УДК 519.41 / 47

О. Ю. Дашкова, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

ГИПЕРЦЕНТРАЛЬНЫЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО СУБНОРМАЛЬНОГО РАНГА

The notion of subnormal rank of a group is introduced. Hypercentral groups of finite subnormal rank are studied. An example of a hypercentral group, which has a finite subnormal rank and infinite (special) rank, is constructed.

Введено поняття субнормального рангу групи. Вивчаються гіперцентральні групи скінченного субнормального рангу. Побудовано приклад гіперцентральної групи скінченного субнормального рангу, яка має нескінченний (спеціальний) ранг.

Подгруппа H группы G субнормальна в G, если существуют неотрицательное целое число m и ряд

$$H = H_m \leq H_{m-1} \leq \ldots \leq H_1 \leq H_0 = G \tag{1}$$

подгрупп группы G такой, что подгруппа H_i нормальна в $H_{i-1}, i = 1, 2, \ldots, m$. Для фиксированных H и G число m и ряд (1) определяются, вообще говоря, неоднозначно. Наименьшее число m с указанным свойством называется дефектом субнормальной подгруппы H группы G.

В настоящей работе начато исследование групп, у которых определенные ограничения налагаются на субнормальные подгруппы дефекта 2.

Определение. *Субнормальным рангом группы G, содержащей по крайней мере одну субнормальную подгруппу дефекта 2, назовем наименьшее число r с тем свойством, что всякая субнормальная подгруппа дефекта 2 группы G имеет (специальный) ранг, не превышающий числа r. В случае, когда такого числа r нет, субнормальный ранг группы G считается бесконечным.*

Для субнормального ранга группы G будем использовать обозначение $r_{sn}(G)$. Символом $r(G)$ обозначается, как это общепринято, (специальный) ранг группы G.

Следует отметить, что если подгруппа H / K фактор-группы G / K субнормальна дефекта 2, то H является субнормальной подгруппой дефекта 2 группы G. Следовательно, из конечности субнормального ранга группы G, содержащей по крайней мере одну субнормальную подгруппу дефекта 2, вытекает конечность субнормального ранга произвольной фактор-группы G/K, содержащей хотя бы одну субнормальную подгруппу дефекта 2, причем справедливо неравенство $r_{sn}(G / K) \leq r_{sn}(G)$.

В настоящей работе изучаются гиперцентральные группы конечного субнормального ранга.

Лемма. *Если G — гиперцентральная группа, содержащая субнормальную подгруппу дефекта 2 и имеющая конечный субнормальный ранг, то ранг ее центра $Z(G)$ не превышает $2r_{sn}(G) + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $HZ(G)$, где H — субнормальная подгруппа дефекта 2 группы G. Если подгруппа $HZ(G)$ субнормальна дефекта 2, то с учетом конечности субнормального ранга группы G получаем неравенство $r(Z(G)) \leq r_{sn}(G)$.

В случае нормальной подгруппы $HZ(G)$ предположим, что

$$r(Z(G)) > 2r_{sn}(G) + 1. \tag{2}$$

Поскольку ранг $r(H)$ не превышает $r_{sn}(G)$, то

$$r(H \cap Z(G)) \leq r_{sn}(G). \tag{3}$$

Так как подгруппа H группы G субнормальна дефекта 2, а $HZ(G)$ нормальна

© О. Ю. ДАШКОВА, 1995

в G, найдется элемент z_0 из $Z(G)$, не принадлежащий подгруппе H, который содержится в нормальном замыкании H^G. Поскольку z_0 принадлежит подгруппе $HZ(G)$, то элемент z_0 может быть представлен в виде $z_0 = h_i z_i$, $h_i \in H$, $z_i \in Z(G)$, $i = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что элементы $z_i z_j^{-1}$, $i, j = 1, 2, \dots$, содержатся в подгруппе H, и поэтому ранг подгруппы, порожденной всевозможными произведениями $z_i z_j^{-1}$, $i, j = 1, 2, \dots$, не превышает $r_{sn}(G)$. Следовательно, справедливо неравенство $r(Z_1) \le r_{sn}(G) + 1$, где $Z_1 = \langle z_1, z_2, \dots \rangle$. С учетом данного неравенства и неравенств (2), (3) получаем, что в центре $Z(G)$ можно выбрать подгруппу Z_2, для которой пересечение $Z_1 \cap Z_2$ единично, и справедливо неравенство

