УДК 517. 956. 223

А. А. Мурач, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПОЛНЫХ ШКАЛАХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО

We consider an elliptic boundary value problem on an infinitely smooth manifold with a boundary which, generally speaking, is not connected. It is established that the operator of this problem is a Fredholm operator when considered in complete scales of functional spaces which depend on parameters $s \in \mathbb{R}$, $p \in]1, \infty[$ and coincide with a classical Nikol'skii space on a manifold for sufficiently large $s \geq 0$.

Розглядається еліптична крайова задача на нескінченно гладкому многовиді з, взагалі кажучи, незв'язним краєм. Встановлено, що оператор такої задачі є нетеровим в повних шкалах функціональних просторів, які залежать від параметрів $s \in \mathbb{R}$, $p \in]1, \infty[$ та співпадають для достатньо великих $s \geq 0$ з класичними просторами Нікольського на многовиді.

Теоремы о полном наборе изоморфизмов для эллиптических задач такого типа с нормальными граничными условиями были установлены в работах Ж.-Л. Лионса, Э. Мадженеса [1], Ю. М. Березанского, С. Г. Крейна, Я. А. Ройтберга [2 – 5]. Без предположения о нормальности граничных условий эти утверждения доказаны Я. А. Ройтбергом [6 – 8]. В указанных работах оператор задачи изучался в пространствах дифференцируемых функций W_p^s, H_p^s, $B_{p,p}^s$ и их модификациях. В данной статье оператор эллиптической краевой задачи исследуется в модифицированных пространствах Никольского на многообразии.

1. Эллиптическая краевая задача. Пусть $\overline{G}$ — компактное ориентированное бесконечно гладкое (C^∞)-многообразие размерности $n \geq 2$ с краем Γ, состоящим из конечного числа непустых связных компонент $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. Положим $G = \overline{G} \setminus \Gamma$. Зафиксируем произвольный конечный атлас B многообразия $\overline{G}$, принадлежащий заданным на $\overline{G}$ бесконечно гладкой структуре и классу ориентации атласов. B состоит из локальных карт $\beta_{j,k} : U_{j,k} \to V_{j,k}$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \lambda_j$. Здесь $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — целые положительные числа, $U_{0,k} (k = 1, \ldots, \lambda_0)$ — открытые шары в $\mathbb{R}^n$ конечного радиуса, $U_{j,k}$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \lambda_j$ — пересечения $\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \geq 0\}$ и открытых шаров в $\mathbb{R}^n$ конечных радиусов с центрами на $\mathbb{R}_0^n = \{(x', 0) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$. $V_{0,k} \subset G$, $k = 1, \ldots, \lambda_0$, $V_{j,k} \cap \Gamma_j \neq \varnothing$ и $V_{j,k} \cap (\Gamma \setminus \Gamma_j) = \varnothing$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \lambda_j$.

Обозначим через $C^\infty(\overline{G})$ и $C^\infty(\Gamma_j)$ пространства всех комплекснозначных C^∞-функций, заданных соответственно на $\overline{G}$ и Γ_j; $C_0^\infty(V_{j,k})$ — пространство всех C^∞-функций $v : \overline{G} \to \mathbb{C}$, носитель которых лежит в $V_{j,k}$. Не ограничивая общности, будем считать, что существует разложение единицы $\{\chi_{j,k} \in C_0^\infty(V_{j,k}) : j = 0, \ldots, m, k = 1, \ldots, \lambda_j\}$, подчиненное покрытию $V = \{V_{j,k} : j = 0, \ldots, m, k = 1, \ldots, \lambda_j\}$ компакта $\overline{G}$.

На $\overline{G}$ задан линейный дифференциальный оператор L четного порядка $2l$ с C^∞-коэффициентами: $L_{j,k} = L_{j,k}(x, D)$ — локальное представление L в координатах $\beta_{j,k}^{-1}$. Все коэффициенты $L_{j,k}$ принадлежат $C^\infty(U_{j,k})$. На Γ_j, $j = 1, \ldots, m$, заданы граничные линейные дифференциальные операторы $M_j^{(r)}$, $r = 1, \ldots, l$, порядков $m_j^{(r)}$ с C^∞-коэффициентами: $M_{j,k}^{(r)} = M_{j,k}^{(r)}(x, D)$ —

локальное представление $M_j^{(r)}$ в координатах $\beta_{j,k}^{-1}$. Все коэффициенты $M_{j,k}^{(r)}$ принадлежат $C^\infty(U_{j,k} \cap \mathbb{R}_0^n)$. Положим $M_j = (M_j^{(1)}, \dots, M_j^{(l)})$, $j = 1, \dots, m$, $M = (M_1^\bullet, \dots, M_m)$, $\Lambda = (L, M)$. Для $x_0 \in U_{j,k}$ через $L_{j,k}(x_0, D)$ обозначим дифференциальный оператор, полученный из $L_{j,k}$ фиксированием всех его коэффициентов в x_0. Аналогично определим $M_{j,k}^{(r)}(x_0, D)$ для $x_0 \in U_{j,k} \cap \mathbb{R}_0^n$.

