УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, д-р физ.-мат. наук,
Е. Е. Шевеленко, асп. (Киев. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

We prove theorems which give estimates for stability domains of a differential system with rational right-hand side and construct estimates for convergence of solutions of the system.

Доведено теореми, в яких визначено оцінки області стійкості диференціальної системи з дробово-раціональною частиною та побудовано оцінки збіжності розв'язків системи.

Системы дифференциальных уравнений, содержащих в правой части дробно-рациональные выражения, применяются при создании достаточно точных математических моделей, используемых для исследования и прогнозирования динамики процессов в медицине, биологии, физике. В литературе последних лет можно найти немало примеров, когда системы такого типа используются для решения прикладных задач, связанных, например, с динамикой распространения вирусов, ростом биологических популяций, моделированием распространения инфекционных заболеваний [1–3].

Решения дифференциальных уравнений достаточно адекватно отражают реальные процессы, если они в каком-то смысле устойчивы. Хорошо разработанным аппаратом исследования устойчивости является прямой метод А. М. Ляпунова, получивший широкое развитие в ряде работ [4–7].

В настоящей статье этот метод используется при исследовании положения равновесия системы с рациональной правой частью. Основной результат состоит в оценке области устойчивости и построении оценки сходимости решений в этой области.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с рациональной правой частью, записанной в векторно-матричной форме следующего вида:

$$\dot{x}(t) = [E + X(t)D]^{-1}[E + X(t)B]x(t). \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in R^n$, A — квадратная матрица с постоянными коэффициентами, $X(t)$, B, D — прямоугольные матрицы вида

$$X(t) = \{X_1(t), \ldots, X_n(t)\}, \quad B = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots \\ B_n \end{Bmatrix}, \quad B = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \cdots \\ D_n \end{Bmatrix},$$

$X_i(t)$ — квадратные матрицы, в которых в i-й строке находятся вектор-строки $x(t)$, а остальные элементы — нули; B_i, D_i — матрицы с постоянными коэффициентами:

$$X_i(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1(t) & x_2(t) & x_n(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i & b_{1n}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i & b_{2n}^i \\ b_{n1}^i & b_{n2}^i & b_{nn}^i \end{bmatrix}, \quad D_i = \begin{bmatrix} d_{11}^i & d_{12}^i & d_{1n}^i \\ d_{21}^i & d_{22}^i & d_{2n}^i \\ d_{n1}^i & d_{n2}^i & d_{nn}^i \end{bmatrix}.$$

Исследование устойчивости положения равновесия $x(t) \equiv 0$ системы (1) будем проводить с помощью функции Ляпунова квадратичного вида $v_0(x) = x^T Hx$, где симметричная положительно определенная матрица H выбирается таким образом, что $C = -A^T H - HA$ — также положительно определенная матрица.

Обозначим $\varphi(H) = \lambda_{\max}(H) / \lambda_{\min}(H)$, где $\lambda_{\max}(\cdot)$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ — наибольшее и наименьшее собственные числа матриц. В качестве векторной нормы будем брать $|x(t)| = \left\{\sum_{i=1}^n x_i^2(t)\right\}^{1/2}$, в качестве матричной — спектральную, т. е. $|A| = \left\{\lambda_{\max}(A^T A)\right\}^{1/2}$. Заметим, что при таком выборе норм $|X(t)| = |x(t)|$.

Теорема 1. *Если A — асимптотически устойчивая матрица, то решение $x(t) \equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчиво. Гарантированной областью устойчивости является шар $|x| < R / \sqrt{\varphi(H)}$, где*

$$R = \lambda_{\min}(C)[q + \lambda_{\min}(C)|D|]^{-1}, \quad q = 2(|H||B| + |HA||D|). \tag{2}$$

Для произвольного решения $x(t)$ системы выполняется $|x(t)| < \varepsilon$, $t > 0$, если $|x(0)| < \delta(\varepsilon)$,

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\varepsilon, R\} / \sqrt{\varphi(H)}. \tag{3}$$

Для решений с начальными данными из $(R - \zeta)$-окрестности начала координат справедлива оценка сходимости

$$|x(t)| \leq \sqrt{\varphi(H)}\, |x(0)| \exp\{-\beta(\zeta) t / 2\lambda_{\max}(H)\}, \tag{4}$$

