УДК 517. 544: 517. 968. 23

В. Е. Круглов, канд. физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ ПОДСТАНОВОЧНОГО ТИПА

By using the theory of algebraic functions, we construct a canonical factorization of matrices of permutation type given on an open contour.

Використовуючи апарат теорії алгебраїчних функцій, конструктивно будується канонічна факторизація матриць підстановочного типу, які задані на розімкненому контурі.

1. Пусть некоторое множество подстановок

$$T = \left\{ T_j : T_j = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},\ j = \overline{1, m} \right\} \tag{1}$$

транзитивно, а $(T, 1)$ — соответствующая совокупность матриц-представлений этих подстановок, т. е. это матрицы $(T_j, 1)$, у которых в i-й строке на j_i-м месте находится единица, а все остальные элементы — нули. Если вместо единиц записать функции $G_{ij_i}(t)$, то получим функционально-подстановочную матрицу (T, G).

Пусть $L = L_1 + \ldots + L_m$ — совокупность разомкнутых непересекающихся гладких кривых, и на кривой L_j задана матрица (T_j, G_j), $j = \overline{1, m}$.

Требуется найти вектор $\varphi(z) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, аналитический на расширенной комплексной плоскости без контура L, H-продолжимый на L и ограниченный на его концах, по краевому условию на L:

$$\varphi^+(t) = (T, G)\varphi^-(t), \quad t \in L, \tag{2}$$

где $(T, G) = (T_j, G_j)$ при $t \in L_j$, $\det(T_j, G_j) \neq 0$. На бесконечности $\varphi(z)$ имеет полиномиальный рост. Ранее эта задача рассматривалась в [1], где она сводилась к решению скалярной задачи на соответствующей римановой поверхности, алгебраическое уравнение которой считалось известным.

В случае, когда совокупность матриц $(T, 1)$ образует циклическую группу, эта задача изучалась в [2], где сделана попытка не использовать аппарат теории алгебраических функций. В результате этого решение поставленной задачи свелось к решению некоторой разрешимой нелинейной системы алгебраических уравнений.

Данная работа является развитием идей, изложенных в этих двух работах, и в ней строится каноническая матрица решений задачи (2).

Проверку построений достаточно осуществить на кривой L_j, так как все проверяемые построения на каждой кривой контура L проходят одновременно и параллельно. На кривой L_j краевое условие (2) имеет следующий вид:

$$\varphi_k^+(t) = G_{jk}(t)\varphi_{j_k}^-(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad j_1 \neq \ldots \neq j_n, \quad t \in L_j. \tag{3}$$

Рассмотрим сначала задачу, аналогичную задаче (2), для вектора $\psi(z) = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ с краевым условием

$$\psi^+(t) = (T, 1)\psi^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{4}$$

где $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$, $g_k(t) = \ln G_{jk}(t)$ при $t \in L_j$, или

$$\psi_k^+(t) = \psi_{j_k}^-(t) + \ln G_{jk}(t), \quad k = \overline{1, n}, \quad t \in L_j. \tag{5}$$

Пусть

$$\Lambda(z) = \left\| \begin{matrix} \lambda_{11}(z) & \lambda_{21}(z) & \ldots & \lambda_{n1}(z) \\ \hdotsfor{4} \\ \lambda_{1n}(z) & \lambda_{2n}(z) & \ldots & \lambda_{nn}(z) \end{matrix} \right\| \tag{6}$$

— каноническая матрица решений в заданном классе однородной задачи (4), т. е. $\Lambda^+(t) = (T, 1)\Lambda^-(t)$, $t \in L$, или

$$\lambda^+_{sk}(t) = \lambda^-_{sj_k}(t), \quad t \in L_j, \quad s, k = \overline{1, n}, \tag{7}$$

при этом $\lambda_{1k}(z) \equiv 1$, $k = \overline{1, n}$.

В дальнейшем нам понадобятся разложения функций $\lambda_{jk}(z)$ при $z \to \infty$

$$\lambda_{jk}(z) \sim \beta^{(0)}_{jk} z^{r_j} + \ldots + \beta^{(r_j - 1)}_{jk} z, \quad j = \overline{2, n}, \quad k = \overline{1, n}, \tag{8}$$

где $\beta^{(m)}_{jk}$ — известные константы, при этом, не ограничивая общности рассуждений, считаем $0 < r_2 \leq \ldots \leq r_n$.

