальных краевых задач в слое [9]. Интерес к нему определяется в первую очередь тем, что в случае задачи Коши для параболических по Г. Е. Шилову [10] уравнений и систем вида (1) такое свойство оказалось характеристическим [11]. Для задачи (1), (2) в случае $t_1 = T_1$, $t_2 = T_2$, $A(\sigma) \equiv \mathrm{const} \ne 0$, $B(\sigma) \equiv \mathrm{const} \ne 0$ это свойство также связано с параболичностью или антипараболичностью (по Г. Е. Шилову) уравнения (1) [12]. Для общей задачи (1), (2) в настоящей работе получен результат, аналогичный [12].

1. Критерий корректности задачи (1), (2). Обозначим

$$H_{m,\gamma} = \left\{ f\colon \Pi(T_1,T_2) \to \mathbb{C}\colon D_\alpha^x f \in C\left[\Pi(T_1,T_2)\right](|\alpha| \le m) \wedge \|f\|_{m,\gamma} = \right.$$

$$= \max_{|\alpha| \le m} \sup_{\Pi(T_1, T_2)} \left\{ \left| D^x_\alpha f(x,t) \right| (1 + |x|)^{-\gamma} \right\} < +\infty \Big\},$$

тем же символом $H_{m,\gamma}$ обозначим и пространство функций, определенных не на $\Pi(T_1, T_2)$, а на $\mathbb{R}^n$, при этом в определении $H_{m,\gamma}$ всюду заменим $\Pi(T_1, T_2)$ на $\mathbb{R}^n$. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; норма $|\cdot|$ в $\mathbb{R}^n$ — евклидова, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — соответствующее ей скалярное произведение; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\Delta(\sigma) \equiv A(\sigma) \exp\{t_1 P(\sigma)\} + B(\sigma) \exp\{t_2 P(\sigma)\}$; $R(\sigma, t) \equiv \exp\{t P(\sigma)\} / \Delta(\sigma)$; $N[H] = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : H(\sigma) = 0\}$.

Определение 1. *Задача* (1), (2) *называется корректной в классе функций степенного роста* $\gamma \ge 0$, *если для всех* $m \in \mathbb{N}_0$ *можно найти* $m_1 = m_1(m, \gamma, n) \in \mathbb{N}_0$ *и* $C = C(m, \gamma, n) > 0$ *такие, что для каждой пары функций* $u_0 \in H_{m,\gamma}$ *и* $f \in H_{m_1,\gamma}$ *существует единственное решение* $u \in H_{m,\gamma}$ *задачи* (1), (2), *причем*

$$\| u \|_{m,\gamma} \le C \left(\| u_0 \|_{m_1,\gamma} + \| f \|_{m_1,\gamma} \right). \tag{3}$$

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *корректна в классе функций степенного роста* $\gamma \ge 0$, *тогда и только тогда, когда выполняются пять условий*:

$$\Delta(\sigma) \ne 0 \quad \forall\, \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$\inf \{ \operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[A] \} > -\infty, \tag{5}$$

$$\sup \{ \operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in N[B] \} < +\infty, \tag{6}$$

$$t_1 > T_1 \Rightarrow \inf \{ \operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}^n \} > -\infty, \tag{7}$$

$$t_2 < T_2 \Rightarrow \sup \{ \operatorname{Re} P(\sigma) : \sigma \in \mathbb{R}^n \} < +\infty. \tag{8}$$

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим $r(t) \equiv \overline{\lim\limits_{|\sigma| \to \infty}} \left[\dfrac{\ln |R(\sigma, t)|}{\ln |\sigma|} \right] \le +\infty$.

