УДК 517.54

А. А. Гольдберг, д-р физ.-мат. наук (Львов. ун-т)

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ЧИСЛО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

Uniqueness theorems are obtained for algebraic functions taking into account not only A-points but also the number of covering algebraic elements.

Одержано теореми єдиності для алгбраїчних функцій, в яких враховуються не лише A-точки, але й кількість алгебраїчних елементів, що лежать над ними.

Пусть $P(z, w)$ — неприводимый многочлен от z и w, $\deg_w P = m \geq 1$, $\deg_z P = n \geq 1$. Уравнение

$$P(z, w) \equiv p_m(z) w^m + p_{m-1}(z) w^{m-1} + \ldots + p_0(z) = 0 \tag{1}$$

определяет m-значную алгебраическую функцию $w = w(z)$ степени n такую, что $P(z, w(z)) \equiv 0$. Будем считать известными основные факты и терминологию, относящиеся к алгебраическим функциям (см., например, [1], гл. 1). Пусть $A \in \mathbb{C}$. Корни уравнения $P(z, A) = 0$ называются A-точками алгебраической функции $w = w(z)$; при этом если $\deg_z P(z, A) = n - p, p \geq 1$, то полагаем, что $w = w(z)$ имеет A-точку p-го порядка в бесконечно удаленной точке. В дальнейшем будут использованы лишь те A, все A-точки которых конечны. Если $A = \infty$, то A-точками (или полюсами) называются корни уравнения $p_m(z) = 0$, при этом если $\deg p_m(z) = n - p, p \geq 1$, то считаем, что в бесконечности находится полюс порядка p. Для простоты изложения в дальнейшем случай $A = \infty$ опускаем.

Обозначим через $E(A) = E(A, w)$ множество A-точек в $\overline{\mathbb{C}}$ алгебраической функции $w = w(z)$ (при этом порядки A-точек не учитываются). Алгебраическую функцию $w = w(z)$ можно рассматривать как конформное биективное отображение компактной m-листной римановой поверхности R_z, накрывающей расширенную z-плоскость, на компактную n-листную риманову поверхность R_w, накрывающую расширенную w-плоскость. Пусть π — проектирование R_z или R_w на $\overline{\mathbb{C}}$. Если $a \in R_z$ переходит в $b \in R_w$ при отображении $w(z)$, $\pi(a) = z_0$, $\pi(b) = w_0$, $z_0, w_0 \neq \infty$, то a взаимно однозначно соответствует некоторый алгебраический элемент (а. э.)

$$w = w_0 + \sum_{j=p}^{\infty} a_j (z - z_0)^{j/q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad a_p \neq 0, \quad q \leq m, \quad p \leq n.$$

Будем обозначать его через $e = e_z(z_0, w_0, p, q)$ (сохраняя в обозначении лишь 4 существенных для нас параметра) и говорить, что он лежит над точкой z_0. Тот факт, что а. э. e принадлежат уравнению (1), будем записывать таким образом: $e \in H(P)$. При обратном отображении R_w на R_z этому а. э. соответствует а. э. $e_z^{-1}(z_0, w_0, p, q) = e_w(w_0, z_0, q, p)$. Очевидно, $E(A) = \{z_0 : \exists\ e_z(z_0, A, p, q) \in H(P)\}$. Наряду с множеством $E(A)$ будем рассматривать также его подмножества

$$E_r(A) = \{z_0 : \operatorname{card}\{e_z(z_0, A, p, q) : e_z(z_0, A, p, q) \in H(P)\} = r\}, \quad 1 \le r \le m.$$

Пусть

$$E^\rho(A) = \bigcup_{r=1}^{\rho} E_r(A), \quad 1 \le \rho \le m.$$

Другими словами, $E_r(A)$ $(E^\rho(A))$ состоит из тех A-точек z_0 алгебраической функции $w = w(z)$, над которыми лежат ровно r (не более ρ) а. э. $e_z(z_0, A, p, q) \in H(P)$. Легко видеть, что $E^m(A) = E(A)$.

