УДК 517.938

В. Л. Кулик, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ РЕГУЛЯРНИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ*

We select lasses of linear extensions of dynamical systems on a torus for which weak regularity implies regularity.

Виділені деякі класи лінійних розширень динамічних систем на торі, для яких зі слабкої регулярності випливає регулярність.

Нехай система диференціальних рівнянь

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx/dt = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$, має хоча б одну функцію Гріна [1, с. 120]

$$G_0(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)\left[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right], & \tau > 0, \end{cases} \tag{2}$$

яка задовольняє умову

$$\| G_0(\tau, \varphi) \| \le K e^{-\gamma|\tau|}, \quad K, \gamma \text{ — const} > 0, \quad \tau \in R. \tag{3}$$

Тоді систему (1) назвемо слабко регулярною. Якщо ж система (1) має єдину функцію Гріна (2) з оцінкою (3), то її будемо називати регулярною.

Наприклад, система диференціальних рівнянь

$$d\varphi/dt = \sin\varphi, \quad dx/dt = (\cos\varphi)x$$

має безліч різних функцій Гріна, тому вона є слабко регулярною і не є регулярною, а вже наступна система

$$d\varphi/dt = \sin\varphi, \quad dx/dt = (\cos 2\varphi)x$$

є регулярною, оскільки вона має єдину функцію Гріна.

Розглянемо таку задачу: знайти клас матричних функцій $A(\varphi)$ таких, щоб для кожної матриці $A(\varphi)$ з цього класу регулярність системи (1) витікала з її слабкої регулярності.

Теорема 1. *Нехай матриця $A(\varphi)$ в системі рівнянь* (1) *має вигляд*

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1(\varphi) & 0 \\ A_{21}(\varphi) & -A_1^*(\varphi) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

де A_1^* — транспонована матриця. Тоді із слабкої регулярності системи (1) *витікає її регулярність.*

Доведення. Припустимо, що система (1) має дві різні функції Гріна

$$G_0^{(i)}(\tau, \varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi) C^{(i)}(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)\left[C^{(i)}(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n\right], & \tau > 0, \quad i = 1, 2, \end{cases} \tag{5}$$

для яких виконується оцінка (3). Тоді при деякому значенні $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, $\tau = \tau_0 \in R$ виконується умова

$$G_0^{(1)}(\tau_0, \varphi_0) - G_0^{(2)}(\tau_0, \varphi_0) = \Omega^0_{\tau_0}(\varphi_0)\left[C^{(1)}(\varphi_{\tau_0}(\varphi_0)) - C^{(2)}(\varphi_{\tau_0}(\varphi_0))\right] \ne 0.$$

* Стаття фінансово підтримана Державним комітетом України з питань науки та технології.

Тобто лінійна однорідна система рівнянь

$$\dot{x}_1 = A_1(\varphi_t(\varphi_0))x_1,$$
$$\dot{x}_2 = A_{21}(\varphi_t(\varphi_0))x_1 - A_1^*(\varphi_t(\varphi_0))x_2 \tag{6}$$

має ненульовий, обмежений на всій осі R розв'язок $x_i = x_i^*(t)$, $i = 1, 2$. Очевидно, із існування функції Гріна (5) випливає слабка регулярність на R системи лінійних диференціальних рівнянь, $\dot{x}_1 = A_1(\varphi_t(\varphi_0))x_1$. Тому систему (6) за допомогою заміни змінних Ляпунова

$$x_1 = L(t)y, \quad x_2 = (L^{-1}(t))^* z \tag{7}$$

можна звести до такого вигляду [2, с. 27 – 28]:

$$\dot{y}_1 = F^+(t)y_1, \quad \dot{y}_2 = F^-(t)y_2, \quad \dot{y}_3 = F_1(t)y_1 + F_2(t)y_2 + \hat{F}(t)y_3,$$
$$\dot{z}_1 = \sum_{i=1}^{3} B_{1i}(t)y_i - (F^+(t))^* z_1 - F_1^*(t)z_3, \tag{8}$$
$$\dot{z}_2 = \sum_{i=1}^{3} B_{2i}(t)y_i - (F^-(t))^* z_2 - F_2^*(t)z_3, \quad \dot{z}_3 = \sum_{i=1}^{3} B_{3i}(t)y_i - (\hat{F}(t))^* z_3,$$

