УДК 519.6

К. Г. Валеев, д-р физ.-мат. наук,
О. Я. Костинский, преп. (Киев. эконом. ун-т)

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ С ПОМОЩЬЮ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ

A new method calculating Bessel functions of the first kind and integer order is given. By using the Laplace transformation [1], we solve a linear differential equation, which defines the generating function for the Bessel functions. The Bessel functions there are expressed in terms of continuous fractions [2].

Запропоновано новий спосіб обчислення функцій Бесселя першого роду цілого порядку. За допомогою перетворення Лапласа [1] розв'язується лінійне диференціальне рівняння, яке визначає твірну функцій Бесселя, що виражаються через неперервні дроби [2].

Известно [3, 4], что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t,z)}{dt} = iz\cdot y(t,z)\cdot\cos t;\quad y(0,z) = 1,\quad z = \text{const}, \tag{1}$$

определяет производящую функцию

$$y(t,z) = \exp\{iz\cdot\sin t\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\cdot\exp\{int\} \tag{2}$$

для функций Бесселя. Введем изображение по Лапласу

$$f(p,z) = \int_0^\infty y(t,z)\cdot\exp\{-pt\}dt,$$

которое удовлетворяет разностному уравнению

$$-0{,}5iz\cdot f(p-i,z) + p\cdot f(p,z) - 0{,}5iz\cdot f(p+i,z) = 1. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) дано в работе [1] в виде ряда

$$f(p,z) = \frac{1}{D(p,z)}\big(1+\varphi(p,z)(1+\varphi(p+i,z)(1+\varphi(p+2i,z)(1+\ldots)))+$$

$$+\psi(p,z)(1+\psi(p-i,z)(1+\psi(p-2i,z)(1+\ldots)))\big), \tag{4}$$

где $\varphi(p,z)$ и $\psi(p,z)$ — непрерывные дроби, определяемые нелинейными разностными уравнениями

$$\varphi(p,z) = \frac{0{,}5zi}{p+i-0{,}5zi\cdot\varphi(p+i,z)},\quad \psi(p,z) = \frac{0{,}5zi}{p-i-0{,}5zi\cdot\psi(p-i,z)}, \tag{5}$$

а знаменатель в изображении $f(p,z)$ задан выражением [1]

$$D(p,z) = p - 0{,}5zi\cdot\varphi(p,z) - 0{,}5zi\cdot\psi(p,z). \tag{6}$$

Отыскание функций Бесселя $J_n(z)$ сводится к отысканию вычетов функции $f(p, z)$ в полюсах $p = ni$, $n = 0, 1, 2, \ldots n$. Приведем алгоритм вычисления при $y = 0{,}5z$.

1. При достаточно большом значении $N > |y|$ полагаем

$$T_N = N - y, \quad D_N = 1 + y^2 T_N^{-1}, \quad B = 1 - y T_N^{-1}, \quad C_N = 1 + y T_N^{-1}.$$

2. Затем при $1 \le n \le N$ вычисляем по рекуррентным формулам следующие вспомогательные выражения:

$$T_{n-1} = n - 1 - y^2 T_{n-1}^{-1}, \quad K_{n-1} = 1 - y^2 K_n T_{n-1}^{-2},$$
$$B_{n-1} = 1 - y B_n T_{n-1}^{-1}, \quad C_{n-1} = 1 + y C_n T_{n-1}^{-1}. \tag{7}$$

3. Вычисляя T_1, K_2, C_1, B_1, находим вычет

$$\operatorname*{res}_{p=0} f(p, z) = (B_1 + C_1 - 1)(1 + 2y^2 K_2 T_1^{-2})^{-1} = J_0(z). \tag{8}$$

Результаты численного эксперимента при различных значениях $z = 2y$ представлены в таблице, где число N находилось из условия отыскания значений функции $J_0(z)$ с точностью до 10^{-9}. Число арифметических операций для вычисления $J_0(z)$ при заданном N не превышает $18N$.

z	2	4	8	16	32	64	128	256	512
N	14	19	25	37	61	97	170	308	573

Функции $J_n(z)$ при известном $J_0(z)$ можно вычислять по формулам

$$J_n(z) = J_{n-1}(z) \cdot y \cdot T_n^{-1} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ y = 0{,}5z),$$

которые фактически приведены в работе [3].

Отметим, что при достаточно больших значениях $|z|$ известные степенные разложения мало пригодны для вычисления функций Бесселя. Для проверки правильности вычислений использовались асимптотические разложения [3, 4].

1. *Валеев К. Г.* Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. – 1960. – 3, № 6. – С. 1113–1126.
2. *Хованский А. Н.* Приложение цепных дробей и их обобщений к вопросам приближенного анализа. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 204 с.
3. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их апроксимации. – М.: Мир, 1986. – 608 с.
4. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. – М.: Наука, 1990. – 528 с.

Получено 07.09.95