В [2] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть w и $\hat{w}$ — m-значные алгебраические функции степени n такие, что $E(A_j, w) = E(A_j, \hat{w})$, $1 \le j \le L_1$, где $L_1 = 4m + 1 + [-2m/n]$. Тогда $w = \hat{w}$.*

Далее будут получены различные теоремы единственности, которые обобщают теорему 1. Также будет исправлена погрешность в доказательстве теоремы 1, на которую любезно обратил внимание авторов [2] А. З. Мохонько.

Введем некоторые обозначения:

$$\nu_r(A, w) = \operatorname{card} E_r(A, w), \quad \nu^\rho(A, w) = \operatorname{card} E^\rho(A, w), \quad a \wedge b = \min\{a, b\},$$

квадратные скобки всюду означают целую часть числа. Если над A-точкой z_0 функции $w(z)$ лежат а. э. $e_z(z_0, A, p_1, q_1), \ldots, e_z(z_0, A, p_s, q_s)$, то сумму $p_1 + \ldots + p_s$ обозначим через $\mu(z_0, A, w)$. Если $E(A, w) = \{z_1, \ldots, z_t\}$, то, как нетрудно видеть,

$$\sum_{j=1}^{t} \mu(z_j, A, w) = n$$

для любого A. Пусть $a = \{A_1, \ldots, A_l\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ — фиксированный набор чисел. Обозначим

$$\nu_r(w) = \nu_r(a, w) = \sum_{j=1}^{l} \nu_r(A_j, w),$$

$$\nu^\rho(w) = \nu^\rho(a, w) = \sum_{j=1}^{l} \nu^\rho(A_j, w),$$

$$N(\rho, w) = N(\rho, a, w) = \sum_{r=1}^{\rho} r(r-1)\nu_r(w).$$

Теорема 2. *Пусть w и $\hat{w}$ — m-значные алгебраические функции степени n, $\rho \in \mathbb{N}$, $1 \le \rho \le m$,*

$$E_r(A_j, w) = E_r(A_j, \hat{w}), \quad 1 \le r \le \rho, \quad 1 \le j \le L_2, \quad a = \{A_j : 1 \le j \le L_2\},$$

где $L_2 = 4m + 1 + [-(2/n)(m + N(\rho, a, w))]$. Тогда $w = \hat{w}$.

Теорема 3. *Пусть w и $\hat{w}$ — m-значные алгебраические функции степени $n, \rho \in \mathbb{N}$, $1 \le \rho \le m$,*

$$E^\rho(A_j, w) = E^\rho(A_j, \hat{w}), \quad 1 \le j \le L_3, \quad a = \{A_j : 1 \le j \le L_3\},$$

где

$$L_3 = 4m + 1 + [-(2/n)(m + \nu^{\rho}(w) - \nu_1(w) \wedge \nu_1(\hat{w}))].$$

Тогда $w = \hat{w}$.

Если выполнены условия теоремы 3, то $\nu^{\rho}(w) = \nu^{\rho}(\hat{w})$, $\nu^{\rho}(w) - \nu_1(w) \wedge \wedge \nu_1(\hat{w}) \geq 0$ и $L_1 \geq L_3$. Таким образом, теорема 1 следует из теоремы 3 при $\rho = m$.

Производя некоторые дробно-линейные преобразования в z- и в w-плоскостях, условия теорем 2 и 3 можно свести к случаю, когда все $A_j \neq \infty$ и $E(A_j, w) \subset \mathbb{C}$, $E(A_j, \hat{w}) \subset \mathbb{C}$. При этом для новой алгебраической функции $\tilde{w}$ получим новое уравнение $\tilde{P}(z, w) = 0$. Легко видеть, что $\deg_z \tilde{P}(z, w) = = \deg_z P(z, w) = n$, $\deg_w \tilde{P}(z, w) = \deg_w P(z, w) = m$. Эти ограничения, не умаляющие общности, будем считать выполненными всюду в дальнейшем.