Определение. Λ *называется эллиптической граничной задачей на* $\overline{G}$, *если:*

1) *для любых* $j = 0, 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, \lambda_j$, $x_0 \in U_{j,k}$ *оператор* $L_{j,k}(x_0, D)$ *является эллиптическим* [1, с. 133];

2) *для любых* $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, \lambda_j$, $x_0 \in U_{j,k} \cap \mathbb{R}_0^n$ *оператор* $L_{j,k}(x_0, D)$ — *собственно эллиптический* [1, с. 134], *а система* $(M_{j,k}^{(1)}(x_0, D), \dots, M_{j,k}^{(l)}(x_0, D))$ *накрывает* $L_{j,k}(x_0, D)$ *в* x_0 [1, с. 137].

2. Функциональные пространства. Норму в банаховом пространстве B обозначим через $\| \cdot, B \|$; B' — пространство, сопряженное к B.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p, p' \in \,]1, \infty[$, $1/p + 1/p' = 1$, $q \in [1, \infty]$. Через $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространства бесселевых потенциалов и О. В. Бесова (см. [9, с. 200]). Пространство $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ введено С. М. Никольским [10] (см. также [11]). $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ состоят из обобщенных функций медленного роста (распределений) на $\mathbb{R}^n$. Отождествляя $\mathbb{R}_0^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$, получаем банахово пространство $B_{p,q}^s(\mathbb{R}_0^n)$.

Положим $\mathbb{R}_+^n = \{(x', x_n) : x' \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n > 0\}$. Пусть $s \geq 0$. Через $H_p^s(\mathbb{R}_+^n)$ и $B_{p,q}^s(\mathbb{R}_+^n)$ обозначим пространства ограничений на $\mathbb{R}_+^n$ всех распределений из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ соответственно. $B_{p,q}^s(\mathbb{R}_+^n)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\| g, B_{p,q}^s(\mathbb{R}_+^n) \| = \inf \| f, B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) \|,$$

где нижняя грань берется по всем $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$, совпадающим с g на $\mathbb{R}_+^n$. Аналогично вводится норма в банаховом пространстве $H_p^s(\mathbb{R}_+^n)$. Для $s < 0$ положим

$$H_p^s(\mathbb{R}_+^n) = (H_{p'}^{-s}(\mathbb{R}_+^n))', \quad B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) = (B_{p',1}^{-s}(\mathbb{R}_+^n))'.$$

Имеем шкалы банаховых пространств $\{H_p^s(\mathbb{R}_+^n) : s \in \mathbb{R}\}$ и $\{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) : s \in \mathbb{R}\}$, которые совпадают при $s > -1/p'$ со шкалами ограничений на $\mathbb{R}_+^n$ всех распределений из $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ и $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$ соответственно [9, с. 414]. Неравенство $s_1 < s < s_2$ влечет в силу теоремы из [9, с. 205] непрерывные вложения

$$H_p^{s_2}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow H_p^{s_1}(\mathbb{R}_+^n). \tag{1}$$

Через $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ обозначим пространство ограничений на $\overline{\mathbb{R}}_+^n$ всех $\mathbb{C}$-значных бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^n$ функций с компактными носителями. Пространства $H_p^s(\mathbb{R}_+^n)$, $s \in \mathbb{R}$, рефлексивны и $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ всюду плотно в них. Шкала $\{B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) : s \in \mathbb{R}\}$ таких свойств не имеет.