$$r(Z_2) > r_{sn}(G). \tag{4}$$

Из построения подгруппы Z_2 вытекает, что элемент z_0 не содержится в подгруппе $Z_2 H$. Отсюда с учетом того, что подгруппа H субнормальна дефекта 2, получаем, что подгруппа $Z_2 H$ также субнормальна дефекта 2, и поэтому $r(Z_2) \le r_{sn}(G)$. Противоречие с неравенством (4). Следовательно, $r(Z(G)) \le$ $\le 2 r_{sn}(G) + 1$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Неабелева нильпотентная группа конечного субнормального ранга имеет конечный ранг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай двуступенно нильпотентной группы G конечного субнормального ранга $r_{sn}(G)$. Докажем конечность ранга произвольной абелевой подгруппы A группы G. Предположим, что ранг $r(A)$ бесконечен. Поскольку согласно лемме ранг центра группы G конечен, то в A можно выбрать подгруппу B бесконечного ранга, для которой пересечение $Z(G) \cap B$ единично. Следовательно, взаимный коммутант $[B, G]$ отличен от единицы, откуда с учетом включения $[B, G] \le Z(G)$ вытекает, что подгруппа B субнормальна дефекта 2, и поэтому $r(B) \le r_{sn}(G)$. Противоречие. Тем самым доказано, что ранг произвольной абелевой подгруппы группы G конечен, и по тереме 25.2.1 из [1] ранг группы G конечен.

Рассмотрим теперь случай нильпотентной группы G, ступень нильпотентности n которой больше 2. Группа G имеет верхний центральный ряд

$$E = Z_0 < Z_1 < Z_2 < \dots < Z_{n-1} < Z_n = G,$$

причем согласно лемме с учетом неравенства $r_{sn}(G / Z_{i-1}) \le r_{sn}(G)$, $i = 1, 2, \dots$ $\dots, n-1$, получаем $r(Z_i / Z_{i-1}) \le 2 r_{sn}(G) + 1$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, ранги подгрупп Z_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$, конечны. Фактор-группа G / Z_{n-2} имеет ступень нильпотентности 2, и согласно доказанному ранее ранг $r(G / Z_{n-2})$ конечен. Отсюда с учетом конечности рангов $r(Z_i)$, $i = 1, 2, \dots$, $n-1$, вытекает конечность ранга группы G. Теорема доказана.

Теорема 2. *Неабелева гиперцентральная группа G без кручения конечного субнормального ранга $r_{sn}(G)$ нильпотентна и*

$$r(G) \le (r_{sn}(G) + 1)(r_{sn}(G) + 2)/2.$$

Доказательство. Покажем, что ранг произвольной максимальной нормальной абелевой подгруппы A группы G конечен и не превышает $r_{sn}(G) + 1$. Из гиперцентральности группы G и выбора подгруппы A следует, что фактор-группа $A / Z(G)$ не единична и не имеет кручения. Отсюда вытекает, что в подгруппе A можно выбрать субнормальную подгруппу B дефекта 2 группы

G, удовлетворяющую равенству $r(B) = r(A) - 1$. Поскольку подгруппа B субнормальна дефекта 2, то $r(B) \leq r_{sn}(G)$, и поэтому

$$r(A) \leq r_{sn}(G) + 1. \tag{5}$$

Из выбора подгруппы A вытекает, что A совпадает со своим централизатором $C_G(A)$. Отсюда в силу теоремы 1 из [2] получаем неравенство

$$r(G/A) \leq r(A)(r(A)-1)/2,$$

из которого с учетом неравенства (5) следует

$$r(G) \leq (r_{sn}(G)+1)(r_{sn}(G)+2)/2.$$

Согласно теореме 2 [3] группа G нильпотентна. Теорема доказана.

Теорема 3. *Гиперцентральная периодическая группа конечного субнормального ранга, содержащая субнормальную подгруппу дефекта* 2, *имеет конечный ранг.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай гиперцентральной p-группы G для некоторого простого числа p, имеющей конечный субнормальный ранг и содержащей субнормальную подгруппу дефекта 2. Докажем, что произвольная максимальная нормальная абелева подгруппа A группы G является черниковской. Если для любого элемента a группы G $\langle a\rangle^G = \langle a\rangle$, то нижний слой A_0 подгруппы A содержится в центре $Z(G)$, и согласно лемме $r(A_0) \leq 2r_{sn}(G)+1$. Поскольку $r(A_0) = r(A)$, то выполняется неравенство $r(A) \leq 2r_{sn}(G)+1$, и поэтому подгруппа A черниковская. Если в подгруппе A существует элемент a, для которого $\langle a\rangle^G \neq \langle a\rangle$, то в A можно выбрать субнормальную подгруппу B дефекта 2 группы G, удовлетворяющую равенству $r(B) = r(A) - 1$, откуда вытекает неравенство $r(A) \leq r_{sn}(G)+1$. Следовательно, подгруппа A является черниковской, и согласно теореме 1.15 [4] группа G также является черниковской.