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 1. *Функция* $u(x, t; \sigma) \equiv P(\sigma, t) \exp\{ i \langle \sigma, x \rangle \}$ *является решением задачи* (1), (2) *с* $u_0(x, \sigma) \equiv \exp\{ i \langle \sigma, x \rangle \}$, $f(x, t; \sigma) \equiv 0$ (*здесь* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ — *параметр*). *Для всех* $m, m_1 \in \mathbb{N}_0$, *всех* $\gamma \ge 0$ *и всех* $t_0 \in [T_1, T_2]$ *таких, что* $r(t_0) > m_1 - m$, *выполняется соотношение*

$$\overline{\lim_{|\sigma| \to \infty}} \lim_{t \to t_0} \left[\frac{\| u(\cdot; \cdot; \sigma) \|_{m,\gamma}}{\| u_0(\cdot; \sigma) \|_{m_1,\gamma}} \right] = +\infty.$$

Лемма 2. *Пусть для любого мультииндекса* α *выполняется оценка*

$$| D^\alpha_\sigma R(\sigma, t) | \le L(\alpha) (1 + |\sigma|)^{\rho(\alpha)} \quad \forall\, (\sigma, t) \in \Pi(T_1, T_2), \tag{9}$$

где $L(\alpha) > 0$, $\rho(\alpha) \in \mathbb{R}$; *и пусть* $u(\cdot, t) \in S'$ (*при всех* $t \in [T_1, T_2]$) *является решением задачи* (1), (2) *с* $f(x, t) \equiv 0$, $u_0(x) \equiv 0$. *Тогда для всех* $t \in [T_1, T_2]$ *имеем* $u(\cdot, t) \equiv o(S')$ (*здесь и ниже* S — *пространство Л. Шварца*).

Доказательство. Функция u является решением задачи (1), (2) в S' с $f(x,t)\equiv 0$, $u_0(x)\equiv 0$ в том и только том случае, когда функция $w(\sigma,t)\equiv$ $\equiv F_x[u(\cdot,t)](\sigma)$ (F — оператор преобразования Фурье) является решением задачи

$$\frac{\partial w(\sigma,t)}{\partial t} = P(\sigma)w(\sigma,t)(S'), \quad t\in[T_1,T_2], \tag{10}$$

$$A(\sigma)w(\sigma,t_1) + B(\sigma)w(\sigma,t_2) = o(S'). \tag{11}$$

Для произвольных $t_0\in[t_1,t_2]$ и $\psi\in S$ обозначим

$$h_1(\sigma,t)\equiv \overline{A(\sigma)}\,\overline{R(\sigma,t_1+t_0-t)}\,\psi(\sigma) \quad (t\in[t_1,t_0]=\tau_1),$$

$$h_2(\sigma,t)\equiv -\overline{B(\sigma)}\,\overline{R(\sigma,t_2+t_0-t)}\,\psi(\sigma) \quad (t\in[t_0,t_2]=\tau_2).$$

Здесь и ниже черта обозначает комплексное сопряжение. Ясно, что $h_j(\cdot,t)\in S$ $(t\in\tau_j)$, $j=1,2$ (см. (9)). Из (10), учитывая формулу дифференцирования [13, с. 95], получаем

$$0 = \left(\left\{\frac{\partial}{\partial t} - P(\sigma)\right\}w(\sigma,t), h_j(\sigma,t)\right) =$$

$$= \frac{d\big(w(\sigma,t),h_j(\sigma,t)\big)}{\partial t} - \left(w(\sigma,t),\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \overline{P(\sigma)}\right\}h_j(\sigma,t)\right) =$$

$$= \frac{d\big(w(\sigma,t),h_j(\sigma,t)\big)}{\partial t}, \quad j=1,2.$$

Отсюда (см. (11)) имеем

$$0 = \sum_{j=1,2}\int_{\tau_j} d\big(w(\sigma,t),h_j(\sigma,t)\big) = (w(\sigma,t_0),\psi(\sigma)) -$$

$$-\,(w(\sigma,t_1),h_1(\sigma,t_1)) + (w(\sigma,t_2),h_2(\sigma,t_2)) = (w(\sigma,t_0),\psi(\sigma)).$$