де всі нетривіальні розв'язки системи $\dot{y}_1 = F^+(t)y_1$ затухають експоненціально до нуля при $t \to +\infty$ і зростають при $t \to -\infty$, а всі розв'язки системи $\dot{y}_3 = \hat{F}(t)y_3$ експоненціально затухають до нуля при $t \to +\infty$ і $t \to -\infty$.

Оскільки матриці $L(t)$, $L^{-1}(t)$ в заміні змінних (7) обмежені, то система (8), також як і система (6), повинна мати нетривіальний обмежений на всій осі R розв'язок

$$(y_1^*(t), y_2^*(t), y_3^*(t)) = L^{-1}(t)x_1^*(t), \quad (z_1^*(t), z_2^*(t), z_3^*(t)) = L^*(t)x_2^*(t). \tag{9}$$

При цьому, враховуючи поведінку на безмежності розв'язків систем $\dot{y}_1 = F^+(t)y_1$, $\dot{y}_2 = F^-(t)y_2$, стверджуємо, що обов'язково $y_1^*(t) \equiv 0$, $y_2^*(t) \equiv 0$. Тепер, очевидно, для того щоб розв'язок (9) був ненульовим, потрібно, щоб $\| y_3^*(t) \| \neq 0$, тобто система рівнянь

$$\dot{y}_3 = \hat{F}(t)y_3, \quad \dot{z}_3 = B_{33}(t)y_3 - (\hat{F}(t))^* z_3 \tag{10}$$

мала ненульовий обмежений на R розв'язок

$$y_3 = y_3^*(t), \quad z_3 = z_3^*(t). \tag{9'}$$

Це накладає певну умову на матрицю $B_{33}(t)$. Дійсно, для того щоб неоднорідна система рівнянь

$$\dot{z}_3 = -(\hat{F}(t))^* z_3 + f(t), \tag{11}$$

в якій позначено $f(t) = B_{33}(t)y_3^*(t) = B_{33}(t)\Omega_0^t(\hat{F})\eta^*$, мала обмежений на R розв'язок, необхідно і досить, щоб

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* f(\tau)d\tau = 0. \tag{12}$$

В розглядуваному випадку маємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* B_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau\, \eta^* = 0. \tag{13}$$

Оскільки $\eta^* \neq 0$, то з рівності (13) випливає

$$\det\left[\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* B_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau\right] = 0. \tag{14}$$

З другого боку неоднорідна система

$$\dot{y}_3 = \hat{F}(t)y_3 + f_1(t), \quad \dot{z}_3 = B_{33}(t)y_3 - (\hat{F}(t))^* z_3 + f_2(t) \tag{10'}$$

при кожній вектор-функції $f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \in C^0(R)$ має обмежений на R розв'язок. Це витікає з того, що система (8) має функцію Гріна задачі про обмежений розв'язок.

Загальний розв'язок першої підсистеми

$$y_3(t) = \Omega_0^t(\hat{F})\left[y_3(0) + \int_0^t \Omega_\sigma^0(\hat{F})f_1(\sigma)d\sigma\right]$$

підставимо в другу підсистему системи (10′); одержуємо неоднорідну систему (11), в якій неоднорідність $f(t)$ має вигляд

$$f(t) = f_2(t) + B_{33}(t)\Omega_0^t(\hat{F})y_3(0) + B_{33}(t)\int_0^t \Omega_\sigma^t(\hat{F})f_1(\sigma)d\sigma.$$