Пусть $s \in \mathbb{R}$, $p \in \,]1, \infty[$, $r = 1, 2, \ldots$. Предположим, что $s \notin \{1/p, \ldots, r-1+1/p\}$. Следуя [3], через $\tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ обозначим пополнение $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ по норме

$$\| u, H_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)\| = \| u, H_p^s(\mathbb{R}_+^n)\| + \sum_{j=1}^r \| \gamma_{j-1} u, B_{p,p}^{s-j+1-1/p}(\mathbb{R}_0^n)\|. \quad (2)$$

Здесь и далее $\gamma_{j-1} u$ — след $\partial^{j-1} u / \partial x_n^{j-1}$ на $\mathbb{R}_0^n$. Пространство $\tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) = \tilde{H}^{s,p,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ введено Я. А. Ройтбергом и изучено в [4] (гл. III, §6), [5], [8] (гл. II), [12]. В силу теоремы о следах [9, с. 267] с точностью до эквивалентности норм

$$H_p^s(\mathbb{R}_+^n) = \tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \quad s > r - 1 + 1/p, \quad (3)$$

а отображение $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n) \ni u \mapsto (u, \gamma_0 u, \ldots, \gamma_{r-1} u)$ продолжается по непрерывности до изометрического оператора

$$\mathcal{J}_{s,r}: \tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to H_p^s(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r B_{p,p}^{s-j+1-1/p}(\mathbb{R}_0^n).$$

Для $s < 1/p$ оператор $\mathcal{J}_{s,r}$ является унитарным. Множество $\mathcal{J}_{s,r}(\tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n))$ подробно описано в [8] (§ 2.2), [12].

Пусть снова $s \in \mathbb{R}$, $p \in \,]1, \infty[$, $r = 1, 2, \ldots$, $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ не плотно в $B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n)$. Поэтому нельзя определить $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ как пополнение $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+^n)$ по норме вида (2), поскольку не будет выполняться соответствующий аналог равенства (3). Положим $\tau_0 = -\infty$, $\tau_1 = 1/p, \ldots, \tau_r = r - 1 + 1/p$, $\tau_{r+1} = \infty$, $B_{p,\infty}^{s,(r)} = B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{j=1}^r B_{p,\infty}^{s-j+1-1/p}(\mathbb{R}_0^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Пусть $s \in \,]\tau_j, \tau_{j+1}[$ для некоторого $j = 0, 1, \ldots, r$. Выберем произвольно $t \in \,]\tau_j, \tau_{j+1}[$, $t < s$, и положим

$$\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) = \{ f \in \tilde{H}_p^{t,(r)}(\mathbb{R}_+^n) : \mathcal{J}_{t,r} f \in B_{p,\infty}^{s,(r)} \}.$$

$\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ — банахово пространство относительно нормы $\| f, \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)\| = \| \mathcal{J}_{t,r} f, B_{p,\infty}^{s,(r)}\|$. Нетрудно убедиться, что $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ и его норма не зависят от указанного выбора t. С точностью до эквивалентности норм

$$B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n) = \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \quad s > r - 1 + 1/p. \quad (4)$$

Для $s \in \{1/p, \ldots, r - 1 + 1/p\}$ с помощью соответственно комплексного и вещественного методов интерполяции [9, с. 63 – 64, 23] определим банаховы пространства

$$\tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) = [\tilde{H}_p^{s-1/2,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \tilde{H}_p^{s+1/2,(r)}(\mathbb{R}_+^n)]_{1/2}, \quad (5)$$

$$\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) = (\tilde{H}_p^{s-1/2,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \tilde{H}_p^{s+1/2,(r)}(\mathbb{R}_+^n))_{1/2,\infty}. \quad (6)$$

Положим также

$$\tilde{H}_p^{s,(0)}(\mathbb{R}_+^n) = H_p^s(\mathbb{R}_+^n), \quad \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(0)}(\mathbb{R}_+^n) = B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}_+^n), \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Если $s_1 < s < s_2$, $p \in \,]1, \infty[$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, то (1) влечет непрерывные вложения $\tilde{H}_p^{s_2,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \hookrightarrow \tilde{H}_p^{s_1,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$.

Лемма 1. *Пусть* $p \in \,]1, \infty[$, $r = 0, 1, 2, \ldots$, $\theta \in [0, 1[$. *Пусть также* $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$, *причем либо* $s_1, s_2 \in \,]-\infty, r + 1/p[$, *либо* $s_1, s_2 \in \,]r - 1/p', \infty[$. *Положим* $s = (1-\theta)s_1 + \theta s_2$. *Тогда*

$$(\tilde{H}_p^{s_1,(r)}(\mathbb{R}_+^n),\ \tilde{H}_p^{s_2,(r)}(\mathbb{R}_+^n))_{\theta,\infty} = \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \tag{8}$$

$$(\tilde{B}_{p,\infty}^{s_1,(r)}(\mathbb{R}_+^n),\ \tilde{B}_{p,\infty}^{s_2,(r)}(\mathbb{R}_+^n))_{\theta,\infty} = \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n). \tag{9}$$

