УДК 517.925.3

Н. А. Перестюк, д-р физ.-мат. наук,
О. С. Черникова, канд. физ.-мат. наук (Киев. ин-т сухопут. войск)

О СОХРАНЕНИИ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ РЕШЕНИЙ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Sufficient conditions of preservation of the boundedness and stability properties of solutions of a pulse differential system under perturbation are established.

Знайдені достатні умови збереження властивостей обмеженості і стійкості розв'язків при збуренні імпульсної системи диференціальних рівнянь.

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) \tag{1}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + g(t, x), \quad t \neq \tau_i, \qquad \Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) + G_i(x), \tag{2}$$

где $x \in R^n$, $t \geq 0$, $\{\tau_i\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ — последовательность моментов времени импульсного воздействия, причем $\tau_{i+1} > \tau_i$, $\tau_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Относительно последовательности $\{\tau_i\}$ предположим, что можно указать такие числа $l > 0$ и натуральное q, что любой промежуток временной оси длины l содержит не более чем q точек последовательности $\{\tau_i\}$ (см. [1]).

Покажем, что при определенных предположениях относительно правых частей систем (1) и (2) равномерная и равномерная предельная ограниченность решений, а также равномерная асимптотическая устойчивость начала координат $x = 0$ сохраняются при переходе к возмущенной системе (2), но сохраняются в так называемом эвентуальном смысле.

Приведем следующие определения (см., например, [2, 3]) применительно к импульсной системе дифференциальных уравнений вида (1).

Определение 1. *Решения системы* (1) *назовем эвентуально равномерно ограниченными, если для любого* $\alpha > 0$ *существуют* $\gamma = \gamma(\alpha) \geq 0$ *и* $\beta(\alpha)$ *такие, что* $\|x(t, t_0, x_0)\| < \beta(\alpha)$ *при* $\|x_0\| < \alpha$ *и* $t \geq t_0 \geq \gamma$.

Решения равномерно ограничены, если $\gamma(\alpha) \equiv 0$.

Определение 2. *Решения системы* (1) *назовем эвентуально равномерно предельно ограниченными, если существует* $B > 0$ *такое, что для любого* $\alpha > 0$ *можно указать* $\gamma = \gamma(\alpha) \geq 0$ *и* $T(\alpha) \geq 0$ *такие, что* $\|x(t, t_0, x_0)\| < B$ *для* $\|x_0\| < \alpha$, $t_0 \geq \gamma$ *и* $t \geq t_0 + T(\alpha)$.

Решения являются равномерно предельно ограниченными, если $\gamma(\alpha) \equiv 0$.

Определение 3. *Начало координат* $x = 0$ *назовем эвентуально равномерно устойчивым для системы* (1), *если для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют такие* $\gamma = \gamma(\varepsilon) \geq 0$ *и* $\delta = \delta(\varepsilon) \geq 0$, *что* $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ *при* $\|x_0\| < \delta$ *и* $t \geq t_0 \geq \gamma$.

Определение 4. *Начало координат $x = 0$ назовем эвентуально равномерно притягивающим, если существуют $\delta_0 > 0$ и $\gamma_0 \geq 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $T = T(\varepsilon) \geq 0$ такие, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon$ при $\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geq \gamma_0$ и $t \geq t_0 + T$.*

Определение 5. *Начало координат $x = 0$ назовем эвентуально равномерно асимптотически устойчивым, если оно является эвентуально равномерно устойчивым и эвентуально равномерно притягивающим.*

В дальнейшем нам понадобится следующий вспомогательный результат.