где

$$\beta(\zeta) = \zeta \lambda_{\min}(C)[(1 - (R - \zeta)|D|)R]^{-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Для полной производной функции $v_0(x) = x^T Hx$ в силу системы (1) выполняется соотношение

$$\dot{v}_0(x(t)) = x^T(t)\{([E + X(t)D]^{-1}[A + X(t)B])^T H +$$
$$+ H[E + X(t)D]^{-1}[A + X(t)B]\}x(t).$$

Запишем очевидное равенство $[E + X(t)D][E + X(t)D]^{-1} = E$. Отсюда $[E + X(t)D]^{-1} = E - X(t)D[E + X(t)D]^{-1}$. Подставляя полученное соотношение в величину полной производной, получаем

$$\dot{v}_0(x(t)) = -x^T(t)Cx(t) + 2x^T(t)H\{X(t)B -$$
$$- X(t)D[E + X(t)D]^{-1}[A + X(t)B]\}x(t).$$

Рассмотрим окрестность $|x| < |D|^{-1}$. Для решений системы из этой окрестности

$$\dot{v}_0(x(t)) \leq$$
$$\leq -[\lambda_{\min}(C) - 2(|H||B| + |HA||D|)(1 - |x(t)||D|)^{-1}|x(t)|]|x(t)|^2.$$

При $|x| < R$, где R определено в (2), $R < |D|^{-1}$, полная производная функции Ляпунова $v_0(x) = x^T Hx$ отрицательно определена. Таким образом, гарантированной областью асимптотической устойчивости решения $x(t) \equiv 0$ системы (1) является шар радиуса $R / \sqrt{\varphi(H)}$, где величина R определена в (2).

Приведем оценку сходимости решений $x(t)$ системы (1) с начальными данными из $(R-\zeta)$-окрестности начала координат. Пусть $0<\zeta<R$ — произвольная достаточно малая постоянная. Оценим величину полной производной функции $v_0(x)=x^T Hx$ в $(R-\zeta)$-окрестности положения равновесия $x(t)\equiv 0$. При $|x|<R-\zeta$ справедливо соотношение

$$-\lambda_{\min}(C)+\frac{q}{1-|D\|x|}|x| \le -\lambda_{\min}(C)+$$

$$+q\left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{q+\lambda_{\min}(C)|D|}\right]\left\{1-|D|\left[\frac{\lambda_{\min}(C)}{q+\lambda_{\min}(C)|D|}-\zeta\right]\right\}^{-1}=$$

$$=-\zeta\frac{[q+\lambda_{\min}(C)|D|]^2}{(1+\zeta|D|)(q+\lambda_{\min}(C)|D|)-\lambda_{\min}(C)|D|}=$$

$$=-\zeta\frac{(\lambda_{\min}(C)|D|+q)}{(1+\zeta|D|)-R|D|}=\frac{\zeta\lambda_{\min}(C)}{(1-(R-\zeta)|D|)R}.$$

Таким образом, в $(R-\zeta)$-окрестности начала координат для полной производной функции Ляпунова $v_0(x)=x^T Hx$ справедливо неравенство

$$\dot v_0(x(t)) \le -\beta(\zeta)|x(t)|^2,$$

где величина $\beta(\zeta)$ определена в (5). А для решений $x(t)$ с начальными данными $x(0)$, находящимися в $(R-\zeta)$-окрестности, справедлива оценка экспоненциального убывания (4).

Получим более точную оценку сходимости решений. При исследовании будем использовать функцию Ляпунова вида

$$v(x,t)=e^{\gamma t}v_0(x)\left[1-\xi\sqrt{v_0(x)}\right]^{-2}, \tag{6}$$

где величины γ, ξ определим в дальнейшем.