Сначала приведем некоторые оценки числа нулей дискриминанта $P(z, w)$ и результанта $R(P, \hat{P})$ (пп. 2, 3), а затем (п. 4) докажем теоремы 2 и 3.

2. Оценки числа нулей дискриминанта. Уравнение (1) определяет алгебраическую функцию $z = z(w)$. Пусть $A_1, \ldots, A_L \in \mathbb{C}$ и все A_j-точки, $1 \leq j \leq \leq L$, конечны; $D(w) = D(w, P)$ — дискриминант P как многочлена от z ([3], § 35). Используя известное представление дискриминанта как детерминанта $(2n-1)$-го порядка, получаем [2, с. 201], что он является многочленом от w степени не выше $2m(n-1)$, следовательно, сумма порядков нулей $D(w)$ не превышает $2m(n-1)$. Теперь оценим эту сумму снизу. Пусть $A \in \{A_1, \ldots, A_L\}$, $z_0 \in E_r(A)$, $e_z^s(z_0, A, p_s, q_s)$, $1 \leq s \leq r$, — а. э., лежащие над z_0. Им соответствуют а. э. $e_w^s(A, z_0, q_s, p_s)$, лежащие над A. В достаточно малой окрестности A, разрезанной по некоторому радиусу, можно выделить p_s однозначных ветвей этого а. э.

$$z = z_0 + \sum_{j=q_s}^{\infty} a_j \omega^j (w - A)^{j/p_s}, \quad \omega = \omega(p_s, t) = \exp(2\pi i t / p_s), \tag{2}$$

$0 \leq t \leq p_s - 1$, $a_{q_s} \neq 0$. Если в $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезами, представляющими отрезки, соединяющие некоторую фиксированную точку с проекциями всех алгебраических точек ветвления* римановой поверхности R_w, выберем n однозначных ветвей $z_k(w)$, $1 \leq k \leq n$, алгебраической функции $z = z(w)$, то [3, с. 126]

$$D(w) = \{a_n(w)\}^{2n-2} \prod_{1 \leq j < k \leq n} (z_j(w) - z_k(w))^2,$$

где $a_n(w) = P_z^{(n)}(0, w)/n!$. Если $z_0 \in E_1(A)$, то разности ветвей $z_k(w)$, совпадающих с p_1 ветвями а. э. (2) (число таких разностей $p_1(p_1-1)/2$), вносят в $D(w)$ нуль порядка $n(z_0) = 2(q_1/p_1)p_1(p_1-1)/2 \geq p_1 - 1 \geq 0$. Пусть $E_r(A_j) = = \{z_{rj1}, \ldots, z_{rjs_{rj}}\}$. А. э. функции $z = z(w)$, лежащие над точками из A_j и переходящие в а. э. функции $w = w(z)$, лежащие над точками из $E_1(A_j)$, вносят в $D(w)$ нуль порядка $\geq \sum_{k=1}^{s_{1j}} \mu(z_{1jk}, A_j, w) - \nu_1(A_j, w)$. Просуммировав по j, получаем, что суммарный вклад а. э. $e_w^1(A_j, z_{1jk}, q_{1jk}, p_{1jk})$, $1 \leq k \leq \leq s_{1j}$, $1 \leq j \leq L$, в сумму порядков нулей $D(w)$ не меньше

* Если имеется точка ветвления над ∞, то один из отрезков заменяется лучом.

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{s_{1j}}\mu(z_{1jk}, A_j, w)-\nu_1(w). \tag{3}$$

Пусть теперь $z_0 \in E_r(A)$, где $2 \le r \le m$. Тогда а. э. $e_w^i(A, z_0, q_i, p_i)$ с однозначными ветвями вида (2) вносят в $D(w)$ нуль порядка $n(z_0)$ не ниже

$$\sum_{i=1}^{r} q_i(p_i-1) + \sum_{1\le\alpha<\beta\le r}\left(\frac{q_\alpha}{p_\alpha}\wedge\frac{q_\beta}{p_\beta}\right)2p_\alpha p_\beta.$$

