УДК 517. 53

К. Г. Малютин, канд. физ.-мат. наук (Сум. с.-х. ин-т)

О МНОЖЕСТВАХ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ОТКРЫТОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

A concept of a set of regular growth is introduced for functions analytic in an open half-plane. In particular, for functions with completely regular growth in an open half-plane, the whole half-plane is a set of its regular growth. The developed theory is used for solving a problem of Hermitian interpolation in a class of functions with regular growth in a half-plane with a given indicator.

Вводиться поняття множини регулярного зростання для функції, аналітичної в відкритій півплощині. Зокрема, для функції цілком регулярного зростання в відкритій півплощині вся півплощина являється її множиною регулярного зростання. Розвинута теорія застосовується для розв'язання однієї задачі ермітової інтерполяції в класі функцій цілком регулярного зростання в півплощині з індикатором, рівним заданому.

В настоящей статье мы будем пользоваться терминологией работы [1].

Теория Левина – Пфлюгера целых функций вполне регулярного роста (ф. в. р. р.) [1] была распространена Н. В. Говоровым [2] на функции, голоморфные в полуплоскости. Опираясь на развитую им теорию, Н. В. Говоров нашел решение краевой задачи Римана с бесконечным индексом степенного характера. А. Ф. Гришин [3] ввел понятие множества регулярного роста (м. р. р.) целой функции. Это определение таково, что можно говорить о функциях, регулярно растущих на множестве своих корней. Развитая теория позволила решить интерполяционную задачу в классе целых ф. в. р. р. с индикатором, равным заданному [4, 5]. Кроме того, был дан частичный ответ на давно поставленный А. Ф. Леонтьевым вопрос: следует ли из условий интерполяционности множеств, что их канонические произведения являются ф. в. р. р.? В совместной работе А. Ф. Гришина, А. М. Руссаковского [6] был подведен итог многолетним исследованиям задач эрмитовой интерполяции в различных классах целых функций, которыми в разное время занимались многие математики: Ю. Ф. Коробейник, А. В. Братищев [7, 8] и др. В настоящей работе мы распространяем теорию А. Ф. Гришина на открытую полуплоскость $C^+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ и получаем решение задачи эрмитовой интерполяции в классе ф. в. р. р. в C^+. В аналогичной постановке эта задача рассматривалась А. М. Руссаковским [9]. Им было получено решение при условии, что узлы интерполяции правильно распределены и достаточно хорошо отделены от вещественной оси. Мы устраняем эти ограничения. Все найденные условия интерполяционности множеств являются необходимыми и достаточными.

1. Множества регулярного роста функций, аналитических в открытой полуплоскости. Следуя А. Ф. Гришину [3], дадим следующее определение.

***Определение* 1.** *Отображение $T(z)$, определенное на множестве E, называется асимптотически тождественным на бесконечности, если*

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in E}} \frac{T(z)-z}{z} = 0.$$

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho(r)\to\rho>0$ при $r\to\infty$. Положим $V(r) = r^{\rho(r)}$. Обозначим через $Y(\theta_1,\theta_2) = \{z: \theta_1 \le \arg z \le \theta_2\}$. Через $C(z,\alpha)$ будем обозначать открытый, а через $K(z,\alpha)$ — замкнутый круг с центром в точке z радиуса α.

***Определение* 2.** *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в C^+, с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$. Множество E называется м. р. р. функции $f(z)$ в C^+, если для любого угла $Y(\theta_1,\theta_2)\subset C^+$*

существует отображение $T(z)$, определенное на множестве $E \cap Y(\theta_1, \theta_2)$, асимптотически тождественное на бесконечности, такое, что

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in T(E)}} \left[\frac{\ln \left| f(re^{i\theta}) \right|}{V(r)} - h(\theta) \right] = 0, \qquad z = re^{i\theta}.$$

Определение 3. *Пусть E — м. р. р. для функции $f(z)$ в C^+, B — предельное множество функции* $\arg z \pmod{2\pi}$ *при $z \to \infty$, $z \in E$. Пусть $h_1(\theta)$ — ограниченный тригонометрически ρ-выпуклый индикатор на интервале $(0, \pi)$ такой, что $h(\theta) \le h_1(\theta)$; $\theta \in (0, \pi)$, и $h(\theta) = h_1(\theta)$ при $\theta \in B \cap (0, \pi)$. Тогда множество E называется м. р. р. функции $f(z)$ относительно индикатора $h_1(\theta)$ в C^+.*