Докажем сначала (8). Если $s_1, s_2 > r - 1/p' = r - 1 + 1/p$, то (8) сразу следует из (3), (4) и интерполяционной теоремы [9, с. 276]. Предположим, что $s_1, s_2 < r + 1/p$. Тогда для $r = 0$ формулу (8) получим из (7), теорем [9, с. 77, 276] и равенств

$$H_p^{s_j}(\mathbb{R}_+^n) = (H_{p'}^{-s_j}(\mathbb{R}_+^n))', \quad B_{p,\infty}^{s}(\mathbb{R}_+^n) = (B_{p',1}^{-s}(\mathbb{R}_+^n))',$$

которые следуют из определений и теоремы 2 [9, с. 280]. Здесь $B_{p',1}^{-s}(\mathbb{R}_+^n)$ — пространство ограничений на $\mathbb{R}_+^n$ всех распределений из $B_{p',1}^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Пусть теперь $r = 1, 2, \ldots$, $s_1, s_2 \in \,]\tau_{\lambda-1}, \tau_\lambda[$ для некоторого $\lambda = 1, \ldots, r$. Из леммы 2.2.1 [8] (см. также [5, 12]) следует, что замыкание отображения $C_0^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \ni$ $\ni u \mapsto (u, \gamma_{\lambda-1}u, \ldots, \gamma_{r-1}u)$ осуществляет изоморфизмы

$$\overset{0}{\mathcal{J}}_j : \tilde{H}_p^{s_j,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to H_p^{s_j}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{k=\lambda}^{r} B_{p,p}^{s_j - k + 1 - 1/p}(\mathbb{R}_0^n), \quad j = 1, 2.$$

Используя определение $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$, проверяем, что ограничение $\overset{0}{\mathcal{J}}_1$ (для определенности $s_1 \leq s_2$) является изоморфизмом

$$\overset{0}{\mathcal{J}} : \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to B_{p,\infty}^{s}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{k=\lambda}^{r} B_{p,\infty}^{s-k+1-1/p}(\mathbb{R}_0^n).$$

Теперь (8) следует из интерполяционной теоремы [9, с. 217] и уже доказанного для $r = 0$. Как и прежде, $r = 1, 2, \ldots$. Формула (8) доказана для s, s_1, s_2, принадлежащих одному из множеств $]-\infty, 1/p[$, $]1/p, 1 + 1/p[$, $\ldots$, $]r - 1 + 1/p, \infty[$. Пусть теперь $s \notin \{1/p, \ldots, r - 1 + 1/p\}$ и для определенности $s_1 < s < s_2$. Тогда найдутся такие $\lambda = 0, \ldots, r$, $s_3, s_4 \in \mathbb{R}$, что $\tau_\lambda < s_3 <$ $< s < s_4 < \tau_{\lambda+1}$. Предположим сначала, что r — четное. В силу теоремы 4.2.1 из [8] (см. также [7, с. 547]) и (5) построим такие операторы A_j (см., например, [8], § 4.7), что

$$A_j : \tilde{H}_p^{s_j,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to H_p^{s_j - r}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{k=1}^{r/2} B_{p,p}^{s_j - k + 1 - 1/p}(\mathbb{R}_0^n), \quad j = 1, \ldots, 4,$$

— изоморфизмы. При этом из $j < j'$ следует, что A_j — продолжение по непрерывности $A_{j'}$. Согласно доказанному сужение оператора A_3 осуществляет изоморфизм

$$A : \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to B_{p,\infty}^{s-r}(\mathbb{R}_+^n) \times \prod_{k=1}^{r/2} B_{p,\infty}^{s-k+1-1/p}(\mathbb{R}_0^n),$$

откуда изоморфизмы A_1 и A_2 влекут (8). В силу леммы 2.2.1 из [8], формулы

(5) для нечетного $r = 2d-1$ и неравенства $s_1 < s_3 < s < s_4 < s_2 < r + 1/p$ отображение $C_0^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right) \ni u \mapsto (u, \gamma_r u)$ продолжается по непрерывности до изоморфизмов

$$\tilde{\mathcal{I}}_j : \tilde{H}_p^{s_j,(2d)}(\mathbb{R}_+^n) \to \tilde{H}_p^{s_j,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \times B_{p,p}^{s_j - r + 1/p}(\mathbb{R}_0^n), \quad j = 1, \ldots, 4.$$