Значит, $u(\cdot,t)=o(S')$ при $t\in[t_1,t_2]$. Если при этом $t_1>T_2$ (или $t_2<$ $<T_2$), то в силу теоремы единственности задачи Коши в S' [14] $u(\cdot,t)=o(S')$ при $t\in[T_1,T_2]$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. *Необходимость* условий (4)–(6) непосредственно следует из работы [8]. Предположив, что (4)–(6) выполнены, $t_1>T_1$, и положив $t_0=T_1$, из леммы 1 получаем $\operatorname{Re}P(\sigma)\ge C\ln(2+|\sigma|)$ при всех $\sigma\in$ $\in\mathbb{R}^n$, где $C>0$. Отсюда аналогично получению условий (5) и (6) в работе [8] (при этом используется [15], добавление A), получаем, что выполняется условие (7). Необходимость (8) доказывается аналогично.

Достаточность условий (4)–(8). В [8] показано, что из условий (4)–(6) следуют оценки

$$A(\sigma) + B(\sigma)\exp\{(t_2-t_1)P(\sigma)\} \ge C(\alpha)(1+|\sigma|)^{\alpha}, \quad \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{12}$$

$$A(\sigma)\exp\{(t_1-t_2)P(\sigma)\} + B(\sigma) \ge C(\alpha)(1+|\sigma|)^{\alpha}, \quad \sigma\in\mathbb{R}^n, \tag{13}$$

где $C>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Пусть $m\in\mathbb{N}_0$, $u_0\in H_{m_1,\gamma}$, $f\in H_{m_1,\gamma}$ (m_1 выбирается ниже). Рассматривая задачу (1), (2) в пространстве S' и применяя преобразование Фурье, имеем

$$\frac{\partial v(\sigma,t)}{\partial t} = P(\sigma)v(\sigma,t) + g(\sigma,t)(S'), \quad t\in[T_1,T_2], \tag{14}$$

$$A(\sigma)v(\sigma,t_1) + B(\sigma)v(\sigma,t_2) = v_0(\sigma)(S'), \tag{15}$$

где $v(\cdot,t) = F_x[u(\cdot,t)]$, $v_0 = F[u_0]$, $g(\cdot,t) = F_x[f(\cdot,t)]$. Обозначим $R_j(\sigma,t,\xi) \equiv R(\sigma,t)C_j(\sigma)\exp\{(t_j-\xi)P(\sigma)\}$ $(C_1(\sigma)\equiv A(\sigma),\ C_2(\sigma)\equiv -B(\sigma))$, $G(\sigma,t)\equiv F_\sigma^{-1}[R(\cdot,t)](\sigma)$, $G_j(\sigma,t,\xi)\equiv F_\sigma^{-1}[R_j(\cdot,t,\xi)](\sigma)$, $j=1,2$. Учитывая (5)–(8), (12), (13), получаем, что выполняется оценка (9) и при всех $(\sigma,t)\in\Pi(T_1,T_2)$, $j=1,2$,

$$|D_\sigma^\alpha R_j(\sigma,t,\xi)| \le C(\alpha)(1+|\sigma|)^{\kappa(\alpha)} \quad \forall\,\xi\in\tau_j(t), \tag{16}$$

где $C(\alpha)>0$, $\kappa(\alpha)\in\mathbb{R}$, $\tau_1(t)=[t_1,t]$, $\tau_2(t)=[t,t_2]$. Из (9) и (16) следует, что функция

$$v(\sigma,t) \equiv R(\sigma,t)v_0(\sigma) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} R_1(\sigma,t,\xi)\,g(\sigma,\xi)\,d\xi + \int_{t}^{t_2} R_2(\sigma,t,\xi)\,g(\sigma,\xi)\,d\xi$$

является решением задачи (14), (15), значит,

$$u(x,t) \equiv G(x,t)*u_0(x) +$$
$$+ \int_{t_1}^{t} G_1(x,t,\xi)*f(x,\xi)\,d\xi + \int_{t}^{t_2} G_2(x,t,\xi)*f(x,\xi)\,d\xi \tag{17}$$

является единственным (см. лемму 2) решением задачи (1), (2) в S' (здесь $*$ — свертка по x).