Лемма. *Пусть кусочно-непрерывная функция $r(t)$ удовлетворяет при $t \geq t_0$ неравенству*

$$r(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} [u(s)r(s) + p(s)]\,ds + \sum_{t_0 < \tau_i < t} \beta_i r(\tau_i),$$

где $c \geq 0$, $p(t)$ и $u(t)$ — непрерывные функции, $u(t) \geq 0$, $\beta_i \geq 0$; τ_i — точки разрыва первого рода функции $r(t)$. Тогда для функции $r(t)$ справедлива оценка

$$r(t) \leq c\, e^{\int_{t_0}^{t} u(\sigma)d\sigma} \prod_{t_0 < \tau_i < t} (1 + \beta_i) + \int_{t_0}^{t} p(s) \prod_{s < \tau_j < t} (1 + \beta_j)\, e^{\int_s^t u(\sigma)d\sigma}\, ds.$$

Доказательство этой леммы можно провести, например, аналогично доказательствам лемм 2.1, 2.3, 28.3 из [1] или доказательствам лемм из [4].

Перейдем к изложению результатов, касающихся устойчивости и эвентуальной устойчивости начала координат $x = 0$.

Предположим, что системы (1) и (2) рассматриваются в некоторой окрестности начала координат $S_h = \{x \in R^n : \|x\| \leq h\}$ и $f(t, 0) = 0$, $I_i(0) = 0$, т. е. система (1) имеет нулевое решение. (При изложении результатов, касающихся вопросов ограниченности решений, откажемся от последнего предположения.)

Теорема 1. *Пусть решение $x = 0$ системы (1) является равномерно асимптотически устойчивым. Предположим, что выполняются условия*

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| < L\|x - y\|, \tag{3}$$

$$\|I_i(x) - I_i(y)\| < L_i\|x - y\| \tag{4}$$

при всех $t \geq 0$, x, $y \in S_h$, $i \in N$; здесь $\{L_i\}$ — ограниченная последовательность. Пусть при этом функции $g(t, x)$ и $G_i(x)$ при всех $t \geq 0$, $i \in N$, удовлетворяют условиям

$$\sup_{0 \leq u \leq 1} \left\| \int_t^{t+u} g(s, x(s))\,ds \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{5}$$

для любой ограниченной кусочно-непрерывной с разрывами первого рода в точках τ_i функции $x(s)$;

$$\left\| \sum_{t \leq \tau_i \leq t+\tau} G_i(x(\tau_i)) \right\| \leq \Gamma_\alpha(t)\, i(t, t + \tau) \tag{6}$$

для любого интервала конечной длины $[t, t+\tau]$, любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $x(t)$ ($\|x(t)\| \leq \alpha$) (здесь $i(t, t + \tau)$ — число точек последовательности $\{\tau_i\}$, попавших во множество $[t, t+\tau]$), причем

$$\Gamma_\alpha(t) \to 0 \quad при \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Тогда начало координат $x = 0$ для системы (2) *является эвентуально равномерно асимптотически устойчивым. В случае, когда $g(t, 0) = 0$, $G_i(0) = 0$ $(t \ge 0,\ i \in N)$, решение системы* (2) $x = 0$ *является равномерно асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Ввиду (5) при $t \ge t_0$ для любых кусочно-непрерывных функций $x(t)$ таких, что $\|x(t)\| \le \alpha$, справедливо неравенство

$$\left\| \int_{t_0}^{t} g(s, x(s))\,ds \right\| \le \Phi_\alpha(t_0)(t - t_0 + 1), \tag{8}$$

где $\Phi_\alpha(t) = \sup\limits_{\substack{0 \le u \le 1,\\ T \ge t,\ \|x(s)\| \le \alpha}} \left\| \int_T^{T+u} g(s, x(s))\,ds \right\|$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

Пусть $x(t, t_0, x_0)$ — решение системы (1), $\|x_0\| \le h$. Через $y(t, t_0, x_0)$ обозначим решение системы (2). Оценим $\|y(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0)\|$ на том участке некоторого интервала $[t_0, t_0 + \tau]$ (τ определим ниже), где $\|y(t, t_0, x_0)\| \le h$. Ввиду свойств (3) – (8)

$$\|y(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0)\| \le$$

$$\le \left\| \int_{t_0}^{t} \left[f(s, y(s, t_0, x_0)) + g(s, y(s, t_0, x_0)) - f(s, x(s, t_0, x_0)) \right] ds \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{t_0 < \tau_i < t} \left[I_i(y(t_i, t_0, x_0)) + G_i(y(\tau_i, t_0, x_0)) - I_i(x(\tau_i, t_0, x_0)) \right] \right\| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} L \|y(s, t_0, x_0) - x(s, t_0, x_0)\|\,ds + \Phi_h(t_0)(t - t_0 + 1) +$$

$$+ \sum_{t_0 < \tau_i < t} L_i \|y(\tau_i, t_0, x_0) - x(\tau_i, t_0, x_0)\| + \Gamma_h(t_0)\, i(t_0, t).$$