Пусть теперь G — произвольная периодическая гиперцентральная группа конечного субнормального ранга, содержащая субнормальную подгруппу дефекта 2. Представим группу G в виде прямого произведения ее силовских подгрупп $G = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} G_i$. Из существования субнормальной подгруппы дефекта 2 в группе G вытекает существование субнормальной подгруппы дефекта 2 в одной из подгрупп G_i, $i = 1, 2, \ldots$. Положим, что подгруппа G_1 неабелева и содержит субнормальную подгруппу K дефекта 2. Согласно доказанному выше ранг $r(G_1)$ конечен. Подгруппа $K \times \left(\mathop{\times}\limits_{i=2}^{\infty} G_i\right)$ группы G субнормальна дефекта 2, и поэтому $r\left(\mathop{\times}\limits_{i=2}^{\infty} G_i\right) \leq r_{sn}(G)$. Отсюда следует конечность ранга группы G. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть G — гиперцентральная группа конечного субнормального ранга, T — ее периодический радикал. Если фактор-группа G/T неабелева, то ранг группы G конечен и не превышает* $((r_{sn}(G)+1)(r_{sn}(G)+2) + 2r_{sn}(G))/2$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 вытекает, что фактор-группа G/T имеет субнормальную подгруппу B/T дефекта 2. Подгруппа B группы G субнормальна дефекта 2, и поэтому $r(B) \leq r_{sn}(G)$. Тем самым установлено, что ранг подгруппы T не превышает $r_{sn}(G)$. Согласно теореме 2

$$r(G/T) \leq (r_{sn}(G)+1)(r_{sn}(G)+2)/2,$$

откуда с учетом полученного неравенства $r(T) \le r_{sn}(G)$ вытекает

$$r(G) \le ((r_{sn}(G)+1)(r_{sn}(G)+2)+2r_{sn}(G))/2.$$

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что конечность субнормального ранга гиперцентральной группы не влечет, вообще говоря, конечности ранга всей группы.

Пример. Группа G представима в виде

$$G = ((A \times B) \leftthreetimes \langle c \rangle) \leftthreetimes \left(\mathop{\times}_{j=1}^{\infty} \langle g_j \rangle \right),$$

где A и B — квазициклические 2-группы,

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i \rangle, \quad \langle a_1 \rangle < \langle a_2 \rangle < \ldots < \langle a_i \rangle < \ldots ,$$

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle b_i \rangle, \quad \langle b_1 \rangle < \langle b_2 \rangle < \ldots < \langle b_i \rangle < \ldots, \quad |a_i| = |b_i| = 2^i.$$

Действие элемента c второго порядка на подгруппе $A \times B$ определяется заданием его действия на элементах a_i и b_i: $a_i^c = b_i$, $b_i^c = a_i$, $i = 1, 2, \ldots$.

Элементы g_j, $j = 1, 2, \ldots$, бесконечного порядка задают автоморфизмы квазициклических подгрупп A и B. Как известно, каждому автоморфизму φ квазициклических 2-групп A и B соответствует последовательность целых положительных чисел

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots), \quad 0 < k_n < 2^n, \quad k_{n+1} \equiv k_n \pmod{2^n} \tag{6}$$

такая, что $\varphi(a_i) = a_i^{k_i}$, $\varphi(b_i) = b_i^{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots$. В группе G каждому автоморфизму g_j, $j = 1, 2, \ldots$, соответствует последовательность (6), у которой $k_1 = 1$. Тогда, полагая $a_0 = e$, $b_0 = e$, получаем, что факторы $\langle a_i b_i \rangle / \langle a_{i-1} b_{i-1} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots$, g_j-центральны для любого $j = 1, 2, \ldots$. Кроме того, полагаем $c^{g_j} = c$, $j = 1, 2, \ldots$.

Построенная группа G гиперцентральна, поскольку имеет возрастающий центральный ряд

$$E < \langle a_1 b_1 \rangle < \langle a_2 b_2 \rangle < \ldots < \langle a_i b_i \rangle < \ldots < \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i b_i \rangle < \langle a_1 \rangle \times \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i b_i \rangle <$$

$$< \langle a_2 \rangle \times \bigcup_{i=1}^{\infty} \langle a_i b_i \rangle < \ldots < \bigcup_{i=1}^{\infty} (\langle a_i \rangle \times \langle b_i \rangle) < ((A \times B) \leftthreetimes \langle c \rangle) \leftthreetimes \left(\mathop{\times}_{j=1}^{\infty} \langle g_j \rangle \right).$$

Из строения группы G вытекает, что всякая субнормальная подгруппа дефекта 2 группы G содержится в подгруппе $A \times B$, и поэтому $r_{sn}(G) \le 2$. Вместе с тем, подгруппа $\langle a_1 \rangle \times \langle b_2 \rangle$ группы G субнормальна дефекта 2 и имеет ранг 2. Следовательно, группа G имеет конечный субнормальный ранг, равный 2, и бесконечный (специальный) ранг.

1. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
2. *Сесекин Н. Ф.* О локально нильпотентных группах без кручения // Мат. сб. – 1953. – **32**, № 2. – С. 407–442.
3. *Мягкова Н. Н.* О группах конечного ранга // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1949. – **13**, № 6. – С. 495–512.
4. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Получено 09.03.94