Запишемо умову (12):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* B_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau\, y_3(0) + \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* f_2(\tau)d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* B_{33}(\tau)\int_0^\tau \Omega_\sigma^\tau(\hat{F})f_1(\sigma)d\sigma\, d\tau = 0. \tag{15}$$

Одержана система алгебраїчних рівнянь відносно $y_3(0)$ повинна мати розв'язок $y_3^*(0)$ при будь-яких вектор-функціях $f_1(t), f_2(t) \in C^0(R)$, а це можливо тільки тоді, коли

$$\det\left[\int_{-\infty}^{\infty} (\Omega_0^\tau(\hat{F}))^* B_{33}(\tau)\Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau\right] \neq 0. \tag{16}$$

Одержане протиріччя (14) і (16) переконує нас у тому, що двох різних функцій Гріна (5) не існує. Це й завершує доведення теореми 1.

Було б цікаво виділити другі класи систем (1) таких, щоб із їх слабкої регулярності витікала регулярність.

Справедливе наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай матриця* $A(\varphi)$ *в системі* (1) *має вигляд*

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1(\varphi) & A_{12}(\varphi) \\ A_{21}(\varphi) & -A_1^*(\varphi) \end{pmatrix} \tag{17}$$

і при цьому матриці $A_{12}(\varphi)$, $A_{21}(\varphi)$ *симетричні:*

$$A_{12}(\varphi) \equiv A_{12}^*(\varphi), \quad A_{21}(\varphi) \equiv A_{21}^*(\varphi). \tag{18}$$

Тоді зі слабкої регулярності системи (1) *витікає її регулярність.*

Доведення наведеної теореми 2 грунтується на тому, що $A(\varphi)J + JA^*(\varphi) \equiv 0$, де $J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n_1} \\ -I_{n_1} & 0 \end{pmatrix}$, а це дає можливість від системи (1) перейти до спряженої $d\varphi/dt = a(\varphi)$, $dy/dt = -A^*(\varphi)y$ за допомогою заміни змінних $y = Jx$.

Питання регулярної системи (1) залишається поки що відкритим у випадку матриці (17), коли умова (18) не виконуються.

Зауважимо, що зі слабкої регулярності системи (1) у випадку, коли матриця $A(\varphi)$ має вигляд (4), витікає існування симетричної матриці $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, для якої виконується умова

$$\langle [\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)A_1^*(\varphi) - A_1(\varphi)S(\varphi)]x_1, x_1\rangle \geq \|x_1\|^2. \tag{19}$$

У зв'язку з цим цікаво розглядати матрицю $A(\varphi)$ більш загального вигляду, ніж (4), а саме:

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1(\varphi) & 0 \\ A_{21}(\varphi) & A_2(\varphi) \end{pmatrix} \tag{20}$$

і припускати, що існує симетрична матриця $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ така, що

$$\langle [\dot{S}(\varphi) - S(\varphi)A_1^*(\varphi) - A_1(\varphi)S(\varphi)]x_1, x_1\rangle \geq \|x_1\|^2. \tag{21}$$

$$\langle [\dot{S}(\varphi) + S(\varphi)A_2(\varphi) + A_2^*(\varphi)S(\varphi)]x_2, x_2\rangle \geq \|x_2\|^2. \tag{22}$$

Очевидно, якщо $A_2(\varphi) \equiv -A_1^*(\varphi)$, то одержимо нерівність (19).