Далее, с учетом предположения относительно $\{\tau_i\}$ $i(t_0, t)$ можно оценить следующим образом:

$$i(t_0, t) \le q\left(1 + \frac{t - t_0}{l}\right).$$

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $l > 1$. Из леммы с учетом того, что $t - t_0 \le \tau$, следует неравенство

$$\|y(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0)\| \le$$

$$\le \left[\Phi_h(t_0) + \Gamma_h(t_0)\, q \right] \prod_{t_0 < \tau_i \le t_0 + \tau} (1 + L_i)\, e^{L\tau} (\tau + 1). \tag{9}$$

По предположению нулевое решение системы (1) равномерно асимптотически устойчиво, т. е. для любого $\varepsilon^* > 0$ найдется $\delta^* = \delta^*(\varepsilon^*)$ такое, что $\|x(t, t_0, x_0)\| < \varepsilon^*$ для любых $t_0 \in [0, \infty)$, $\|x_0\| < \delta^*$ и $t \ge t_0$ (*равномерная устойчивость*) и для некоторого $\delta_0^* > 0$ и любого $\varepsilon^* > 0$ найдется $T^* = T^*(\varepsilon^*) > 0$

такое, что $\| x(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon^*$ для всех $\| x_0 \| < \delta_0^*$, $t_0 \in [0, \infty)$ и $t \geq t_0 + T^*$ (равномерное притягивание). Будем считать, что $h \leq \delta_0^*$. Пусть $0 < \varepsilon \leq h$. Выберем δ и τ так: $\delta = \delta(\varepsilon) = \delta^*(\varepsilon/2)$, $\tau = \tau(\varepsilon) = T^*(\delta/2)$; выберем также $T_1 = T_1(\varepsilon)$ настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\left[\Phi_h(T_1) + \Gamma_h(T_1) q \right] \prod_{T_1 < \tau_j < T_1 + \tau} (1 + L_j) e^{L\tau} (\tau + 1) < \frac{\delta}{2}. \tag{10}$$

Пусть $t_0 \geq T_1$, $\| x_0 \| < \delta$. Оценим $\| y(t, t_0, x_0) \|$ на том участке интервала $[t_0, t_0 + \tau]$, где $\| y(t, t_0, x_0) \| \leq \varepsilon$. Учитывая соотношения (9) и (10), имеем

$$\| y(t, t_0, x_0) \| \leq \| y(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0) \| + \| x(t, t_0, x_0) \| <$$
$$< \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Из этой оценки можно заключить, что на всем интервале $[t_0, t_0 + \tau]$ справедливо соотношение $\| y(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$.

Обозначим $x_1 = y(t_0 + \tau, t_0, x_0)$. При нашем выборе t_0 и τ аналогично предыдущему получаем

$$\| x_1 \| \leq \| x_1 - x(t_0 + \tau, t_0, x_0) \| + \| x(t_0 + \tau, t_0, x_0) \| <$$
$$< \frac{\delta}{2} + \left\| x\left(t_0 + T^*\left(\frac{\delta}{2}\right), t_0, x_0\right) \right\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

и $\| y(t, t_0 + \tau, x_1) \| < \varepsilon$ при $t \in [t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$.

Аналогично можно показать, что при любом целом m справедливы неравенства $\| y(t_0 + m\tau, t_0, x_0) \| < \delta$ и $\| y(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$ на любом интервале $[t_0 + m\tau, t_0 + (m + 1)\tau]$ и, таким образом, на $[t_0, \infty]$, т. е. начало координат является эвентуально равномерно устойчивым для системы (2).