Тогда

$$n(z_0) \ge \sum_{i=1}^{r}(p_i-1) + r(r-1) = \sum_{i=1}^{r}p_i + r(r-2) =$$
$$= \mu(z_0, A, w) + r(r-2) \ge 0.$$

Полагая $z_0 = z_{rjk}$ и суммируя сначала по k, $1\le k\le s_{rj}$, а затем по j, $1\le j\le L$, получаем, что суммарный вклад а. э. $e_w^i(A_j, z_{rjk}, q_{ijk}, p_{ijk})$, $1\le i\le r$, $1\le k\le s_{rj}$, $1\le j\le L$, в сумму порядков нулей $D(w)$ не меньше

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{s_{rj}}\mu(z_{rjk}, A_j, w) + r(r-2)\nu_r(w) \ge 0. \tag{4}$$

Из (3) следует, что оценка (4) верна и при $r=1$. Таким образом, сумма порядков всех нулей $D(w)$ при любом ρ, $1\le\rho\le m$, не меньше

$$\sum_{r=1}^{m}\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{s_{rj}}\mu(z_{rjk}, A_j, w) + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(w) =$$

$$= \sum_{j=1}^{L}\sum_{r=1}^{m}\sum_{k=1}^{s_{rj}}\mu(z_{rjk}, A_j, w) + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(w) =$$

$$= \sum_{j=1}^{L} n + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(w) \ge nL + \sum_{r=1}^{\rho} r(r-2)\nu_r(w).$$

Учитывая оценку $\deg D(w) \le 2m(n-1)$, получаем неравенство

$$2m(n-1) \ge nL + \sum_{r=1}^{\rho} r(r-2)\nu_r(w). \tag{5}$$

***Замечание* 1.** Так как

$$\nu_1(w) \le \sum_{j=1}^{L}\operatorname{card} E(A_j, w),$$

то из (5) следует неравенство

$$\sum_{j=1}^{L}\operatorname{card} E(A_j, w) \ge nL - 2m(n-1).$$

В [2, с. 201] это неравенство доказано с ошибкой в рассуждениях. На самом деле, в [2] доказано неравенство

$$\sum_{r=1}^{m} r\nu_r(w) \geq nL - 2m(n-1),$$

более слабое, так как

$$\sum_{r=1}^{m} r\nu_r(w) \geq \sum_{r=1}^{m} \nu_r(w) = \sum_{r=1}^{m} \sum_{j=1}^{L} \nu_r(A_j, w) =$$

$$= \sum_{j=1}^{L} \sum_{r=1}^{m} \nu_r(A_j, w) = \sum_{j=1}^{L} \operatorname{card} E(A_j, w).$$

3. Оценки числа нулей результанта. Пусть у алгебраической функции $w(z)$, определяемой уравнением (1), и у алгебраической функции $\hat{w}(z)$, определяемой уравнением

$$\hat{P}(z, w) \equiv \hat{p}_m(z) w^m + \hat{p}_{m-1}(z) w^{m-1} + \ldots + \hat{p}_0(z) = 0, \tag{6}$$

$$\deg_w \hat{P} = m \geq 1, \ \deg_z \hat{P} = n \geq 1,$$

совпадают множества

$$E_r(A_j, w) = E_r(A_j, \hat{w}), \quad 1 \leq j \leq L, \quad 1 \leq r \leq \rho \leq m. \tag{7}$$

Выделяя однозначные ветви $w_j(z)$, $\hat{w}_j(z)$ алгебраических функций $w(z)$ и $\hat{w}(z)$ подобно тому, как это делалось в п. 2 для $z = z(w)$, получаем [3, с. 131] для результанта $R(z; P, \hat{P}) = R(P, \hat{P})$ многочленов $P(z, w)$ и $\hat{P}(z, w)$ как многочленов от w выражение

$$R(P, \hat{P}) = \left(p_m(z) \hat{p}_m(z)\right)^m \prod_{j,k=1}^{m} \left(w_j(z) - \hat{w}_k(z)\right).$$