Перепишем (7) в ином виде: $\lambda^-_{sp}(t) = \lambda^+_{si_p}(t)$, $s, p = \overline{1, n}$, $i_1 \neq \ldots \neq i_n$, $t \in L_j$, или $\Lambda^-(t) = (T, 1)^{-1}\Lambda^+(t)$, $t \in L$.

Отсюда $\lambda^-_{sj_k}(t) = \lambda^+_{si_{j_k}}(t)$. Следовательно, согласно (7) $\lambda^+_{sk}(t) = \lambda^+_{si_{j_k}}(t)$. Итак,

$$i_{j_k} = k. \tag{9}$$

В дальнейшем используются те ветви элементов матрицы $\Lambda(z)$, для которых $\Lambda^+(t) = \Lambda(t)$ на контуре L.

Частное решение задачи (4), как известно [3], определяется формулой

$$\psi(z) = \frac{\Lambda(z)}{2\pi i} \int_L \frac{\Lambda^{-1}(t) g(t)}{t - z} dt. \tag{10}$$

Покажем, что вектор $\varphi(z) = \exp \psi(z)$ удовлетворяет (3). Составим

$$\Lambda(z)\Lambda^{-1}(t) = \left\| \begin{matrix} \sum \lambda_{s1}(z) a_{s1}(t) & \ldots & \sum \lambda_{s1}(z) a_{sn}(t) \\ \hdotsfor{3} \\ \sum \lambda_{sn}(z) a_{s1}(t) & \ldots & \sum \lambda_{sn}(z) a_{sn}(t) \end{matrix} \right\|,$$

где $a_{sk}(t)$ — элементы матрицы $\Lambda^{-1}(t)$. При этом $\Lambda^+(t)\Lambda^{-1}(t) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(t) = E_n$, т. е.

$$\sum \lambda_{sk}(t) a_{sq}(t) = \delta_{qk}, \tag{11}$$

а $\Lambda^-(t)\Lambda^{-1}(t) = (T, 1)^{-1}$, т. е.

$$\sum \lambda^-_{sk}(t) a_{sq}(t) = \sum \lambda_{si_k}(t) a_{sq}(t) = \delta_{qi_k}, \tag{12}$$

где δ — символ Кронекера, E_n — единичная матрица.

Тогда

$$\varphi_k(z) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_s \int_L \frac{\lambda_{sk}(z) a_{s1}(\tau) g_1(\tau) + \ldots + \lambda_{sk}(z) a_{sn}(\tau) g_n(\tau)}{\tau - z} d\tau \right\}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(t) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi i} \sum_s \int_L \frac{\lambda_{sk}(t) a_{s1}(\tau) g_1(\tau) + \ldots + \lambda_{sk}(t) a_{sn}(\tau) g_n(\tau)}{\tau - t} d\tau \right\}.$$

Учитывая (11) и (12), найдем $\varphi^{\pm}_k(t)$ при $z \to t^{\pm} \in L_j$:

$$\varphi_k^+(t) = \exp\left\{\frac{1}{2}\ln G_{jk}(t)\right\}\varphi_k(t),$$

$$\varphi_k^-(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln G_{ji_k}(t)\right\}\varphi_{i_k}(t).$$

Следовательно, с учетом (9)

$$\varphi_{j_k}^-(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln G_{ji_{j_k}}(t)\right\}\varphi_{i_{j_k}}(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln G_{jk}(t)\right\}\varphi_k(t).$$

Значит, $\varphi_k^+(t) = G_{jk}(t)\varphi_{j_k}^-(t)$, $t \in L_j$, т. е. вектор $\varphi(z) = \exp\psi(z)$ удовлетворяет условию (3). Так как вектор $\psi(z)$ в силу свойств матрицы $\Lambda(z)$ ограничен на концах контура L, то это же свойство сохраняется также для вектора $\varphi(z)$. Однако, учитывая (8), вектор $\varphi(z)$ имеет существенные особенности при $z \to \infty$. Устраним их, записав предварительно в терминах теории алгебраических функций построенный вектор $\varphi(z)$.