Покажем теперь, что начало координат является эвентуально равномерно притягивающим. Примем $\delta_0 = \delta(h)$, $T_0 = T_1(h)$. Пусть $t_0 \geq T_0$ и $\| x_0 \| < \delta_0$. Согласно доказанному выше при таком выборе δ_0 и T_0 будет выполняться соотношение $\| y(t, t_0, x_0) \| < h$ при $[t_0, \infty)$. Положим $0 < \eta < h$. Выберем $\delta(\eta) = \delta^*(\eta/2)$, $\tau(\eta) = T^*(\delta/2)$ и $T_1(\eta)$ такое, что

$$\left[\Phi_h(T_1) + \Gamma_h(T_1) q \right] \prod_{T_1 < \tau_j < T_1 + \tau} (1 + L_j) e^{L\tau} (\tau + 1) < \frac{\delta}{2}.$$

Пусть $y_0 = y(t_0 + T_1, t_0, x_0)$. Очевидно, $\| y_0 \| < h \leq \delta_0^*$. Оценим $\| y(t_0 + \tau + T_1, t_0 + T_1, y_0) \|$:

$$\| y(t_0 + \tau + T_1, t_0 + T_1, y_0) \| \leq \| y(t_0 + \tau + T_1, t_0 + T_1, y_0) -$$
$$- x(t_0 + \tau + T_1, t_0 + T_1, y_0) \| + \| x(t_0 + \tau + T_1, t_0 + T_1, y_0) \| \leq$$
$$\leq \left(\Phi_h(t_0 + T_1) + \Gamma_h(t_0 + T_1) q \right) \prod_{\tau_0 + T_1 < \tau_j < \tau_0 + T_1 + \tau} (1 + L_j) e^{L\tau} (\tau + 1) +$$
$$+ \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Согласно первой части доказательства в таком случае

$$\| y(t, t_0, x_0) \| = \| y(t, t_0 + \tau + T_1, y(t_0 + \tau + T_1, t_0, x_0)) \| < \eta$$

при всех $t \geq t_0 + T$, где $T = T(\eta) = \tau + T_1$.

Таким образом, начало координат $x = 0$ является эвентуально равномерно асимптотически устойчивым. Если $g(t, 0) = 0$ и $G_i(0) = 0$, то согласно [2] решение $x = 0$ является равномерно асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1 можно установить достаточные условия сохранения равномерной асимптотической устойчивости в эвентуальном смысле при переходе от системы (1) к системе вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + g(t, x) + h(t), \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = I_i(x) + G_i(x) + B_i.$$

В доказанной теореме предполагалась равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения импульсной системы (1). Достаточные условия устойчивости (асимптотической, равномерной асимптотической) решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием можно найти в работах [1, 5, 6]. С учетом результатов [1] можно установить, например, следующий факт.

Следствие. *Предположим, что в системе*

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t, x), \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + G_i(x),$$

непрерывная ограниченная матрица $A(t)$ *и матрицы* B_i $\left(\| B_i \| \leq K, \inf_i |\det(E + B_i)| \geq \delta > 0 \right)$ *таковы, что*

$$\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \left[\frac{1}{2} (A(t) + A^T(t)) \right] \leq \gamma \quad \text{при} \quad t \geq 0;$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} \lambda_j \left[(E + B_i)^T (E + B_i) \right] \leq \alpha^2 \quad \text{при всех} \quad i \in N.$$

Предположим также, что равномерно относительно $t \geq 0$ *существует предел* $\lim_{T \to \infty} \dfrac{i(t, t+T)}{T} = p$.

Если $\gamma + p \ln \alpha < 0$, *а функции* $g(t, x)$ *и* $G_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (5)–(7), *то для рассматриваемой системы начало координат* $x = 0$ *является эвентуально равномерно асимптотически устойчивым.*

Пусть теперь системы (1) и (2) определены при $t \geq 0$ и $\|x\| > S > 0$. Рассмотрим вопрос о сохранении свойств ограниченности решений при переходе от системы (1) к системе (2).