Согласно доказанному сужение оператора $\tilde{\mathcal{I}}_3$ является изоморфизмом

$$\tilde{\mathcal{I}} : \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(2d)}(\mathbb{R}_+^n) \to \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \times B_{p,\infty}^{s-r-1/p}(\mathbb{R}_0^n).$$

Остается применить к $\tilde{\mathcal{I}}_1$ и $\tilde{\mathcal{I}}_2$ формулу (8) для четного индекса в скобках. Итак, (8) доказано для $r = 0$, а также для $r = 1, 2, \ldots$ и $s \notin \{1/p, \ldots, r-1+1/p\}$. Рассуждая аналогично, можно показать, что в этом случае также

$$\tilde{H}_p^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) = [\tilde{H}_p^{s_1,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \tilde{H}_p^{s_2,(r)}(\mathbb{R}_+^n)]_\theta. \tag{10}$$

Пусть теперь $s \in \{1/p, \ldots, r-1+1/p\}$, $\varepsilon \in\ ]0, 1/2[$, $s_1 < s-\varepsilon < s < s+\varepsilon < s_2$. В силу (6), (10) и реитерационной теоремы [9, с. 72]

$$(\tilde{H}_p^{s-\varepsilon,(r)}(\mathbb{R}_+^n), \tilde{H}_p^{s+\varepsilon,(r)}(\mathbb{R}_+^n))_{1/2,\infty} = \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n),$$

откуда следует (8). Равенство (9) сразу следует из (8) и теоремы [9, с. 68]. Лемма 1доказана.

Лемма 2. *Пусть $t, s \in \mathbb{R}$, $t < s$, $p \in\ ]1, \infty[$, $r = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть заданы линейное дифференциальное выражение $A(x, D)$ порядка $a \le r$ с коэффициентами класса $C_0^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right)$ и граничное линейное дифференциальное выражение $B(x, D)$ порядка $b \le r-1$ с коэффициентами класса $C_0^\infty\left(\mathbb{R}_0^n\right)$. Тогда отображения*

$$C_0^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right) \ni u(x) \mapsto A(x, D)\,u(x), \quad C_0^\infty\left(\overline{\mathbb{R}}_+^n\right) \ni u(x) \mapsto B(x, D)\,u(x)$$

продолжаются по непрерывности до ограниченных операторов

$$A : \tilde{H}_p^{t,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to \tilde{H}_p^{t-a,(r-a)}(\mathbb{R}_+^n), \tag{11}$$

$$B : \tilde{H}_p^{t,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to B_{p,p}^{t-a-1/p}(\mathbb{R}_0^n) \tag{12}$$

соответственно. Сужения операторов (11), (12) на $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ действуют непрерывно

$$A : \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to \tilde{B}_{p,\infty}^{s-a,(r-a)}(\mathbb{R}_+^n),$$

$$B : \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n) \to B_{p,\infty}^{s-a-1/p}(\mathbb{R}_0^n)$$

и не зависят от выбора $t < s$.

Лемма 2 для $\tilde{H}_p^{t,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ доказана в [8] (§ 2.3) (см. также [3, 5, 12]). Для $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r)}(\mathbb{R}_+^n)$ она следует теперь из (8) и теоремы [9, с. 217].

Введем теперь функциональные пространства на многообразиях G и Γ_j. Пусть $t, s \in \mathbb{R}$, $t < s$, $p \in\ ]1, \infty[$, $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_m)$, где $r_1, \ldots, r_m = 0, 1, 2, \ldots$. Положим $r^0 := \max\{r_1, \ldots, r_m\}$. Через $\tilde{H}_p^{t,\boldsymbol{r}}(G)$ обозначим пополнение $C^\infty(\overline{G})$ по норме

$$\| v, \tilde{H}_p^{t,\boldsymbol{r}}(G) \| = \sum_{k=1}^{\lambda_0} \| O((\chi_{0,k} v) \circ \beta_{0,k}), H_p^t(\mathbb{R}^n) \| +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lambda_j}\|O((\chi_{j,k}v)\circ\beta_{j,k}),\ \tilde{H}_p^{t,(r_j)}(\mathbb{R}_+^n)\|. \tag{13}$$