2. Совокупность концов контура L и множество подстановок T_j из (1) образуют так называемую группу монодромии поверхности некоторой n-значной алгебраической функции $U(z)$, n-ветвей $U^{(k)}(z)$, $k = \overline{1, n}$, с помощью которой склеиваются вдоль L_j по закону соответствующей подстановки T_j, $j = \overline{1, m}$. Функция $U(z)$, кроме того, порождает риманову поверхность $\mathfrak{R}$ (поле $k(z, U)$ алгебраических функций), род ρ и индекс разветвленности V которой вычисляются по известной формуле Римана – Гурвица [4]

$$V = \rho + n - 1 = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(\alpha_{ij} - 1), \tag{13}$$

где α_{ij} — длины циклов, на которые распадается подстановка T_j.

Введем обозначения: $\lambda_j(z, U^{(k)}) = \lambda_{jk}(z)$, $j = \overline{2, n}$, где $\lambda_{jk}(z)$ взяты из (6), т. е. функции $\lambda_j(z, U^{(k)})$ будем рассматривать как n ветвей многозначной функции $\lambda_j(z, U) \in k(z, U)$. В силу транзитивности множества T каждая пара $(z, \lambda_j(z, U))$, $j = \overline{2, n}$, образует примитивную пару [5], порождающую одно и тоже поле алгебраических функций $k(z, U)$.

Переобозначим $\lambda_2(z, U) \equiv u$, $u^{(k)}(z) = \lambda_{2k}(z)$, $k = \overline{1, n}$, и будем в дальнейшем считать, что пара (z, u) порождает поле $k(z, u) \equiv k(z, U)$, при этом алгебраическое уравнение n-листной поверхности $\mathfrak{R}$, отвечающей множеству T, определяется равенством

$$(u - u^{(1)}) \ldots (u - u^{(n)}) = u^n + a_1(z)u^{n-1} + \ldots + a_n(z) = 0, \tag{14}$$

где $a_i(z) \in \mathbb{C}[z]$ — кольцу полиномов.

Снабжая построенную поверхность естественной конформной структурой [6], получаем замкнутую ориентированную риманову поверхность $\mathfrak{R}$ рода ρ, отвечающую полю $k(z, u)$. Точки поверхности будем обозначать парой (z, u). k-й лист $\mathfrak{R}^{(k)}$ поверхности $\mathfrak{R}$ — это множество точек вида $(z, u^{(k)})$. Все бесконечно удаленные точки поверхности $\mathfrak{R}$ описываются точками вида $(\infty, \infty^{(k)})$, где $\infty^{(k)} = \lim\limits_{z\to\infty} u^{(k)}(z)$. Функции

$$\lambda_1(z, u) \equiv 1, \quad \lambda_2(z, u) \equiv u = (u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}),$$

$$\lambda_j(z, u) = (\lambda_j(z, u^{(1)}), \ldots, \lambda_j(z, u^{(n)})).$$

где $\lambda_j(z, u^{(k)}) = \lambda_{jk}(z)$ из (6), $j = \overline{3, n}$, образуют нормальный базис поля $k(z, u)$ [7], при этом $r_2 + \ldots + r_n = V$, где r_i взяты из (8).

В силу однозначной представимости произвольной функции $f(z, u) \in k(z, u)$ как линейной комбинации элементов нормального базиса с рациональными функциями от z в качестве коэффициентов корректно определение значения $f(z, u^{(k)})$ этой функции на k-м листе поверхности $\mathfrak{R}$.

Матрицы $\Lambda(z)$ и $\Lambda^{-1}(z)$ можно теперь записать в следующем виде:

$$\Lambda(z) = (1, u, \lambda_3(z, u), \ldots, \lambda_n(z, u)), \quad \Lambda^{-1}(z) = (\mu_1(z, u), \ldots, \mu_n(z, u)).$$

Тогда выражение

$$\frac{\Lambda(z)\Lambda^{-1}(t)}{t - z}\, dt = \frac{\sum \mu_j(t, v)\lambda_j(z, u)}{t - z}\, dt \equiv \Pi(z, u; t, v)\, dt,$$

взятое из (10), есть не что иное, как аналог ядра типа Коши (ядро Гензеля – Ландсберга) на поверхности $\mathfrak{R}$, заданной уравнением (14) [8]

$$(v = v(t) = \lim_{z \to t} u(z)).$$

Функцию (10) запишем в виде

$$\psi(z, u) = \frac{1}{2\pi i} \int_M \Pi(z, u; t, v) g(t, v)\, dt,$$

где $g(t, v^{(k)}) = g_k(t)$, а контур M — это составной контур на $\mathfrak{R}$, структура которого такова: если $(t, v) \in \mathfrak{R}^{(k)}$, то M совпадает с контуром L, лежащим на k-м листе поверхности $\mathfrak{R}$.