Рассмотрим расширенное фазовое пространство $R^n\times[0,\infty)$ переменных (x, t) и обозначим в нем поверхность уровня $v(x,t)=\alpha$ функции Ляпунова (6) через ∂v_t^α, а область, которую она ограничивает, — через v_t^α, т. е.

$$\partial v_t^\alpha=\{(x,t)\colon v(x,t)=\alpha\},\quad v_t^\alpha=\{(x,t)\colon v(x,t)<\alpha\}.$$

Лемма. *Если для кривой $x(t)$, $t\ge 0$, существует $\alpha>0$ такая, что $(x(t),t)\in v_t^\alpha$, то справедливо неравенство*

$$|x(t)| \le \frac{e^{-\gamma t/2}\sqrt{\alpha/\lambda_{\min}(H)}}{1+\xi\sqrt{\alpha}\,e^{-\gamma t/2}}. \tag{7}$$

Доказательство. Как следует из условий леммы и вида функции $v(x,t)$,

$$e^{\gamma t}x^T(t)Hx(t)\left[1-\xi\sqrt{x^T(t)Hx(t)}\right]^{-2} < \alpha.$$

Поэтому

$$e^{\gamma t/2}\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,|x(t)| < \sqrt{\alpha}\,\left[1-\xi\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(t)|\right].$$

Отсюда получаем

$$|x(t)|\left[e^{\gamma t/2}+\xi\sqrt{\alpha}\right]\sqrt{\lambda_{\min}(H)} < \sqrt{\alpha}$$

и неравенство (7).

Теорема 2. *Если A — асимптотически устойчивая матрица, то решение $x(t) \equiv 0$ системы* (1) *асимптотически устойчиво, и для произвольного решения $x(t)$ системы с начальными данными из шара $R/\sqrt{\varphi(H)}$* (2) *справедлива оценка сходимости*

$$|x(t)| \le \frac{\sqrt{\varphi(H)}\,|x(0)|e^{-\gamma t/2}}{1-\xi|x(0)|\sqrt{\lambda_{\max}(H)}\left(1-e^{-\gamma t/2}\right)}, \tag{8}$$

причем параметры ξ и γ определены в интервалах

$$0 < \xi \le \left(R\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\right)^{-1},$$

$$0 < \gamma \le \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \min\left\{1, \frac{\left[\sqrt{\varphi(H)}-1\right]\sqrt{\varphi(H)}}{\left[\sqrt{\varphi(H)}-R|D|\right]\left[\sqrt{\varphi(H)}-\xi R\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\right]}\right\}. \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим полную производную функции $v(x, t)$ вида (6) в силу системы (1):

$$v(x(t), t) = \gamma e^{\gamma t} v_0(x(t))\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-2} +$$

$$+\ e^{\gamma t}\left\{\dot v_0(x(t))\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-2} + \xi\sqrt{v_0(x(t))}\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-3}\dot v_0(x(t))\right\}.$$

После некоторых преобразований получаем

$$\dot v(x(t), t) = e^{\gamma t}\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-3}\left\{\gamma v_0(x(t))\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right] + \dot v_0(x(t))\right\}.$$

Как следует из предыдущей теоремы,

$$\dot v_0(x(t)) = \left[-\lambda_{\min}(C) + \frac{q}{1-|D||x(t)|}|x(t)|\right]|x(t)|^2.$$

Поэтому

$$\dot v(x(t), t) = e^{\gamma t}\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-3}\left\{\gamma\lambda_{\max}(H)\left[1-\xi\sqrt{\lambda_{\min}(H)}|x(t)|\right] - \right.$$

$$\left. - \lambda_{\min}(C) + \frac{q}{1-|D||x(t)|}|x(t)|\right\}|x(t)|^2$$

или

$$\dot v(x(t), t) = -e^{\gamma t}\left[1-\xi\sqrt{v_0(x(t))}\right]^{-3}\left\{\left[\lambda_{\min}(C)-\gamma\lambda_{\max}(H)\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\gamma\xi\lambda_{\max}(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)} - \frac{q}{1-|D||x(t)|}\right]|x(t)|\right\}|x(t)|^2.$$

Найдем условия, при которых

$$\left[\lambda_{\min}(C)-\gamma\lambda_{\max}(H)\right] + \left[\gamma\xi\lambda_{\max}(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)} - \frac{q}{1-|D||x(t)|}\right]|x(t)| > 0 \quad (*)$$

для всех $|x| < R/\sqrt{\varphi(H)}$. После приведения подобных членов получаем квадратное неравенство

$$F(|x|) = |x|^2|D|\gamma\xi\lambda_{\max}(H)\sqrt{\lambda_{\min}(H)} + |x|\left[q + |D|\left(\lambda_{\min}(C) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \gamma\lambda_{\max}(H)\right) - \gamma\xi\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,\lambda_{\max}(H)\right] - \left(\lambda_{\min}(C)-\gamma\lambda_{\max}(H)\right) < 0$$