Предположим, что $w \neq \hat{w}$ и над A-точкой z_0 и для $w(z)$, и для $\hat{w}(z)$ лежат а. э. $e_z(z_0, A, p_j, q_j)$, $1 \leq j \leq r$, функции $w(z)$ и $e_z(z_0, A, \hat{p}_k, \hat{q}_k)$, $1 \leq k \leq \hat{r}$, функции $\hat{w}(z)$. Тогда эти а. э. вносят в результант нуль порядка не меньше

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\hat{r}} \left(\frac{q_j}{p_j} \wedge \frac{\hat{p}_k}{\hat{q}_k} \right) q_j \hat{q}_k = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\hat{r}} \left(p_j \hat{q}_k \wedge \hat{p}_k q_j \right) \geq \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\hat{r}} p_j \wedge \hat{p}_k \geq r\hat{r}. \tag{8}$$

Замечание 2. Справедлива и более точная оценка последней суммы. Предположим, что $p_1 = \max\{p_j, \hat{p}_k : 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq \hat{r}\}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\hat{r}} p_j \wedge \hat{p}_k \geq \sum_{k=1}^{\hat{r}} p_1 \wedge \hat{p}_k + (r-1)\hat{r} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\hat{r}} \hat{p}_k + (r-1)\hat{r} = \mu(z_0, A, \hat{w}) + (r-1)\hat{r} \geq$$

$$\geq \min\{\mu(z_0, A, \hat{w}) + r\hat{r} - \hat{r}, \mu(z_0, A, w) + r\hat{r} - r\}. \tag{9}$$

Очевидно, оценка (9) не зависит от предположения о p_1.

Теперь, учитывая (7) и (8), получаем, что сумма порядков нулей результанта $R(P, \hat{P})$ не меньше

$$\sum_{j=1}^{L}\sum_{r=1}^{\rho} r^2\nu_r(A_j, w) = \sum_{r=1}^{\rho} r^2 \sum_{j=1}^{L}\nu_r(A_j, w) = \sum_{r=1}^{\rho} r^2\nu_r(w).$$

Так как $\deg_z R(P, \hat{P}) \le 2mn$ [2, с. 200], то справедливо неравенство

$$2mn \ge \sum_{r=1}^{\rho} r^2\nu_r(w). \tag{10}$$

Теперь пусть вместо (7) нам известно лишь, что $E^{\rho}(A_j, w) = E^{\rho}(A_j, \hat{w})$, $1 \le j \le L$, для некоторого ρ, $1 \le \rho \le m$. Тогда в (8) оцениваем $r\hat{r} \ge r$ и точно так же, как (10), получаем

$$2mn \ge \sum_{r=1}^{\rho} r\nu_r(w). \tag{11}$$

4. Доказательство теорем 2 и 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим, что $w \ne \hat{w}$. Складывая неравенства (5) и (10) с $L = L_2$, получаем $4mn - 2m \ge nL_2 + 2N(\rho, w)$, что противоречит определению числа L_2. Если выполнены условия теоремы 3, но $w \ne \hat{w}$, то складываем неравенства (5) и (11) с $L = L_3$ и получаем $4mn - 2m \ge nL_3 + N(\rho, w) \ge nL_3 + 2\nu^{\rho}(w) - 2\nu_1(w)$. Заменяя w на $\hat{w}$, получаем $4mn - 2m \ge nL_3 + 2\left(\nu^{\rho}(w) - \nu_1(w) \wedge \nu_1(\hat{w})\right)$, что противоречит определению L_3. Обе теоремы доказаны.

Если известно, что в условиях теоремы 2 $N(\rho, w) = 0$ или в условиях теоремы 3 $\nu^{\rho}(w) = \nu_1(w)$ и $\nu^{\rho}(\hat{w}) = \nu_1(\hat{w})$, то $L_2 = L_3 = L_1$ и примеры, показывающие неулучшаемость в общем случае оценок для L_2 и L_3, имеются в [2]* и в [4, с. 224]. При $N(\rho, w) > 0$ построить примеры, показывающие неулучшаемость выражения для L_2 в теореме 2, не удалось, т. е. не выяснено, будет ли справедливой теорема 2, если заменить L_2 на $L_2 - 1$. Однако в общем случае теорема 2 не верна, если заменить L_2 на $L_2 - 2$. Это показывает следующий пример.