Здесь O и O_+ — операторы продолжения нулем на $\mathbb{R}^n$ и $\overline{\mathbb{R}_+^n}$ соответственно. Непосредственно проверяется, что $\tilde{H}_p^{t,\boldsymbol{r}}(G)$ с точностью до эквивалентности норм не зависит от выбора конечного атласа B из C^∞-структуры на $\overline{G}$ и соответствующего разбиения единицы на $\overline{G}$. В силу (13) для любого $g\in\in\tilde{H}_p^{t,\boldsymbol{r}}(G)$ определим по замыканию $O((\chi_{0,k}g)\circ\beta_{0,k})\in H_p^t(\mathbb{R}^n)$, $k=1,\dots,\lambda_0$, $O_+((\chi_{j,k}g)\circ\beta_{j,k})\in\tilde{H}_p^{t,(r_j)}(\mathbb{R}_+^n)$, $j=1,\dots,m$, $k=1,\dots,\lambda_j$. Тогда через $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)$ обозначим совокупность всех таких $g\in\tilde{H}_p^{t,\boldsymbol{r}}(G)$, что $O((\chi_{0,k}g)\circ\beta_{0,k})\in B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)$, $k=1,\dots,\lambda_0$, $O_+((\chi_{j,k}g)\circ\beta_{j,k})\in\tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r_j)}(\mathbb{R}_+^n)$, $j=1,\dots,m$, $k=1,\dots,\lambda_j$. $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)$ — банахово пространство относительно нормы

$$\|g,\ \tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)\|=\sum_{k=1}^{\lambda_0}\|O((\chi_{0,k}g)\circ\beta_{0,k}),\ B_{p,\infty}^s(\mathbb{R}^n)\|+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{\lambda_j}\|O_+((\chi_{j,k}g)\circ\beta_{j,k}),\ \tilde{B}_{p,\infty}^{s,(r_j)}(\mathbb{R}_+^n)\|.$$

Непосредственно проверяется, что $\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)$ и его норма не зависят от выбора $t<s$. Неравенство $s_1<s<s_2$ влечет непрерывные вложения

$$\tilde{H}_p^{s_2,\boldsymbol{r}}(G)\hookrightarrow\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)\hookrightarrow\tilde{H}_p^{s_1,\boldsymbol{r}}(G).$$

Для $s>-1+1/p$ с помощью локальных распрямлений многообразия введем пространство Никольского $B_{p,\infty}^s(G)$, состоящее из распределений на G (ср., например, определение 2 из [13, с. 272]). Тогда в силу (4) с точностью до эквивалентности норм

$$\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G)=B_{p,\infty}^s(G),\quad s>r^0-1+1/p.$$

Через $B_{p,q}^s(\Gamma_j)$, $s\in\mathbb{R}$, $q\in[1,\infty]$, $j=1,\dots,m$, обозначим пространства Бесова распределений на Γ_j [13, с. 272]. Для $B_{p,q}^s(\Gamma_j)$ выполняется интерполяционное предложение [13, с. 290].

Лемма 3. *Пусть* $p\in]1,\infty[$, $\boldsymbol{r}=(r_1,\dots,r_m)$ — *вектор с неотрицательными целыми компонентами*, $r_1\le r_2\le\dots\le r_m$, $\theta\in]0,1[$. *Пусть также* s_1,s_2, $s_1\ne s_2$, *принадлежат одному из множеств* $]-\infty,r_1+1/p[$, $]r_1-1/p',r_2+1/p[,\dots,]r_m-1/p',\infty[$. *Положим* $s=(1-\theta)s_1+\theta s_2$. *Тогда*

$$(\tilde{H}_p^{s_1,\boldsymbol{r}}(G),\ \tilde{H}_p^{s_2,\boldsymbol{r}}(G))_{\theta,\infty}=\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G),$$

$$(\tilde{B}_{p,\infty}^{s_1,\boldsymbol{r}}(G),\ \tilde{B}_{p,\infty}^{s_2,\boldsymbol{r}}(G))_{\theta,\infty}=\tilde{B}_{p,\infty}^{s,\boldsymbol{r}}(G).$$

Непосредственно проверяется, что непрерывные операторы

$$S_\nu:\tilde{H}_p^{s_\nu,\boldsymbol{r}}(G)\to(H_p^{s_\nu}(\mathbb{R}^n))^{\lambda_0}\times\prod_{j=1}^{m}(\tilde{H}_p^{s_\nu,(r_j)}(\mathbb{R}_+^n))^{\lambda_j},\quad\nu=1,2.$$

$$S: \tilde{B}^{s,r}_{p,\infty}(G) \to (B^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^n))^{\lambda_0} \times \prod_{j=1}^{m} (\tilde{B}^{s,(r_j)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n_+))^{\lambda_j},$$

где $g \mapsto (f_{0,1}, \ldots, f_{0,\lambda_0}, \ldots, f_{m,1}, \ldots, f_{m,\lambda_m})$, $f_{0,k} = O((\chi_{0,k} g) \circ \beta_{0,k})$, $k = 1, \ldots, \lambda_0$, $f_{j,k} = O_+((\chi_{j,k} g) \circ \beta_{j,k})$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \lambda_j$, являются коретракциями (см. определение [9, с. 20]). Отсюда в силу леммы 1 и теорем [9, с. 21, 223] сразу следует лемма 3.