Теорема 3. *Нехай в системі* (1) *матриця* $A(\varphi)$ *має вигляд* (20), *де матриці* A_1, A_2 *однакових розмірів* $n_1 \times n_1$, *і існує матриця* $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, *яка задовольняє умови* (21), (22). *Тоді зі слабкої регулярності системи* (1) *витікає її регулярність.*

Доведення. Припускаючи, що існують дві різні функції Гріна (5), приходимо до того, що лінійна система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1(\varphi_t(\varphi_0))x_1, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}(\varphi_t(\varphi_0))x_1 + A_2(\varphi_t(\varphi_0))x_2 \end{aligned} \tag{23}$$

має нетривіальний розв'язок $x_i = x_i^*(t)$, $i = 1, 2$, обмежений на всій осі R. Систему (23) за допомогою заміни змінних Ляпунова $x = L(t)\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ перетворимо до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= F^+(t)y_1, \quad \dot{y}_2 = F^-(t)y_2, \\ \dot{y}_3 &= F_1(t)y_1 + F_2(t)y_2 + \tilde{F}(t)y_3, \\ \dot{z}_1 &= \sum_{i=1}^{3} B_{1i}(t)y_i - Y^+(t)z_1 + Y_1(t)z_3, \\ \dot{z}_2 &= \sum_{i=1}^{3} B_{2i}(t)y_i - Y^-(t)z_2 + Y_2(t)z_3. \end{aligned} \tag{24}$$

$$\dot{z}_3 = \sum_{i=1}^{3} B_{3i}(t) y_i + \check{Y}(t) z_3.$$

Причому, оскільки матриця $S(\varphi)$, яка задовольняє умови (21), (22), одна і та ж, то розміри квадратних матриць $\hat{F}$, $\check{Y}$ у системі (24) однакові. Це випливає з того, що розмірність підпростору $\hat{E}(t)$ обмежених на R розв'язків системи $\dot{x}_1 = A_1(\varphi_t(\varphi_0))x_1$ визначається формулою

$$\dim \hat{E}(t) = n^+(+\infty) - n^+(-\infty), \tag{25}$$

де $n^+(+\infty)$ — кількість додатніх власних чисел матриці $S(\varphi_t(\varphi_0))$ при досить великих значеннях $t > 0$.

Оскільки система (24) має нетривіальний обмежений на R розв'язок, то, очевидно, також і система рівнянь

$$\dot{y}_3 = \hat{F}(t) y_3, \quad \dot{z}_3 = B_{33}(t) y_3 + \check{Y}(t) z_3 \tag{26}$$

також повинна мати нетривіальний обмежений на R розв'язок. Це буде тоді, коли виконується рівність

$$\det \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\check{Y}) B_{33}(\tau) \Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau \right] = 0. \tag{27}$$

З другого боку, неоднорідна система

$$\dot{y}_3 = \hat{F}(t) y_3 + f_1(t),$$

$$\dot{z}_3 = B_{33}(t) y_3 + \check{Y}(t) z_3 + f_2(t)$$

повинна мати обмежений на R розв'язок при будь-яких фіксованих вектор-функціях $f_i(t) \in C^0(R)$ в силу припущення слабкої регулярності системи (1). Це приводить до того, що

$$\det \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Omega_\tau^0(\check{Y}) B_{33}(\tau) \Omega_0^\tau(\hat{F})\, d\tau \right] \neq 0. \tag{27'}$$

Одержане протиріччя (27) і (27′) переконує нас у справедливості теореми 3.

Зауваження. Якщо в нерівностях (21), (22) припускати, що матриці $S(\varphi)$ різні, то теорема 3, взагалі кажучі, не буде справедливою. Наприклад,

$$\dot{\varphi} = \sin\varphi, \quad \dot{x}_1 = (\cos\varphi) x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \tag{28}$$

де $a(\varphi) = \sin\varphi$, $A_1(\varphi) = \cos\varphi$, $A_2(\varphi) = 1$, $A_{21}(\varphi) = 1$. Нерівність (21) виконується при $S(\varphi) = -\cos\varphi$, а нерівність (22) — при $S(\varphi) = 1$. Легко переконатись, що система (28) є слабко регулярною і не є регулярною.