Пример. Пусть

$$n \ge 2, \quad P(z, w) = 2w^{n+1} - 5w^n + z^n w + 2z^n,$$

$$\hat{P}(z, w) = -w^{n+1} - 2w^n - 2z^n w + 5z^n.$$

Рассматривая P и $\hat{P}$ как многочлены от z, убеждаемся, что эти многочлены неприводимы (см. [4], замечание после примера 4). Пусть $\omega = \exp(i2\pi/n)$, $\eta = \exp i\pi/n$. Оба многочлена $P(z, 0)$ и $\hat{P}(z, 0)$ имеют при $z = 0$ нуль n-го порядка. Функция $w = w(z)$ имеет над $z = 0$ n а. э. вида

$$w_j(z) = \omega^j \sqrt[n]{0{,}4}\, z + a_{2j}z^2 + \ldots, \quad 0 \le j \le n-1.$$

Это нетрудно установить, заметив, что обратную алгебраическую функцию $z = z(w)$ можно представить явной формулой $z = w((5 - 2w)/(w + 2))^{1/n}$. Из этого же выражения для $z = z(w)$ находим, что $w = w(z)$ имеет над $z = \infty$ полюс n-го порядка и над $z = \infty$ лежат n а. э. вида

$$w_j(z) = \eta\omega^j \sqrt[n]{0{,}5}\, z + b_{0j} + b_{-1j}z^{-1} + \ldots, \quad 0 \le j \le n-1.$$

* В примерах в [2, с. 202] в строках 8, 9 и 4, 3 снизу следует заменить 5 и 3 на $5^{1/k}$ и $3^{1/k}$.

Аналогично получаем, что у функции $w = \hat{w}(z)$ над $z = 0$ лежат n а. э. вида

$$\hat{w}_j(z) = \omega^j \sqrt[n]{2{,}5}\, z + \hat{a}_{2j} z^2 + \ldots, \quad 0 \le j \le n-1,$$

а над $z = \infty$ — n а. э. вида

$$\hat{w}_j(z) = \eta \omega^j \sqrt[n]{2}\, z + \hat{b}_{0j} + \hat{b}_{-1j} z^{-1} + \ldots, \quad 0 \le j \le n-1.$$

Таким образом,

$$E_n(0, w) = E_n(0, \hat{w}) = \{0\}, \qquad E_n(\infty, w) = E_n(\infty, \hat{w}) = \{\infty\},$$

$$\nu_n(0, w) = \nu_n(0, \hat{w}) = \nu_n(\infty, w) = \nu_n(\infty, \hat{w}) = 1.$$

Так как

$$P(z, 1) = \hat{P}(z, 1) = -3 + 3z^n, \qquad P(z, 7) = -\hat{P}(z, 7) = -9(7^n + z^n),$$

справедливы соотношения

$$E_1(1, w) = E_1(1, \hat{w}) = \{\omega^j\colon 0 \le j \le n-1\},$$

$$E_1(7, w) = E_1(7, \hat{w}) = \{7\eta\omega^j\colon 0 \le j \le n-1\}.$$

Следовательно, $\nu_1(1, w) = \nu_1(1, \hat{w}) = \nu_1(7, w) = \nu_1(7, \hat{w}) = n$. Будем считать, что $A_1 = 0$, $A_2 = \infty$, $A_3 = 1$, $A_4 = 7$. Тогда

$$N(n, w) = N(n, \hat{w}) = 2n(n-1), \quad \nu^n(w) - \nu_1(w) = \nu^n(\hat{w}) - \nu_1(\hat{w}) = 2.$$

В результате простого подсчета имеем $L_2 = 6 < L_3 = 4n + 3 + [-6/n] \le L_1 = 4n + 2$. При $n \ge 6$ получаем $L_3 = L_1$, при $2 \le n \le 5$ — $L_3 < L_1$. Если вместо $L_2 = 6$ взять $L_2 = 4$, то теорема 2 теряет силу, как показывает приведенный пример.