Теорема 2. *Предположим, что решения системы* (1) *равномерно ограничены и равномерно предельно ограничены. Предположим также, что для любого* $\alpha > 0$ *существует такое* $L(\alpha)$, *что*

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq \lambda(t) L(\alpha) \| x - y \|, \tag{11}$$

$$\| I_i(x) - I_i(y) \| \leq \mu_i L(\alpha) \| x - y \| \tag{12}$$

при всех $\|x\| \leq \alpha$, $\|y\| \leq \alpha$, *причем* $\lambda(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \int_t^{t+1} \lambda(s)ds < \infty, \tag{13}$$

а последовательность $\{\mu_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, *ограничена.*

Пусть функции $g(t,x)$ *и* $G_i(x)$ *удовлетворяют условиям* (5) – (7) (*при* $\alpha > S > 0$).

Тогда решения системы (2) *являются эвентуально равномерно ограниченными и эвентуально равномерно предельно ограниченными.*

Доказательство. Пусть $x(t,t_0,x_0)$ — решение системы (1) и пусть $\|x_0\| < \alpha$. По предположению о равномерной ограниченности решений системы (1) существует такое $\beta(\alpha)$, что $\|x(t,t_0,x_0)\| < \beta(\alpha)$ при $t \ge t_0$, а по предположению о равномерной предельной ограниченности решений системы (1) существуют такие числа B и $T_0(\alpha)$, что $\|x(t,t_0,x_0)\| < B$ при $t \ge t_0 + T_0(\alpha)$.

Определим число $B_1 = B_1(\alpha) = \max\{1 + \beta(\alpha), 1 + \beta(B+1)\}$. Пусть $y(t,t_0,x_0)$ — решение системы (2). Примем $\tau = \tau(\alpha) = T_0(B_1(\alpha))$. Оценим $\|y(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,x_0)\|$ на том участке интервала $[t_0, t_0+\tau]$, где $\|y(t,t_0,x_0)\| \le B_1$. При этом учтем соотношения (11), (12) и свойства (5) – (8) функций $g(t,x)$ и $G_i(x)$. Справедливо неравенство

$$\|y(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,x_0)\| \le$$

$$\le \int_{t_0}^{t} \lambda(s)L(B_1)\left\|y(s,t_0,x_0) - x(s,t_0,x_0)\right\|ds + \Phi_{B_1}(t_0)(t - t_0 + 1) +$$

$$+ \sum_{t_0<\tau_i<t} \mu_i L(B_1)\left\|y(\tau_i,t_0,x_0) - x(\tau_i,t_0,x_0)\right\| + \Gamma_{B_1}(t_0)\, i(t_0,t).$$

Применяя лемму и учитывая, что $t_0 \le t \le t_0 + \tau$ и что ввиду (13) справедливо неравенство $\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds \le M(t - t_0 + 1)$, $M > 0$, получаем

$$\|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,x_0)\| \le$$

$$\le \left[\Phi_{B_1}(t_0) + \Gamma_{B_1}(t_0)q\right] \prod_{t_0<\tau_j<t_0+\tau} (1+\mu_j)\, e^{L(B_1)M(\tau+1)}(\tau+1).$$

Как отмечалось выше, $\tau = \tau(\alpha) = T_0(B_1(\alpha))$. Выберем $T_1 = T_1(\alpha)$ настолько большим, чтобы при $t \ge T_1$ выполнялось неравенство

$$\left[\Phi_{B_1}(t) + \Gamma_{B_1}(t)q\right] \prod_{t<\tau_j<t+\tau} (1+\mu_j)\, e^{L(B_1)M(\tau+1)}(\tau+1) < 1.$$

Если теперь положить $t_0 \ge T_1(\alpha)$, то для подынтервала интервала $[t_0, t_0 + \tau]$, где $\|y(t,t_0,x_0)\| \le B_1(\alpha)$, имеем неравенство

$$\|y(t,t_0,x_0)\| \le \|y(t,t_0,x_0) - x(t,t_0,x_0)\| + \|x(t,t_0,x_0)\| <$$
$$< 1 + \beta(\alpha) \le B_1(\alpha).$$

Отсюда можно заключить, что $\|y(t,t_0,x_0)\| \le B_1(\alpha)$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \tau]$.