Зауважимо, що при доведенні теореми 3 основну роль відіграє однакова розмірність матриць $\hat{F}(t)$, $\check{Y}(t)$, а розміри матриць F^+ і Y^+, F^- і Y^- вже можуть бути різними. Тому в нерівностях (21), (22) можна припускати, що матриці $S(\varphi)$ різні, навіть різних розмірів матриці A_1, A_2, але при цьому на матриці S потрібно накласти такі додаткові умови, які б гарантували однакову розмірність матриць $\hat{F}$, $\check{Y}$ при кожному фіксованому $\varphi = \varphi_0 \in \mathcal{T}_m$.

Теорема 4. *Нехай в системі* (1) *матриця* $A(\varphi)$ *має вигляд* (20), *де матриці* A_1, A_2, *взагалі кажучи, різних розмірів і для них існують матриці* $S_1(\varphi)$,

$S_2(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$ *такі, що виконуються нерівності*

$$\begin{gathered}\langle [\dot{S}_1(\varphi) - S_1(\varphi) A_1^*(\varphi) - A_1(\varphi) S_1(\varphi)] x_1, x_1 \rangle \geq \| x_1 \|^2, \\ \langle [\dot{S}_2(\varphi) + S_2(\varphi) A_2(\varphi) + A_2^*(\varphi) S_2(\varphi)] x_2, x_2 \rangle \geq \| x_2 \|^2.\end{gathered} \tag{29}$$

Нехай також матриця

$$S(\varphi) = \operatorname{diag}\{-S_1(\varphi), S_2(\varphi)\} \tag{30}$$

має властивість

$$n_{\varphi_0}(+\infty) = n_{\varphi_0}(-\infty) \tag{31}$$

для кожного фіксованого значення $\varphi_0 \in \mathcal{T}_m$, *де* $n_{\varphi_0}(+\infty)$ $(n_{\varphi_0}(-\infty))$ — *кількість додатних власних чисел матриці* $S(\varphi_t(\varphi_0))$ *при досить великих значеннях* $t > 0$ (*при* $t \to -\infty$). *Тоді зі слабкої регулярності системи* (1) *випливає її регулярність.*

Доведення. Основна задача полягає в тому, щоб показати, що умова (31), накладена на матрицю (30), еквівалентна однаковим розмірам матриць $\hat{F}$, $\check{Y}$ в системі (24). Позначимо через $\hat{r}$ розмірність квадратної матриці $\hat{F}$ в системі (24), $\check{r}$ — розмірність матриці $\check{Y}$, $n_{\varphi_0}^{+(i)}(+\infty)$ — кількість додатних власних чисел матриці $S_i(\varphi_t(\varphi_0))$ при досить великих значеннях $t > 0$. Запишемо рівності, аналогічні (25); маємо

$$\begin{gathered}\hat{r} = n_{\varphi_0}^{+(1)}(+\infty) - n_{\varphi_0}^{+(1)}(-\infty), \\ \check{r} = n_{\varphi_0}^{+(2)}(+\infty) - n_{\varphi_0}^{+(2)}(-\infty).\end{gathered} \tag{32}$$

Для того щоб $\hat{r} = \check{r}$, потрібно виконання рівності

$$n_{\varphi_0}^{+(2)}(+\infty) - n_{\varphi_0}^{+(1)}(+\infty) = n_{\varphi_0}^{+(2)}(-\infty) - n_{\varphi_0}^{+(1)}(-\infty),$$

а це і є рівність (31). Таким чином, розміри квадратних матриць $\hat{F}$ і $\check{Y}$ в системі (21) однакові. Це дає можливість одержати те ж саме протиріччя (27) і (27′), що й при доведенні теореми 3.