Матричное краевое условие (2) можно записать в скалярном виде [1] на поверхности $\mathfrak{R}$:

$$\varphi^+(t, v) = G(t, v)\varphi^-(t, v), \quad (t, v) \in M, \tag{15}$$

и следовательно, найденная функция

$$\varphi(z, u) = \exp \psi(z, u) \tag{16}$$

удовлетворяет условию (2), (15) и в точках $(\infty, \infty^{(k)})$ имеет существенные особенности.

Замечание. Так как $\Pi(z, u; t, v)\, dt$ — аналог ядра типа Коши на $\mathfrak{R}$, то для функции

$$\alpha(z, u) = \exp \left\{ \int_{(z_0, u_0)}^{(z_1, u_1)} \Pi(z, u; t, v)\, dt \right\} \tag{17}$$

предельные значения

$$\alpha^{\pm}(t, v) = \exp \left\{ \pm \pi i + \int_{(z_0, u_0)}^{(z_1, u_1)} \Pi(t, v; \tau, \zeta)\, d\tau \right\}$$

на берегах разреза вдоль линии интегрирования совпадают, т. е. $\alpha^+(t, v) = \alpha^-(t, v)$, она также аналитически продолжима через контур M; в точке (z_1, u_1) ((z_0, u_0)) она имеет нуль (полюс) первого порядка, а во всех остальных конечных точках поверхности $\mathfrak{R}$ непрерывна; при $(z, u) \to (\infty, \infty^{(k)})$ имеет существенные особенности.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(z,u) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_M \Pi(z,u;t,v)g(t,v)\,dt - \sum_{m=1}^{\rho}\int_{(z_0,u_0)}^{(z_m,u_m)} \Pi(z,u;t,v)\,dt\right\},$$

где точка (z_0, u_0) фиксирована, а (z_m, u_m), $m = \overline{1,\rho}$, пока неизвестные точки поверхности $\Re$. Эта функция в силу замечания удовлетворяет краевому условию (15) и не имеет других линий разрывов.

Разложим выражение, стоящее в фигурных скобках, в окрестности точки $(z,u) = (\infty, \infty^{(k)})$. Учитывая (8), коэффициенты при положительных степенях z являются линейными комбинациями следующих ρ выражений:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_M t^s\mu_j(t,v)g(t,v)\,dt - \sum_{m=1}^{\rho}\int_{(z_0,u_0)}^{(z_m,u_m)} t^s\mu_j(t,v)\,dt \equiv$$

$$\equiv \Gamma_{sj}, \quad s = \overline{0, r_j-2}, \quad j = \overline{2,n}.$$

Как показано в [8], приведенные здесь дифференциалы $t^s\mu_j(z,u)\,dt$ образуют базис дифференциалов 1-го рода поверхности $\Re$.

Положим

$$\Gamma_{sj} = 0. \tag{18}$$

Тогда, с одной стороны, у функции $\Phi(z,u)$ устраняются существенные особенности во всех точках $(\infty, \infty^{(k)})$, а с другой, — получена система ρ уравнений относительно ρ неизвестных точек (z_m, u_m).

Зафиксируем на поверхности $\Re$ какую-либо систему канонических сечений. По известной группе монодромии построение их не вызывает особых осложнений, примеры таких построений см. в [9, 10]. Комплексно-нормированный относительно этих сечений базис $du_k(t,v)$, $k = \overline{1,\rho}$, абелевых дифференциалов 1-го рода — это линейные комбинации вида

$$du_k(t,v) = \sum_{s,j}\gamma_{sj}^{(k)} t^s\mu_j(t,v)\,dt,$$

где $\gamma_{sj}^{(k)}$ — известные числа.

Умножая систему (18) на числа $\gamma_{sj}^{(k)}$ и складывая полученные уравнения, приходим к следующей проблеме обращения Якоби:

$$\sum_{m=1}^{\rho}{}' \int_{(z_0,u_0)}^{(z_m,u_m)} du_k(t,v) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_M g(t,v)\,du_k(t,v), \quad k = \overline{1,\rho}. \tag{19}$$

Здесь сравнения берутся по модулю периодов абелевых дифференциалов 1-го рода, штрих перед интегралом означает, что путь интегрирования не пересекает канонических сечений поверхности $\Re$. Система (19) однозначно разрешима [9] относительно точек (z_m, u_m), следовательно, у функции $\Phi(z,u)$ все параметры известны и она ограничена на бесконечности.