для всех $|x| < R/\sqrt{\varphi(H)}$, если $F(0) \le 0$ и $F(R/\sqrt{\varphi(H)}) \le 0$;

$$F(0) = -\lambda_{\min}(C) + \gamma\lambda_{\max}(H), \quad F(0) \le 0 \Rightarrow \gamma \le \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)},$$

$$F(R/\sqrt{\varphi(H)}) = \frac{R^2|D|}{\sqrt{\varphi(H)}}\gamma\xi\lambda_{\max}(H) + R[q + |D|(\lambda_{\min}(C) -$$

$$-\gamma\lambda_{\max}(H)) - \gamma\xi\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,\lambda_{\max}(H)]/\sqrt{\varphi(H)} - (\lambda_{\min}(C) - \gamma\lambda_{\max}(H)) \le 0.$$

Домножая на $\varphi(H)$ и приводя подобные члены, получаем

$$\gamma \le \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)} \frac{\left[\sqrt{\varphi(H)} - 1\right]\sqrt{\varphi(H)}}{\left[\sqrt{\varphi(H)} - R|D|\right]\left(\sqrt{\varphi(H)} - \xi R\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\right)}.$$

Таким образом, имеем, что полная производная функции Ляпунова отрицательно определена, если параметры ξ и γ удовлетворяют ограничениям (9). Это значит, что векторное поле системы (1) направлено внутрь поверхности уровня ∂v_t^{α}, т. е. $(x(t), t) \in v_t^{\alpha}$ при всех $t > 0$. Подставляя

$$\sqrt{\alpha} = \frac{R\sqrt{\lambda_{\max}(H)}\,|x(0)|}{R - \sqrt{\varphi(H)}\,|x(0)|}$$

в неравенство (7) леммы, получаем оценку сходимости (8).

Следствие. *При* $\xi = \left(R\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\right)^{-1}$ *оценка* (8) *принимает вид*

$$|x(t)| \le \frac{R\sqrt{\varphi(H)}\,|x(0)|e^{-\gamma t/2}}{R - \sqrt{\varphi(H)}\,|x(0)|\left[1 - \sqrt{\varphi(H)}\,e^{-\gamma t/2}\right]}, \tag{10}$$

где $\gamma = \lambda_{\min}(C)/\lambda_{\max}(H)$, *а* R *определено в* (2).

Доказательство. Неравенство (∗) можно переписать в виде

$$\left[\lambda_{\min}(C) - \frac{q}{1 - |D||x|}|x|\right] > \gamma\lambda_{\max}(H)\left[1 - \xi\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\,|x|\right].$$

При

$$\xi = \left(R\sqrt{\lambda_{\min}(H)}\right)^{-1} = \frac{q + \lambda_{\min}(C)|D|}{\lambda_{\min}(C)\sqrt{\lambda_{\min}(H)}}$$

оно приобретает вид

$$\left[\lambda_{\min}(C) - \frac{q}{1 - |D||x|}|x|\right] > \gamma\frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(C)}(1 - |D||x|)\left[\lambda_{\min}(C) - \frac{q}{1 - |D||x|}|x|\right]$$

и справедливо для всех $|x| < |D|^{-1}$ при $\gamma = \lambda_{\min}(C)/\lambda_{\max}(H)$. Подставляя эти значения параметров в (8), получаем (10).

1. *Смит Дж. М.* Модели в экологии. – М.: Мир. – 1976. – 184 с.
2. *Марчук Г. И.* Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1985. – 240 с.
3. *Базыкин А. Д.* Математическая биофизика взаимодействующих популяций. – М.: Наука, 1985. – 180 с.
4. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
5. *Матросов В. М., Маликов А. И.* Развитие идей А. М. Ляпунова за 100 лет: 1892–1992 // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 4. – С. 3–47.
6. *Мартынюк А. А., Лакшмикантам В., Лила С.* Устойчивость движения: метод интегральных неравенств. – Киев: Наук. думка, 1989. – 272 с.
7. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Получено 24.01.94