Заметим, что $\|x(t_0+\tau, t_0, x_0)\| < B$, так как можно считать, что $T_0(B_1(\alpha)) \ge T_0(\alpha)$.

Полагая $x_1 = y(t_0+\tau, t_0, x_0)$ и учитывая, что $\|x_1\| \le 1 + B$, имеем

$$\|x(t, t_0+\tau, x_1)\| \le \beta(B+1) \le B_1(\alpha) \text{ при } t \ge t_0 + \tau.$$

Далее, повторив прием доказательства предыдущей теоремы, можем заключить, что при любом натуральном m $\|y(t, t_0+m\tau, x_m)\| < B_1(\alpha)$ при $t \in [t_0 + m\tau, t_0 + (m+1)\tau]$, где $x_m = y(t_0 + m\tau, t_0, x_0)$ и $\|x_m\| \le 1 + B$.

Таким образом, $\|y(t, t_0, x_0)\| \le B_1(\alpha)$ для $t \in [t_0, t_0 + m\tau]$ при любом натуральном m, т. е. $\|y(t, t_0, x_0)\| \le B_1(\alpha)$ при $t \ge t_0 \ge T_1(\alpha)$; заметим также, что при $t \ge t_0 + \tau$

$$\|y(t, t_0, x_0)\| = \|y(t, t_0 + m\tau, x_m)\| \le$$
$$\le 1 + \beta(B+1), \quad m \ge 1. \tag{14}$$

Таким образом, доказана эвентуальная равномерная ограниченность решений системы (2), а также эвентуальная равномерная предельная ограниченность ее решений, так как для любого α $(\alpha > S > 0)$ и $\|x_0\| < \alpha$ при $t_0 \ge T_1(\alpha)$ и $t \ge t_0 + T_0(B_1(\alpha))$ выполняется неравенство (14).

В доказанной теореме предполагалась равномерная ограниченность и равномерная предельная ограниченность решений импульсной системы вида (1). Некоторые достаточные условия таких свойств решений для системы (1) установлены, например, в [7, 8].

Теорема 2 позволяет установить достаточные условия эвентуальной равномерной ограниченности и эвентуальной равномерной предельной ограниченности для системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + g(t,x), \quad t \ne \tau_i,$$
$$\Delta x|_{t=\tau_i} = B_i x + G_i(x).$$

Результаты настоящей работы распространяют на случай импульсных систем некоторые результаты из [3, 9].

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Выща шк., 1987. – 287 с.
2. *Strauss A., Yorke G. A.* Perturbing uniform asymptotically Stable nonlinear systems // J. Different. Equat. – 1969. – **6**, № 3. – P. 452 – 483.
3. *Bernfeld R.* Perturbing uniform ultimate bounded differential systems //. SIAM J. Math. Anal. – 1972. – **3**, № 2. – P. 358 – 370.
4. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* К вопросу обоснования метода усреднения для уравнений 2-го порядка с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 750 – 762.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием // Дифференц. уравнения. – 1981. – **17**, № 11. – С. 1995 – 2002.
6. *Гургула С. И., Перестюк Н. А.* Второй метод Ляпунова в системах с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. – 1982. – № 10. – С. 11 – 14.
7. *Черникова О. С.* К вопросу об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 1. – С. 124 – 128.
8. *Митропольский Ю. А., Перестюк Н. А., Черникова О. С.* Конвергентность систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Докл. АН УССР. – 1983. – № 11. – С. 11 – 15.
9. *Strauss A., Yorke G. A.* Perturbations theorems for ordinary differential equations // J. Different. Equat. – 1967. – **3**, № 1. – P. 15 – 30.

Получено 16.02.93