Используя разложения функций f и u_0 на финитные (по x) функции (см. [16]), а также оценки (9), (16) и рассуждая так же, как в работе [16], получаем, что для каждого $m\in\mathbb{N}_0$ существует $m_1\in\mathbb{N}_0$ такое, что $u\in H_{m,\gamma}$ и удовлетворяет условию (3). Теорема доказана.

2. Критерий сильной корректности задачи (1), (2).

Определение 2. *Задача* (1), (2) *называется сильно корректной в классе функций степенного роста* $\gamma\ge 0$, *если для каждой пары функций* $u_0\in H_{0,\gamma}$ *и* $f\in H_{0,\gamma}$ *существует единственное решение* $u(\cdot,t)\in S'$ $(\forall\, t\in[T_1,T_2])$ *задачи* (1), (2) *в* S', *причем выполнены два условия*:

1) *при всех* $m\in\mathbb{N}_0$ *и всех* $t\in\,]T_1,T_2[$ $u(\cdot,t)\in H_{m,\gamma}$;

2) *при всех* $m\in\mathbb{N}_0$ *и всех* $t\in\,]T_1,T_2[$ *можно найти* $C(t)=C(t,m,\gamma,n)>0$ *такое, что*

$$\|u(\cdot,t)\|_{m,\gamma} \le C(t)\big(\|u_0\|_{0,\gamma}+\|f\|_{0,\gamma}\big) \quad \forall\,u_0\in H_{0,\gamma},\ \forall\, f\in H_{0,\gamma}. \tag{3'}$$

При изучении свойства сильной корректности мы уделяем особое внимание гладкости решения $u(x,t)$ задачи (1), (2) не по всем переменным, а только по x, при этом запись $u(\cdot,t)\in H_{m,\gamma}$ означает, что при фиксированном t функция u принадлежит пространству $H_{m,\gamma}$ как функция только от x; аналогичный смысл имеет запись $\|u(\cdot,t)\|_{m,\gamma}$ (здесь также при фиксированном t рассматривается норма u как функции только от x). Отметим, что в силу уравнения (1), если функция f k раз дифференцируема по t и эти производные непрерывны по всем переменным, то для сильно корректной задачи (1), (2) ее решение $u \in C^k[\mathbb{R}^n \times]T_1, T_2[]$ (для корректной задачи (1), (2) ее решение $u \in \in C^k[\Pi(T_1, T_2)]$ при достаточно большом $m_1 \in \mathbb{N}$).

Теорема 2. *Задача* (1), (2) *сильно корректна в классе функций степенного роста* $\gamma \geq 0$ *тогда и только тогда, когда выполнено шесть условий*: (4)–(8);

$$|\operatorname{Re} P(\sigma)| \geq C|\sigma|^h + g \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{18}$$

где $C > 0$, $h > 0$, $g \in \mathbb{R}$.

***Замечание* 1.** При $n > 1$ условие (18) выполняется тогда и только тогда, когда выполнено одно из двух условий:

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \leq -C|\sigma|^h - g \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{18′}$$

$$\operatorname{Re} P(\sigma) \geq C|\sigma|^h + g \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{18″}$$

при $n = 1$ условие (18) равносильно условию $\operatorname{Re} P(\sigma) \not\equiv \mathrm{const}$.

***Доказательство теоремы* 2.** *Необходимость* условий (4)–(8) получаем так же, как в доказательстве теоремы 1. Необходимость (18) получаем аналогично получению необходимости такого же условия в [7] или [12].