Теорема 5. *Нехай існує невироджена симетрична матриця* $S(\varphi) \in C'(\mathcal{T}_m; a)$, *яка задовольняє умову*

$$\langle [\dot{S}(\varphi) + S(\varphi) A(\varphi) + A^*(\varphi) S(\varphi)] x, x \rangle \geq 0. \tag{33}$$

Тоді зі слабкої регулярності системи (1) *випливає її регулярність.*

Доведення. З існування функції Гріна (2) з оцінкою (3) витікає існування симетричної матриці

$$\bar{S}(\varphi) = 2 \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi)) \{\Omega_\tau^0(\varphi) C(\varphi_\tau(\varphi))\}^* d\tau -$$

$$- 2 \int_{0}^{+\infty} \Omega_\tau^0(\varphi) [C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n] \{\Omega_\tau^0(\varphi) [C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n]\}^* d\tau,$$

яка задовольняє умову

$$\langle [\dot{\tilde{S}}(\varphi) - \tilde{S}(\varphi) A^*(\varphi) - A(\varphi)\tilde{S}(\varphi)]\, y, y\rangle \geq \| y \|^2. \tag{34}$$

Оскільки матриця $S(\varphi)$ в (33) є невиродженою, то для матриці $\bar{S}(\varphi) = -S^{-1}(\varphi)$ виконується нерівність

$$\langle [\dot{\bar{S}}(\varphi) - \bar{S}(\varphi) A^*(\varphi) - A(\varphi)\bar{S}(\varphi)]\, y, y\rangle \geq 0. \tag{35}$$

Розглянемо симетричну матрицю з параметром $\lambda > 0$

$$S_\lambda(\varphi) = \lambda\, \bar{S}(\varphi) + \tilde{S}(\varphi). \tag{36}$$

Очевидно, справедлива нерівність

$$\langle [\dot{S}_\lambda(\varphi) - S_\lambda(\varphi) A^*(\varphi) - A(\varphi) S_\lambda(\varphi)]\, y, y\rangle \geq \| y \|^2$$

при всіх $\lambda > 0$, яка випливає з двох нерівностей (34), (35). Тому що матриця $\tilde{S}(\varphi)$ є невиродженою, то і матриця (36) при досить великих значеннях $\lambda > 0$ буде невиродженою $\forall \varphi \in \mathcal{T}_m$. Значить система (1) є регулярною, що і треба було довести.

Як приклад, який ілюструє застосування теореми 5, розглянемо таку систему рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_n & I_n & I_n \\ I_n & -I_n & I_n \\ I_n & I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(\varphi) & A_{12}(\varphi) & A_{13}(\varphi) \\ -A_{12}^*(\varphi) & B_2(\varphi) & A_{23}(\varphi) \\ -A_{13}^*(\varphi) & -A_{23}^*(\varphi) & B_3(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \tag{37}$$

де $x_i \in R^n$, $A_{ij}(\varphi)$ — довільні неперевні $n \times n$-вимірні матриці, а матриці $B_i(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ задовольняють умову

$$\langle B_i(\varphi)\eta, \eta\rangle \geq 0 \tag{38}$$

при всіх $\varphi \in \mathcal{T}_m$ і $\eta \in R^n$.

Безпосередніми підрахунками переконуємося, що похідна квадратичної форми $V = \langle x_1, x_2\rangle + \langle x_1, x_3\rangle + \langle x_2, x_3\rangle$ в силу системи (37) має вигляд

$$\dot{V} = 2\sum_{i=1}^{3} \langle B_i(\varphi) x_i, x_i\rangle,$$

а тому, враховуючи нерівность (38), маємо $\dot{V} \geq 0$.

Таким чином, система (37) може мати тільки одну функцію Гріна.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 270 с.
3. *Бронштейн И. У.* Линейные расширения и функции Ляпунова // Изв. АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. – 1983. – № 3. – С. 16–20.
4. *Кулик В. Л.* Регулярность систем линейных дифференциальных уравнений блочно-треугольного вида // Мат. заметки. – 1986. – **40**, № 4. – С. 484–491.
5. *Coppel W. A.* Dichotomies and Lyapunov Functions // J. Dif. Equat. – 1984. – **52**, № 1. – P. 58–65.

Получено 23.03.93