УДК 517.944

Н. Г. Хома, асп. (Тернопіл. пед. ін-т)

ІСНУВАННЯ ГЛАДКОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

The boundary-value problem for quasilinear equation $u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t]$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$ is studied. Conditions to guarantee the validity of the uniqueness of smooth solution are established.

Вивчається крайова періодична задача для квазілінійного рівняння $u_{tt} - u_x = F[u, u_t]$, $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + 2\pi) = u(x, t)$. Знаходяться умови, при яких справедлива теорема єдиності розв'язку.

Встановимо умови існування гладкого розв'язку такої 2π-періодичної задачі:

$$u_{tt} - u_{xx} = F[u, u_t], \quad 0 < x < \pi, \; t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t), \quad (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

Позначимо через C_π простір функцій, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \times \mathbb{R}$, через G_t простір функцій, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times \mathbb{R}$ разом з похідною по t, а через A такий простір функцій: $A = \{u : u(x, t) = u(\pi - x, t + \pi) = u(x, t + 2\pi)\}$.

Припустимо, що заданий у рівнянні (1) оператор $F[u, u_t]$, взагалі кажучи, нелінійний, переводить гладку $\left(u \in C_\pi^1 \cap A\right)$ функцію $u(x, t)$ в скалярну функцію $F[u, u_t](x, t) \in C_\pi \cap A$. Для простоти доведення теореми існування і єдиності гладкого розв'язку задачі (1) – (3) будемо розглядати лише залежність його від функції u і її похідної u_t, хоча аналогічний результат можна одержати і у випадку $F = F[u, u_t, u_x]$.

Відомо [1, с. 60–62], що для лінійного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x, t), \quad 0 < x < \pi, \; t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

в конкретно визначеному вище просторі функцій $A = \{u : u(x, t) = u(\pi - x, t + \pi) = u(x, t + 2\pi)\}$ справедливе твердження.

Теорема 1 [1, с. 62]. *Якщо* $g \in G_t \cap A$, *то функція вигляду*

$$u(x, t) = (Rg)(x, t) \equiv (Sg)(x, t) + $$

$$+ \frac{\pi - x}{4\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau + \frac{x}{\pi} \int_0^\pi d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{5}$$

$$(Sg)(x, t) = \frac{1}{4} \int_0^\pi Q(\xi)\, d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} g(\xi, \tau)\, d\tau, \tag{6}$$

$$Q(\xi) = \begin{cases} 1, & 0 \le \xi \le x; \\ -1, & x \le \xi \le \pi, \end{cases} \tag{7}$$

є єдиною функцією з простору $C_\pi^2 \cap A$, *яка задовольняє умови* (2) – (4), *причому* $u_t = (Sg)_t$.

По аналогії з лінійною задачею (2) – (4) і записом її розв'язку (5) – (7) розглянемо таку систему інтегральних рівнянь:

$$u(x,t) = (RF[u,u_t])(x,t),$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} Q(\xi)\{F[u,u_t](\xi, t-x+\xi) - F[u,u_t](\xi, t+x-\xi)\}\,d\xi, \qquad (8)$$

$$u_x(x,t) = (RF[u,u_t])_x(x,t).$$

Означення. *Неперервний розв'язок* $(u, u_t, u_x) \in C_\pi \cap A$ *системи інтегральних рівнянь* (8) *будемо називати гладким розв'язком крайової* 2π*-періодичної задачі* (1) – (3).

Якщо ввести таке позначення норми функції $g(x,t)$:

$$\|g(x,t)\|_{C_\pi} = \sup\{|g(x,t)|;\ 0 \le x \le \pi,\ t \in \mathbb{R}\},$$

то, використовуючи інтегральне зображення (5) – (7) розв'язку $u = Rg$ лінійної задачі (2) – (4), на основі теореми 1 переконуємося в справедливості наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай* $g \in C_\pi \cap A$. *Тоді лінійна задача* (2) – (4) *має єдиний гладкий розв'язок* $u = Rg \in A$, *для якого справедливі оцінки*

$$\|u\|_{C_\pi} \le \frac{3}{4}\pi^2 \|g(x,t)\|_{C_\pi}, \qquad (9)$$

$$\|u_t\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2} \|g(x,t)\|_{C_\pi}, \qquad (10)$$

$$\|u_x\|_{C_\pi} \le \pi \|g(x,t)\|_{C_\pi}. \qquad (11)$$

Сформулюємо і доведемо тепер аналогічне твердження для нелінійної задачі (1) – (3).

Теорема 3. *Нехай скалярна функція* $F[u,u_t](x,t)$ *задовольняє такі умови:* 1) $F[u,u_t](x,t) \in C\big([0,\pi]\times\mathbb{R}\times\|u_t\|_{C_\pi}<\infty\times\|u_t\|_{C_\pi}<\infty\times\|u_t\|_{C_\pi}<\infty\big)$; 2) $|F[0,0](x,t)| \le \Gamma < \infty$; 3) $|F[u'', u_t''](x,t) - F[u', u_t'](x,t)| \le N_1|u''-u'| + N_2|u_t''-u_t'|$; 4) $F[0,0](x,t) \in A$; 5) *для всіх* $u \in A \cap C_\pi^1$ *функція* $F[u,u_t](x,t) \in A \cap C_\pi$.