Достаточность условий (4)–(8), (18). Пусть $u_0 \in H_{0,\gamma}$, $f \in H_{0,\gamma}$. Рассматривая задачу (1), (2) в S', получаем (см. доказательство теоремы 1), что существует единственное в S' решение этой задачи и это решение определяется формулой (17). Если $n > 1$ или $n = 1$, но степень $\operatorname{Re} P(\sigma)$ четная, полином $\operatorname{Re} P(\sigma)$ ограничен сверху или снизу (см. замечание 1). Обозначим $g(t) \equiv t - T_1$, $\tau =]T_1, T_2]$, если $\operatorname{Re} P(\sigma) \to -\infty$ при $|\sigma| \to \infty$; $g(t) \equiv T_2 - t$, $\tau = [T_1, T_2[$, если $\operatorname{Re} P(\sigma) \to +\infty$ при $|\sigma| \to \infty$. В случае, когда $n = 1$ и степень полинома $\operatorname{Re} P(\sigma)$ нечетная, мы можем вместо полинома $P(\sigma)$ рассмотреть полиномы $P(\sigma^2)$ и $P(-\sigma^2)$, и, получив оценки $R(\sigma^2, t)$, $R(-\sigma^2, t)$, $R_j(\sigma^2, t, \xi)$, $R_j(-\sigma^2, t, \xi)$, легко найти оценки $R(\sigma, t)$, $R_j(\sigma, t, \xi)$, $j = 1, 2$; при этом $\tau = =]T_1, T_2[$; $g(t) \equiv t - T_1$ при $t \in]T_1, (T_1 + T_2)/2]$, $g(t) \equiv T_2 - t$ при $t \in \in [(T_1 + T_2)/2, T_2[$. Далее, рассуждая так же, как в работе [7] или [12] при получении оценки для $G(x, t)$, получаем, что при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \tau$

$$\left|D_x^\beta G(x, t)\right| \leq C(\beta)|g(t)|^{-l(\beta)}(1 + |x|)^{-(n+1)},$$

$$\left|D_x^\beta G_j(x, t, \xi)\right| \leq C(\beta)|g(t)|^{-l(\beta)}(1 + |x|)^{-(n+1)} \quad \forall \xi \in \tau \cap \tau_j(t),$$

где $C(\beta) > 0$, $l(\beta) \geq 0$, причем $l(\beta) = k|\beta| + o(|\beta|)$ при $|\beta| \to \infty$ (здесь $k > > 0$), $\tau_1(t) = [t_1, t]$, $\tau_2(t) = [t, t_2]$, $j = 1, 2$. Отсюда, пользуясь формулой (17), находим условия 1 и 2 определения 2. Теорема доказана.

На основании только определений 1 и 2 сразу трудно определить, может ли задача (1), (2) быть одновременно корректной и сильно корректной, следует ли из корректности сильная корректность или из сильной корректности корректность. Пользуясь теоремами 1 и 2, заключаем, что всякая сильно корректная задача (1), (2) является корректной. На следующем ниже примере 1 видно, что существуют задачи (1), (2), являющиеся корректными, но не являющиеся сильно корректными. В примере 2 рассмотрена сильно корректная (следовательно, корректная) задача (1), (2).

***Пример* 1.** Рассмотрим в слое $\Pi(-2, 2)$ краевую задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\right]^2 u(x,t) + f(x,t),$$
$$u(x,0) + i\,u(x,2) = u_0(x). \tag{19}$$

Здесь $P(\sigma) \equiv (\sigma_1 + \sigma_2)^2$, следовательно, условие (18) не выполнено, при этом условия (4)–(8) выполнены. Таким образом, эта задача является корректной в классе функций степенного роста $\gamma \geq 0$, но не является сильно корректной.

Пример 2. Рассмотрим в слое $\Pi(-2, 2)$ для уравнения

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right] u(x,t) + f(x,t)$$

краевую задачу с условием (19). Здесь $P(\sigma) \equiv \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ и условия (4)–(8), (18) выполнены. Эта задача является и корректной и сильно корректной в классе функций степенного роста $\gamma \geq 0$.

