УДК 531. 381

**В. Н. Кошляков**, акад. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА, УСТАНОВЛЕННОГО НА ВИБРИРУЮЩЕМ ОСНОВАНИИ

The results of papers [1 – 5] are developed. The possibly of stabilization with help of vertical of unstable states of a rotating symmetryc body is shown.

Розвиваються результати робіт [1 – 5]. Показана можливість стабілізації за допомогою вертикальної вібрації нестійких станів симетричного тіла, що обертається.

В развитие работ [1 – 5] рассматривается задача о стабилизации с помощью вертикальной вибрации симметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Учитываются силы диссипации.

**1.** Дифференциальное уравнение, описывающее движение маятника с вибрирующей по вертикали точкой подвеса, имеет вид

$$\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + \frac{1}{l}(g - ap^2\cos pt)\sin\theta = 0, \tag{1}$$

где $\theta$ — отсчитываемый от нижнего положения равновесия угол отклонения маятника длины $l$; $2b$ — коэффициент, учитывающий сопротивление среды; $g$ — ускорение силы тяжести; $a$ и $p$ — соответственно амплитуда и круговая частота вертикальных колебаний точки подвеса, совершаемых согласно закону $\zeta = a\cos pt$.

В предположении достаточно малого сопротивления среды в работе [1] дана оценка снизу величины частоты вибрации, при которой достигается устойчивость верхнего положения маятника $\theta = \pi$:

$$p > \frac{1}{a}\sqrt{2gl}. \tag{2}$$

В возмущенном движении полагаем $\theta = \pi + \alpha$. Соответствующее уравнение маятника в предположении малости $\alpha$ таково:

$$\ddot{\alpha} + 2b\dot{\alpha} + \frac{1}{l}(ap^2\cos pt - g)\alpha = 0. \tag{3}$$

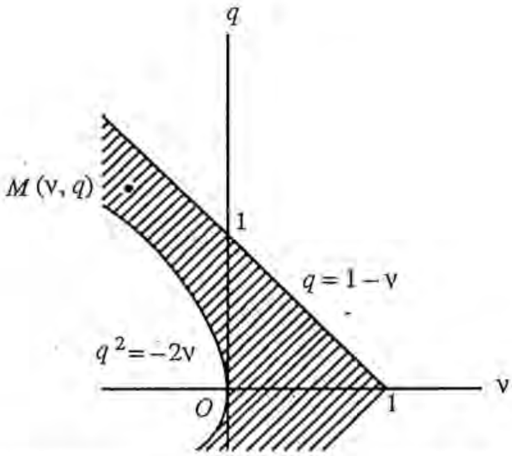
Осуществляя в (3) подстановку $\alpha = e^{-bt}y$ и переходя к новому аргументу $z$, полагая $pt = 2z - \pi$, получаем уравнение Матье в стандартном виде [6]

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (\nu - 2q\cos 2z)y = 0, \tag{4}$$

где

$$\nu = -\frac{4}{p^2}\left(b^2 + \frac{q}{l}\right), \quad q = \frac{2a}{l}. \tag{5}$$

Условие устойчивости вертикального положения маятника непосредственно вытекает из анализа диаграммы Айнса – Стретта, относящейся к уравнению (4) [6, 7]. На рисунке изображена часть этой диаграммы, захватывающая область отрицательных значений $\nu$. Заштрихованный участок диаграммы соответствует области устойчивости. Устойчивость (неасимптотическая) тривиального решения уравнения (4) будет обеспечена, если точка $M(\nu, q)$ находится в пределах заштрихованной части диаграммы.




Применительно к отрицательным значениям $\nu$ это всегда будет иметь место, если названная точка находится выше параболы $q^2 = -2\nu$ и ниже прямой $q = 1 - \nu$. Это приводит к условию

$$1-\nu > \frac{2a}{l} > \sqrt{-2\nu}. \tag{6}$$

В случае, когда $2a < l$ (что всегда имеет место при достаточно малой величине амплитуды вибрации), левая часть неравенства (6) в силу первой из формул (5) всегда выполняется; правая же часть приводит к условию

$$ap > \sqrt{2l(g+b^2 l)}, \tag{7}$$

обеспечивающему ограниченность решений уравнения (4) и асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения (3). В предположении достаточно слабого демпфирования (это обстоятельство оговорено в [1]) можно пренебречь вторым слагаемым в (7), после чего приходим к условию (2).