3. Основной результат. Обратимся к набору операторов Λ. Положим $\kappa_j = \max\{2l, m_j^{(1)} + 1, \ldots, m_j^{(l)} + 1\}$, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$, $\boldsymbol{l} = (l, \ldots, l) \in \mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\kappa_1 \le \kappa_2 \le \ldots \le \kappa_m$. Пусть $t, s \in \mathbb{R}$, $t < s$, $p \in \,]1, \infty[$. В силу леммы 2 замыкание по непрерывности отображения $C^\infty(\overline{G}) \ni v \mapsto \Lambda v$ является ограниченным оператором

$$\Lambda_{t,p}: \tilde{H}^{t,\boldsymbol{\kappa}}_p(G) \to H^{t-2l,\boldsymbol{\kappa}-2\boldsymbol{l}}_p(G) \times \prod_{j=1}^{m} \prod_{r=1}^{l} B^{t-m_j^{(r)}-1/p}_{p,p}(\Gamma_j).$$

Из леммы 3 следует, что сужение $\Lambda_{t,p}$ на $\tilde{B}^{s,\boldsymbol{\kappa}}_{p,\infty}(G)$ действует непрерывно

$$\Lambda_{s,p,\infty}: \tilde{B}^{s,\boldsymbol{\kappa}}_{p,\infty}(G) \to \tilde{B}^{s-2l,\boldsymbol{\kappa}-2\boldsymbol{l}}_{p,\infty}(G) \times \prod_{j=1}^{m} \prod_{r=1}^{l} B^{s-m_j^{(r)}-1/p}_{p,\infty}(\Gamma_j)$$

и не зависит от $t < s$.

Теорема. *Пусть Λ является эллиптической краевой задачей на $\overline{G}$. Тогда для любых $s \in \mathbb{R}$, $p \in \,]1, \infty[$ оператор $\Lambda_{s,p,\infty}$ нетеров* [14, с. 109]. *При этом его ядро $N_{s,p,\infty}$ и коядро $N^*_{s,p,\infty}$ не зависят от s, p: $N = N_{s,p,\infty}$, $N^* = N^*_{s,p,\infty}$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in \,]1, \infty[$.*

Доказательство. Нетеровость $\Lambda_{s,p,\infty}$ доказывается с помощью регуляризатора, который строится локально. Выберем произвольно $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, \lambda_j$, и $x_0 \in U_{j,k}$ (рассуждения для $x_0 \in U_{0,k}$ аналогичны и проще). $L^0_{j,k}(D)$ — главная часть дифференциального выражения $L_{j,k}(x, D)$, содержащая лишь члены порядка $2l$, коэффициенты которых фиксируем в точке $\beta^{-1}_{j,k}(x_0)$. Пусть F' — касательное преобразование Фурье по первым $n-1$ переменным. Следуя [15], заменим в $L^0_{j,k}(D)$ операторы дифференцирования $D_r := i \cdot \partial / \partial x_r$ на псевдодифференциальные операторы $(F')^{-1}[\xi_r(1 + |\xi'|) \times |\xi'|^{-1} F']$, $r = 1, \ldots, n-1$. Получим $\hat{L}_{j,k}$. Аналогично определяем $\hat{M}^{(r)}_{j,k}$, $r = 1, \ldots, l$. В силу леммы 1 и теоремы 4.2.1 из [9] (см. также [7] для систем) оператор $(\hat{L}_{j,k}, \hat{M}^{(1)}_{j,k}, \ldots, \hat{M}^{(l)}_{j,k})$ устанавливает изоморфизм между пространствами $\tilde{B}^{s,(\kappa_j)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n_+)$ и $\tilde{B}^{s-2l,(\kappa_j-2l)}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n_+) \times \prod_{r=1}^{l} B^{s-m_j^{(r)}-1/p}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n_0)$. Теперь для построения регуляризатора остается повторить рассуждения [8] (§ 4.9) с понятными отличиями. Аналогично доказывается нетеровость $\Lambda_{s,p}$. Через $N_{s,p}$ и $N^*_{s,p}$ обозначим соответственно ядро и коядро оператора $\Lambda_{s,p}$. $K_{s,p}$ и $K_{s,p,\infty}$ — произведения пространств, в которые действуют $\Lambda_{s,p}$ и $\Lambda_{s,p,\infty}$. $R(\Lambda_{s,p})$ и $R(\Lambda_{s,p,\infty})$ — области значений соответственно операторов $\Lambda_{s,p}$ и $\Lambda_{s,p,\infty}$. Из доказательства существования регуляризаторов для $\Lambda_{s,p}$ и $\Lambda_{s,p,\infty}$ следует (ср. [8],