Учитывая определение параболичности (так называемой параболичности по Г. Е. Шилову) однородных уравнений вида (1), данное в [10], и замечание 1, мы можем дать другую формулировку теоремы 2; при этом неоднородное уравнение (1) считаем параболическим, если таковым является соответствующее ему однородное уравнение (т. е. если для (1) выполнено условие (18′)), слова „уравнение (1) антипараболично по Г. Е. Шилову" означают, что уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -P(-iD_x)\,u(x,t) + f(x,t)$$

параболично по Г. Е. Шилову (т. е. что для (1) выполнено условие (18″)).

Теорема 2′. *Для того чтобы задача* (1), (2) *была сильно корректной в классе функций степенного роста* $\gamma \geq 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* (4) *и одно из трех условий*:

1) $[t_1, t_2] = [T_1, T_2]$, $n = 1$, *степень* $\operatorname{Re} P(\sigma)$ *нечетна и* $A(\sigma)B(\sigma) \not\equiv 0$;

2) $t_1 = T_1$, *уравнение*(1) *параболично по Г. Е. Шилову и множество* $N[A]$ *ограничено*;

3) $t_2 = T_2$, *уравнение* (1) *антипараболично по Г. Е. Шилову и множество* $N[B]$ *ограничено.*

В доказательстве теоремы 2 все функции $C(t)$ (см. условие (3′)) оказались непрерывными на τ и имеющими при всех достаточно больших m степенную особенность при $t \to T_1 + 0$ или $t \to T_2 - 0$ тем большего порядка, чем больше m. Покажем, что при достаточно больших m продолжить оценки (3′) на $[T_1, T_2]$, вообще говоря, невозможно.

Теорема 3. *Пусть задача* (1), (2) *сильно корректна в классе функций степенного роста* $\gamma \geq 0$. *Тогда для всякого* $M > 0$ *и каждой пары* $m, m_1 \in \mathbb{N}_0$ *такой, что* $m - m_1 > \max\{\deg A, \deg B\}$, *найдется функция* $u_0 \in H_{m_1,\gamma}$ *такая, что при* $f(x,t) \equiv 0$ *соответствующее решение* u *задачи* (1), (2) *удовлетворяет соотношению*

$$\sup_{t \in]T_1, T_2[} \left\{ \|u(\cdot,t)\|_{m,\gamma} / \|u_0\|_{m_1,\gamma} \right\} > M.$$

Доказательство. Согласно теореме 2 выполнены условия (4)–(8) и (18). Поэтому при $t_0 = T_1$ или $t_0 = T_2$ имеем $r(t_0) > -\max\{\deg A, \deg B\}$. Приме-

…няя лемму 1, получаем требуемое. Теорема доказана.

1. *Мамян А. Х.* Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 2. С. 292–296.
2. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 11. – С. 1925–1935.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Там же. – 1985. – **21**, № 1. – С. 95–101.
4. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. – 1969. – **185**, № 4. – С. 739–740.
5. *Скубачевский А. А.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом // Мат. заметки. – 1985. – **38**, № 4. – С. 587–598.
6. *Борок В. М.* Критерий абсолютной $\mathcal{E}$-устойчивости уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 3. – С. 438–444.
7. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое // Мат. заметки. – 1993. – **53**, № 6. – С. 122–129.
8. *Фардигола Л. В.* Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083–1090.
9. *Борок В. М.* Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 1. – С. 185–201.
10. *Шилов Г. Е.* Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Успехи мат. наук. – 1955. – **10**, № 4. – С. 89–100.
11. *Борок В. М.* Об одном характеристическом свойстве параболических систем // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, № 6. – С. 903–906.
12. *Фардигола Л. В.* Критерий сильной корректности нелокальной двухточечной краевой задачи в слое // Изв. вузов. Сер. мат. – 1992. – № 1. – С. 84–88.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 308 с.
14. *Schwartz L.* Les équations d'évolution liées au product de composition // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1950. – **2**. – P. 19–49.
15. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. – М.: Мир, 1986. – 456 с.
16. *Фардигола Л. В.* Нелокальная краевая задача в слое: влияние параметров на свойства решений // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 12. – С. 2151–2161.

Получено 01.11.93