Однако функция $\Phi(z,u)$ имеет теперь в точках (z_m, u_m) простые полюсы, а в точке (z_0, u_0) — нуль ρ-го порядка.

Пусть $\omega_1(z,u), \ldots, \omega_n(z,u)$ — нормальный базис рациональных на $\Re$ функций, имеющих в точке (z_0, u_0) полюс ρ-го порядка, а в точках (z_m, u_m),

$m = \overline{1, \rho}$, — простые нули. Алгоритм построения такого базиса приведен в [7, 11]. Тогда функции $\omega_i(z, u)\Phi(z, u) = \varphi_i(z, u)$, $i = \overline{1, n}$, являются решениями задачи (15), а матрица

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}(z) & \dots & \varphi_{n1}(z) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1n}(z) & \dots & \varphi_{nn}(z) \end{matrix} \right\|$$

— канонической матрицей решений в заданном классе задачи (2).

В заключение отметим следующее.

1. Построение канонической факторизации матрицы (T, G) сводится к умению строить каноническую факторизацию матрицы $(T, 1)$. В этом направлении известны работы [12–14].

2. Пусть $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ — порядки при $z \to \infty$ функций $\varphi_1(z, u), \dots, \varphi_n(z, u)$ (взятые со знаком минус — это частные индексы задачи (2)). Исходя из алгоритма построения [11] функций $\omega_1(z, u), \dots, \omega_n(z, u)$, основу которого составляет нормальный базис $1, \lambda_2(z, u) \equiv u, \dots, \lambda_n(z, u)$, получаем

$$\kappa_i = \sum_{j=k_i}^{m_i} r_j + \gamma_i, \quad 1 \le k_i \le m_i \le n,$$

где числа γ_i легко находятся из указанного алгоритма.

Числа r_i отражают алгебраическую структуру матрицы (T, G), так как r_i — это порядки на бесконечности функций $1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, составляющие каноническую факторизацию матрицы $(T, 1)$, а последняя связана с группой монодромии T.

Числа γ_i отражают функциональную структуру матрицы (T, G), так как они связаны со структурой решения проблемы обращения Якоби (19), зависящей от выбора функций $g(z, u)$.

Работа выполнена в рамках государственного фонда фундаментальных исследований, проект 1/861.

1. *Зверович Э. И., Помаранцева Л. И.* Задача Римана для n пар функций с матрицами подстановочного типа // Докл. АН СССР. – 1974. – **217**, № 1. – С. 20 – 23.
2. *Примачук Л. П.* Об одном интегрируемом случае задачи Римана с подстановочной матрицей // Докл. БССР. – 1978. – **22**, № 4. – С. 310 – 313.
3. *Векуа Н. П.* Система сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
4. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
5. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 396 с.
6. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 343 с.
7. *Круглов В. Е.* О структуре частных индексов задачи Римана с матрицами подстановочного типа // Мат. заметки. – 1984. – **35**, № 2. – С. 169 – 176.
8. *Круглов В. Е.* О свойствах ядра Гензеля – Ландсберга на римановых поверхностях алгебраических функций // Краевые задачи. – Чебоксары, 1974. – Вып. 2. – С. 78 – 87.
9. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. – 1971. – **26**, вып. 1. – С. 113 – 179.
10. *Круглов В. Е.* Решение задачи Римана по одной n-листной римановой поверхности // Мат. исследования. – 1974. – **9**, вып. 2. – С. 230 – 236.
11. *Круглов В. Е.* Об алгебраических функциях, кратных заданному дивизору // Докл. АН СССР. – 1991. – **321**, № 1. – С. 11 – 13.
12. *Круглов В. Е.* Частные индексы, абелевы дифференциалы 1-го рода и уравнение поверхности, заданные конечной абелевой группой подстановок // Сиб. мат. журн. – 1981. – **22**, № 6. – С. 87 – 101.
13. *Круглов В. Е.* Частные индексы и одно приложение факторизации некоторых матриц подстановочного типа не выше четвертого порядка. I – III // Сиб. мат. журн. – 1983. – **24**, № 2. – С. 200 – 201.
14. *Штин С. Л.* Мономиальная разложимость разрешимых групп подстановок. – М.: 1990. – 27 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 956-В-90.

Получено 28.12.92