Тоді при виконанні умови

$$\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2} < 1 \qquad (12)$$

задача (1) – (3) *має єдиний гладкий розв'язок* $u(x,t) \in A \cap C_\pi^1$.

Зауваження. Замість вимоги, щоб скалярна функція $F[u,u_t](x,t)$ була визначена для значень $0 \le x \le \pi$ і всіх (t, u, u_t), достатньо припустити, щоб F була визначена для $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbb{R}$, $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le 2L/(3\pi)$, де L задовольняє нерівність

$$\frac{3\pi^2\Gamma}{4} < L\left(1 - \left(\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2}\right)\right), \qquad (13)$$

або

$$\frac{3\pi^2 M}{4} \le L, \qquad (14)$$

якщо $M = \|F[u, u_t]\|_{C_\pi}$ для всіх $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le 2L/(3\pi)$.

Доведення теореми **3.** Нехай D — банаховий простір функцій $g(x,t) \in A \cap G_t$, $0 \le x \le \pi$, $t \in \mathbb{R}$, з нормою

$$\|g\|_{C_\pi^1} = \max\left\{\|g\|_{C_\pi}, \frac{3\pi}{2}\|g_t\|_{C_\pi}\right\}. \tag{15}$$

Візьмемо в кулі $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$ довільну функцію $g \in A \cap G_t$. Нехай $u(x,t)$ є єдиним гладким розв'язком рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = F[g, g_t](x,t), \tag{16}$$

який задовольняє умови (2), (3). В силу умов 1 і 5 теореми 3 такий розв'язок $u(x,t)$ згідно з теоремою 2 існує. Визначимо тепер в кулі $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$ простору D оператор T_0, поклавши $(T_0[g])(x,t) = u(x,t)$.

Якщо $u^0(x,t) = (T_0[0])(x,t)$, то, враховуючи умову 2 теореми 3, із оцінок (9), (10) при $g(x,t) = F[0,0](x,t)$ одержуємо

$$\|u^0\|_{C_\pi} \le \frac{3}{4}\pi^2\Gamma, \quad \frac{3\pi}{2}\|u_t^0\|_{C_\pi} \le \frac{3}{4}\pi^2\Gamma. \tag{17}$$

Значить, норма функції $u^0(x,t) = (T_0[0])(x,t) \in D$ задовольняє нерівність

$$\|(T_0[0])(x,t)\|_{C_\pi^1} \le \frac{3}{4}\pi^2\Gamma. \tag{18}$$

Тепер, якщо $u_1 = T_0[g_1]$, $u_2 = T_0[g_2]$, то згідно з (9), (10) і умовою 3 теореми 3 маємо

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \frac{3}{4}\pi^2\left(N_1\|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}\right),$$

$$|u_{1t}(x,t) - u_{2t}(x,t)| \le \frac{\pi}{2}\left(N_1\|g_1 - g_2\|_{C_\pi} + N_2\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}\right).$$

Якщо останню нерівність помножити на $3\pi/2$, а $N_2(3\pi^2/4)\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}$ записати у вигляді $\left(N_2\frac{\pi}{2}\right)\left((3\pi/2)\|g_{1t} - g_{2t}\|_{C_\pi}\right)$, то ми одержуємо нерівність

$$\|T_0[g_1] - T_0[g_2]\|_{C_\pi^1} \le \left(\frac{3N_1\pi^2}{4} + \frac{N_2\pi}{2}\right)\|g_1 - g_2\|_{C_\pi^1}. \tag{19}$$

Тепер з нерівностей (12), (13), (18) і (19) бачимо, що виконуються всі умови теореми функціонального аналізу про нерухому точку (див., наприклад, [2, с. 43–46]), а це означає, що теорема 3 доведена.

Аналогічно, якщо $\|F[u, u_t](x,t)\|_{C_\pi} \le M$ для $\|u\|_{C_\pi} \le L$, $\|u_t\|_{C_\pi} \le 2L/(3\pi)$, то частина співвідношень (17), які відносяться до $u_t(x,t)$, показує, що якщо $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$, то $u = T_0[g]$ задовольняє нерівність $\|u\|_{C_\pi^1} \le 3\pi^2 M/4$. Отже, якщо справедлива нерівність (14), то T_0 відображає кулю $\|g\|_{C_\pi^1} \le L$ саму в себе, а це означає в силу (12), що виконуються всі умови згаданої вище теореми про нерухому точку.

Таким чином, теорема 3 і зауваження до неї повністю доведені.

1. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

Одержано 28.03.95