Также не известно, точна ли теорема 3, если $\nu^\rho(w) > \nu_1(w) \wedge \nu_1(\hat{w})$.

5. Теоремы единственности для целых алгебраических функций. Если в уравнении (1), определяющем алгебраическую функцию $w = w(z)$, $p_m(z) \equiv \text{const} \ne 0$, то алгебраическая функция $w(z)$ называется целой. Другими словами, алгебраическая функция является целой тогда и только тогда, когда ее единственный полюс порядка n лежит в ∞.

Теорема 4. *Если в условиях теорем* 1–3 *функции* w *и* $\hat{w}$ *— целые алгебраические функции и все* $A_j \ne \infty$, *то утверждения этих теорем остаются справедливыми, если в них соответственно числа* L_k, $k = 1, 2, 3$, *заменить числами* L'_k, *где*

$$L'_1 = 4m - 1 + [-(2m-1)/n],$$

$$L'_2 = 4m - 1 + [-(2m - 1 + 2N(\rho, a, w))/n],$$

$$L'_3 = 4m - 1 + [-(2m - 1 + 2\nu^\rho(w) - 2\nu_1(w) \wedge \nu_1(\hat{w}))/n].$$

Чтобы уточнить таким образом утверждения теорем 1–3, усилим при этих дополнительных условиях неравенства (5), (10) и (11). Неравенство (5) справедливо и в том случае, когда одно значение среди A_j равно ∞ и среди A_j-точек имеется бесконечно удаленная. Будем считать, что $A_{L+1} = \infty$. Так как имеется лишь один полюс в ∞, то $\mu(\infty, \infty, w) = n$. Если над ∞ лежат r_0 а. э., то $\nu_{r_0}(\infty, w) = 1$, $\nu_r(\infty, w) = 0$ при $r \ne r_0$, а (5) имеет вид

$$2m(n-1) \geq n(L+1) + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(a,w) + r_0(r_0-2) \geq$$

$$\geq n(L+1) + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(a,w) - 1,$$

откуда

$$(2m-1)(n-1) \geq nL + \sum_{r=1}^{m} r(r-2)\nu_r(w). \tag{12}$$

В рассматриваемом случае в неравенствах (10) и (11) в левой части вместо $2mn$ будет $(2m-1)n$, так как $\deg_z R(P, \hat{P}) \leq (2m-1)n$ [2, с. 204]. Далее повторяются доказательства теорем 1–3. Например, в условиях теоремы 2 из неравенства (12) с $L = L_2'$ получаем

$$(2m-1)(n-1) \geq nL_2' + \sum_{r=1}^{\rho} r(r-2)\nu_r(w).$$

Слагая его с неравенством

$$(2m-1)n \geq \sum_{r=1}^{\rho} r^2\nu_r(w),$$

имеем $(2m-1)(2n-1) \geq nL_2' + 2N(\rho, w)$, что противоречит определению числа L_2'.

Отметим, что теорема 1 для целых алгебраических функций с $L = L_1'$ доказана в [2] (второе утверждение теоремы 2), но в доказательстве использовано неверное утверждение ([2, с. 204], строки 9 и 10). В данной работе этот пробел в доказательстве устранен.

1. *Неванлинна Р.* Униформизация. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 436 с.
2. *Goldberg A. A., Pyana V. A.* The uniqueness theorems for algebraic functions // Adv. Sov. Math. – 1992. – **11**. – P. 199–204.
3 *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
4. *Гольдберг А. А., Пьяна В. А.* Некоторые теоремы единственности для рациональных, алгебраических и алгеброидных функций // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 2. – С. 212–226.

Получено 09.03.94