§ 4.9), что для любых $s \in \mathbb{R}$, $p \in \,]1, \infty[$ выполняется $N = N_{s,p} = N_{s,p,\infty} \subset \subset C^\infty(\overline{G})$, $N^* = N^*_{s,p}$. Кроме того,

$$R(\Lambda_{s+\varepsilon,p}) = R(\Lambda_{s,p,\infty}) \cap K_{s+\varepsilon,p}, \quad \varepsilon > 0, \tag{14}$$

$$R(\Lambda_{s,p,\infty}) = R(\Lambda_{s-\varepsilon,p}) \cap K_{s,p,\infty}, \quad \varepsilon > 0. \tag{15}$$

Проверим, что $N^* = N^*_{s,p,\infty}$. Положим $F_{s,p} = K_{s,p}/R(\Lambda_{s,p})$, $F_{s,p,\infty} = K_{s,p,\infty}/R(\Lambda_{s,p,\infty})$. Тогда $\dim F_{s,p} = \dim N^*_{s,p} < \infty$, $\dim F_{s,p,\infty} = \dim N^*_{s,p,\infty} < \infty$. В силу (14) и (15)

$$\dim F_{s+\varepsilon,p} \le \dim F_{s,p,\infty} \le \dim F_{s-\varepsilon,p}. \tag{16}$$

Из плотных вложений $\tilde{B}^{s,\kappa}_{p,\infty}(G) \subsetneq \tilde{H}^{s-\varepsilon,\kappa}_p(G)$ и $K_{s,p,\infty} \subsetneq K_{s-\varepsilon,p}$ следует, что $\Lambda^*_{s,p,\infty}$ — продолжение для $\Lambda^*_{s-\varepsilon,p}$, откуда $N^* \subsetneq N^*_{s,p,\infty}$. В силу (16) имеем $\dim N^*_{s,p,\infty} = \dim N^* < \infty$, откуда $N^* = N^*_{s,p,\infty}$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что N и N^* состоят из C^∞-элементов: $N \subset C^\infty(\overline{G})$ и

$$N^* \subset C^\infty(\overline{G}) \times \prod_{j=1}^{m} (C^\infty(\Gamma_j))^{\kappa_j - 2l} \times \prod_{j=1}^{m} (C^\infty(\Gamma_j))^l.$$

Отметим, что полученный результат с подобным доказательством справедлив и для эллиптических по Дуглису–Ниренбергу систем (ср. [7]) в случае, когда G — область в $\mathbb{R}^n$.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность В. А. Михайлецу и Я. А. Ройтбергу за обсуждение результатов.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М. : Мир, 1971. – 372 с.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1964. – **148**, № 4. – С. 745 – 748.
3. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Там же. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798 – 801.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 800 с.
5. *Ройтберг Я. А.* Теорема о гомеоморфизмах, осуществляемых в L_p эллиптическими операторами, и локальное повышение гладкости обобщенных решений // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 122 – 129.
6. *Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах и формула Грина для общих эллиптических граничных задач с граничными условиями, не являющимися нормальными // Мат. сб. – 1970. – **83**, № 2. – С. 181 – 213.
7. *Ройтберг Я. А.* Теорема о полном наборе изоморфизмов для эллиптических по Дуглису–Ниренбергу систем // Укр. мат журн. – 1975. – **27**, № 4. – С. 544 – 548.
8. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях, I – IV. – Чернигов, 1990 – 1991. – (Препринты / Пед. ин-т).
9. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
10. *Никольский С. М.* Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1951. – **38**. – С. 244 – 278.
11. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М. : Наука, 1977. – 456 с.
12. *Ройтберг Я. А.* О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб. – 1971. – **86**, № 2. – С. 248 – 267.
13. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. – М. : Мир, 1986. – 448 с.
14. *Функциональный* анализ / Под общей ред. С. Г. Крейна. – М. : Наука, 1972. – 544 с.
15. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1973. – 232 с.

Получено 27.05.93