**2.** Методика, изложенная в п. 1, может быть применена к задаче стабилизации с помощью вертикальной вибрации движения некоторого симметричного твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки $O$. Для решения поставленной задачи свяжем с телом трехгранник $Oxyz$, оси которого совпадают с направлениями главных осей инерции тела в точке $O$. Центр тяжести примем лежащим выше точки опоры на оси $Oz$.

В предположении, что основание совершает гармонические колебания вдоль неподвижной вертикали $O\zeta$ согласно закону $\zeta = a\cos pt$, выпишем уравнения Эйлера – Пуассона для этого случая:

$$\begin{gathered} A\dot{p} + (C-A)qr = m(g - ap^2\cos pt)z_c\gamma_2 + M_x^*, \\ A\dot{q} - (C-A)rp = -m(g - ap^2\cos pt)z_c\gamma_1 + M_y^*, \\ C\dot{r} = M_z^*, \\ \dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \ \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \ \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $A, A$ и $C$ — моменты инерции относительно осей $Ox$, $Oy$ и $Oz$ соответственно; $m$ — масса тела; $p, q, r$ — проекции угловой скорости тела на указанные оси; $\gamma_1$, $\gamma_2$ и $\gamma_3$ — направляющие косинусы восходящей вертикали $O\zeta$ с осями $Ox$, $Oy$ и $Oz$; $z_c$ — координата центра тяжести тела по оси $Oz$ (в дальнейшем полагаем $z_c \equiv l > 0$); $M_x^*$, $M_y^*$ и $M_z^*$ — моменты каких-либо сторонних сил. К числу последних могут быть отнесены силы сопротивления (в частности, сопротивления воздуха), приводящие к диссипации энергии.

Будем учитывать силы диссипации, суммарные моменты которых относительно осей $Ox, Oy$ и $Oz$ пропорциональны проекциям $p, q$ и $r$ угловой скорости тела.

Учитывая равноправность экваториальных осей $Ox$ и $Oy$, полагаем [8]

$$M_x^* = -\lambda A p,\ M_y^* = -\lambda A q,\ M_z^* = -\lambda_1 C r, \tag{9}$$

где $\lambda$ и $\lambda_1$ — некоторые постоянные, зависящие от формы поверхности тела.

При этих условиях третье из уравнений (8) немедленно интегрируется и получаем

$$r = \omega = \omega_0 e^{-\lambda_1 t}, \tag{10}$$

где $\omega_0$ — начальная угловая скорость тела по оси $Oz$.

Полагая в первом приближении $\gamma_3 = 1$, из оставшихся уравнений системы (8) имеем

$$\begin{gathered}\ddot{\gamma}_1 + \lambda\dot{\gamma}_1 - \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_2 + \frac{1}{A}[(C-A)\omega^2 - \\ - m(g-ap^2\cos pt)l]\gamma_1 + \omega(\lambda_1-\lambda)\gamma_2 = 0, \\ \ddot{\gamma}_2 + \lambda\dot{\gamma}_2 + \frac{2A-C}{A}\omega\dot{\gamma}_1 + \frac{1}{A}[(C-A)\omega^2 \\ - m(g-ap^2\cos pt)l]\gamma_2 - \omega(\lambda_1-\lambda)\gamma_1 = 0,\end{gathered} \tag{11}$$

где $\omega$ определяется согласно (10).

Переходим далее к новым переменным $\zeta_1$ и $\zeta_2$ с помощью неособенного преобразования вращения, полагая

$$\xi_1 = \gamma_1\cos\vartheta - \gamma_2\sin\vartheta,\quad \xi_2 = \gamma_1\sin\vartheta + \gamma_2\cos\vartheta, \tag{12}$$

где

$$\vartheta = \int_0^t \Omega(\tau)\,d\tau. \tag{13}$$

Функция $\Omega = \Omega(t)$, имеющая размерность угловой скорости, принимается равной половинному значению коэффициента при $\dot{\gamma}_1$ и $\dot{\gamma}_2$ в уравнениях (11), а именно [9]:

$$\Omega(t) = \frac{2A-C}{2A}\omega(t) = \frac{2A-C}{2A}\omega_0 e^{-\lambda_1 t}. \tag{14}$$

Относительно переменных $\xi_1$ и $\xi_2$ получаем уравнения вида

$$\begin{gathered}\ddot{\xi}_1 + 2b\dot{\xi}_1 + \Phi(t)\xi_1 + \omega_0(\lambda_1-2b)e^{-\lambda_1 t}\xi_2 = 0, \\ \ddot{\xi}_2 + 2b\dot{\xi}_2 + \Phi(t)\xi_2 - \omega_0(\lambda_1-2b)e^{-\lambda_1 t}\xi_1 = 0,\end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\lambda = 2b,\ \Phi(t) = \frac{C^2\omega_0^2 e^{-2\lambda_1 t} - 4Amgl}{4A^2} + \frac{map^2 l}{4A}\cos pt. \tag{16}$$

Переходя, наконец, к переменным $y_1$ и $y_2$, полагая

$$\xi_1 = e^{-bt} y_1, \; \xi_2 = e^{-bt} y_2, \tag{17}$$

имеем

$$\begin{aligned} &\ddot{y}_1 + (\Phi(t) - b^2) y_1 + \omega_0 (\lambda_1 - 2b) e^{-\lambda_1 t} y_2 = 0, \\ &\ddot{y}_2 + (\Phi(t) - b^2) y_2 - \omega_0 (\lambda_1 - 2b) e^{-\lambda_1 t} y_1 = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

**3.** Рассмотрим некоторые частные случаи полученных уравнений, пренебрегая сначала сопротивлением среды. Этому соответствует $\lambda = \lambda_1 = 0$. Система (15) распадается при этом на два независимых уравнения одинаковой структуры

$$\ddot{y} + \Phi(t) y = 0, \tag{19}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{C^2\omega^2 - 4Amgl}{4A^2} + \frac{map^2 l}{A} \cos pt. \tag{20}$$

Угловую скорость $\omega$ собственного вращения тела в данном случае следует считать постоянной величиной, равной своему начальному значению $\omega_0$. Уравнение (20) легко приводится к виду (4), причем

$$\nu = \frac{1}{A^2 p^2}(C^2\omega^2 - 4Amgl), \; q = \frac{2mal}{A}. \tag{21}$$

При отсутствии вибрации $(a \equiv 0)$ необходимое условие ограниченности решения уравнения (19) имеет вид

$$C^2\omega^2 - 4Amgl > 0, \tag{22}$$

совпадающий с условием устойчивости волчка Лагранжа [10].

С помощью вертикальной вибрации можно, однако, добиться стабилизации движения и в случае, когда $C^2\omega^2 - 4Amgl < 0$. Используя диаграмму Айнса – Стретта и условие (6), получаем

$$1 + \frac{1}{A^2p^2}(4Amgl - C^2\omega^2) > \frac{2mal}{A} > \sqrt{\frac{2}{A^2p^2}\left(4Amgl - C^2\omega^2\right)}. \tag{23}$$

При $2mal < A$ левая часть неравенства (25) всегда выполняется, если $C^2\omega^2 - 4Amgl \le 0$; правая же часть приводит к оценке снизу величины частоты вибрации для данного случая:

$$p > \frac{1}{2mal}\sqrt{2\left(4Amgl - C^2\omega^2\right)}. \tag{24}$$

Всякий раз, когда подкоренное выражение в (24) положительно, вращение тела играет полезную роль, поскольку с увеличением $\omega$ уменьшается необходимое для стабилизации движения значение частоты вибрации и соответственная ей скорость вибрации.

Устойчивость может быть достигнута и в случае $\nu = 0$, чему соответствует условие $C^2\omega^2 = 4Amgl$. Пользуясь диаграммой Айнса – Стретта, заключаем, что устойчивые состояния в этом случае имеют место при $0 < q < 1$. Полагая $A = m\rho^2$, где $\rho$ — экваториальный радиус инерции тела, с учетом второй из формул (5) получаем условие устойчивости в виде

$$a < \frac{\rho^2}{2l}, \tag{25}$$

т. е. амплитуда вибрации должна быть меньше половины приведенной длины физического маятника, соответствующей $l$.

В случае, когда тело вообще не вращается ($\omega = 0$), рассмотрение, аналогичное предыдущим, приводит к известному условию устойчивости вертикального положения физического маятника, установленного на вибрирующем основании [1, 4]:

$$ap > \sqrt{2g\frac{\rho^2}{l}}. \tag{26}$$

Если выполняется условие (22), то при наличии вибрации неустойчивые состояния могут иметь место при попадании в зоны параметрического резонанса вблизи точек

$$p = 2\frac{k}{N}, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \tag{27}$$

где $k$ — частота колебаний при отсутствии параметрического возбуждения. Параметрический резонанс проявляется наиболее ощутимо при $N = 1$, когда частота возбуждения равна удвоенной часоте собственных колебаний, имеющих место при отсутствии параметрического возбуждения. Попадание в зоны параметрического резонанса исключается, если в уравнении (19) удовлетворить достаточному признаку устойчивости Ляпунова, согласно которому в случае $\Phi(t) \geq 0$ (тождественное обращение в нуль функции $\Phi(t)$ исключается) и при выполнении условия [10]

$$T \int_0^T \Phi(t)\,dt \leq 4, \tag{28}$$

где $T$ — период параметрического возбуждения, корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (19), будут мнимыми с модулями равными единице. Это свидетельствует об ограниченности процесса во времени. Удовлетворение признаку Ляпунова приводит к условию

$$\frac{4A^2p^2}{\pi^2} \geq C^2\omega^2 - 4Amgl \geq 4Amap^2l. \tag{29}$$

**4.** Обратимся к уравнениям (18), в которых учитывается влияния сил сопротивления. Матричное представление этих уравнений таково:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + R(t)y = 0, \tag{30}$$

где $y = (y_1, y_2)$ — матрица-столбец переменных $y_s$, $s = 1, 2$, а $R(t)$ — некоторая квадратная матрица размера $2 \times 2$. Учитывая выражение (16), матрицу $R(t)$ можно представить в виде суммы двух квадратных матриц $P(t)$ и $Q(t)$, выбрав эти матрицы так, чтобы $P(t)$ оказалась периодической с периодом вибрации $2\pi/p$, а $Q(t)$ содержала бы во всех своих элементах экспоненты $\exp(-\lambda_1 t)$ и $\exp(-2\lambda_1 t)$. Тогда при ограниченности всех решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)y = 0 \tag{31}$$

будут ограниченными и все решения уравнения (30), если

$$\int_0^t \|Q(t)\|\,dt < \infty, \tag{32}$$

где $\|Q(t)\|$ — норма матрицы $Q$ [11]. Применительно к рассматриваемому случаю имеем

$$P(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{map^2l}{4A}\cos pt - \left(\dfrac{mgl}{A} + b^2\right) & 0 \\ 0 & \dfrac{map^2l}{4A}\cos pt - \left(\dfrac{mgl}{A} + b^2\right) \end{bmatrix},$$

$$Q(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{C^2\omega_0^2 e^{-2\lambda_1 t}}{4A^2} & \omega_0(\lambda - 2b)e^{-\lambda_1 t} \\ -\omega_0(\lambda - 2b)e^{-\lambda_1 t} & \dfrac{C^2\omega_0^2 e^{-2\lambda_1 t}}{4A^2} \end{bmatrix}. \qquad (33)$$

Условие (32), таким образом, выполняется. Матричному уравнению (31) соответствуют два одинаковых скалярных уравнения второго порядка

$$\ddot{y} + \left[\frac{map^2l}{A}\cos pt - \left(b^2 + \frac{mg\,l}{A}\right)\right]y = 0, \qquad (34)$$

приводящиеся к виду (4), где

$$\nu = -\frac{4}{p^2}\left(b^2 + \frac{mgl}{A}\right), \; q = \frac{2mal}{A}. \qquad (35)$$

Использование диаграммы Айнса – Стретта приводит к условию

$$ap > \frac{\rho}{l}\sqrt{2\left(b^2\rho^2 + gl\right)}. \qquad (36)$$

Соблюдение условия (36) соответствует нахождению точки $M(\nu, q)$ в пределах зоны устойчивости решений уравнения (34) и при принятом выборе матриц $P(t)$ и $Q(t)$ приводит к ограниченности решений уравнения (30), которому соответствует система (18). А это в силу подстановок (17) приводит к асимптотической устойчивости тривиального решения системы (15). Поскольку неособенная подстановка (12) свойств устойчивости не меняет, то асимптотически устойчиво будет и тривиальное решение системы (11). Ему отвечает невозмущенное движение тела, при котором

$$p = q = 0, \; r = \omega = \omega_0 e^{-\lambda_1 t}, \; \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \; \gamma_3 = 1.$$

1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. тр. Ин-та строит. механики УССР. – 1950. – **14** – С. 9–34.
2. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1951. – **21**, №5. – С. 588–597.
3. *Челомей В. Н.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, №3. – С. 345–347.
4. *Стрижак Т. Г.* Метод усреднения в задачах механики. – Киев; Донецк: Выща шк., 1982. – 250 с.
5. *Erdeilyi A.* Über die kleinen Schwingungen eines Pendels mit oszilierenden Aufhängepunkt // Z. angew. Math. und Mech., 1934. – **14**. – S. 235–247.
6. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
7. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
8. *Булгаков Б. В.* Прикладная теория гироскопов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 400 с.
9. *Кошляков В. Н.* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
10. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. – М.: Наука, 1965. – 208 с.
11. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 215 с.

Получено 23.05.95