Методом, примененным в работе [3, с. 38–41], нетрудно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ была ф. в. р. р. в C^+, необходимо и достаточно, чтобы вся полуплоскость C^+ была м. р. р. функции $f(z)$.*

Пусть $E \subset C^+$ — счетное множество, предельные точки которого лежат на вещественной оси, $E = \{a_n\}$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$, среди точек множества E могут быть и кратные. Обозначим через $n_E(D)$ число точек множества E, принадлежащих множеству D, и

$$n_E^+(D) = \sum_{a_n \in D} \sin\theta_n.$$

Пусть $n_E^+(C(0, r)) < MV(r)$, где M — постоянное число. Если $K \subset C^+$ — компакт, то обозначим $K_\sigma = \overline{\bigcup_{z \in K} C(z, \sigma)}$, K^t — гомотетия множества K с коэффициентом t и центром в начале координат, $K_\sigma^t = (K_\sigma)^t$. Обозначим

$$\tilde{d}_E^+(K) = \overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{n_E^+(K^t)}{V(t)}, \qquad d_E^+(K) = \lim_{\sigma \to +0} \tilde{d}_E^+(K_\sigma).$$

Через $\tilde{d}_E$ и d_E будем обозначать функции, определяемые аналогично с помощью меры n_E. Очевидно, функции d_E, $\tilde{d}_E$, d_E^+ и $\tilde{d}_E^+$ полуаддитивные.

Теорема 2. *Пусть E — часть множества корней функции $f(z)$, аналитической в C^+, являющееся ее м. р. р. в C^+ относительно индикатора $h(\theta)$ при уточненном порядке $\rho(r)$, $\rho > 0$. Пусть μ_H — рисовская, а μ_H^+ — неванлинновская меры субгармонической функции $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$, $\theta \in (0, \pi)$ ($d\mu_H^+ = \sin\theta \, d\mu_H$). Тогда для любого компакта $K \subset C^+$ справедливы неравенства*

$$d_E(K) \le \mu_H(K), \qquad d_E^+(K) \le \mu_H^+(K). \tag{1}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4 из [3, с. 44–47].

2. Построение объемлющего правильно распределенного множества. Пусть $h(\theta)$ — непрерывный ρ-тригонометрически выпуклый индикатор на отрезке $[0, \pi]$, $\rho > 0$, $H(re^{i\theta}) = r^\rho h(\theta)$. Тогда рисовская мера субгармонической функции $H(z)$ имеет плотность $(1/2\pi) r^{\rho-1} dr ds(\theta)$, где $s(\theta)$ связана с $h(\theta)$ формулой обращения [1, с. 80].

Лемма 1. *Пусть* E *— ограниченное борелевское множество,* $E \subset C^+$, *Причем для любого* θ

$$\operatorname{mes} E_\theta = \operatorname{mes}(E \cap \{z:\ \arg z = \theta\}) = 0.$$

Тогда $\mu_H^+(E) = \mu_H(E) = 0$.

Доказательство проводится интегрированием по множеству E [4, с. 39].

Семейство множеств $K(x)$, $x \in A \subset R^n$, называется непрерывным в точке x_0, если $\forall\ \sigma > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ такое, что при $\|x - x_0\| < \delta$ $F(x)\Delta F(x_0) \subset (\partial F(x_0))_\sigma$ (Δ означает симметрическую разность множеств).

Следующая лемма доказывается так же, как леммы 3 и 4 из [4, с. 39].

Лемма 2. *Пусть* $K(x)$ *— непрерывное на множестве* $A \subset R^n$ *семейство компактов, нормальных относительно меры* μ_H^+, $K(x) \subset C^+$ $\forall\ x \in A$. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда функции* $d_E(K(x))$ *и* $d_E^+(K(x))$ *непрерывны на множестве* A. *Если дополнительно* A *компактно в* R^n, *то существует функция* $\varepsilon(r) \downarrow 0$ *при* $r \to \infty$ *такая, что*

$$n_E^+(K^r(x)) \le (d_E^+(K(x)) + \varepsilon(r))V(r).$$

***Замечание* 1.** Обозначим через $D(\alpha, \beta, \theta_1, \theta_2)$, $1 \le \alpha \le \beta$, $0 \le \theta_1 \le \theta_2 < \pi$, замкнутую область, лежащую в кольце $\alpha \le |z| \le \beta$, границей которой является дуга окружности $|z| = \alpha$, $\theta_1 \le \arg z \le \theta_2$, дуга окружности $|z| = \beta$, расположенная между прямыми, проведенными через точки $\alpha e^{i\theta_1}$ и $\alpha e^{i\theta_2}$ под углом $\pi/4$ к радиус-векторам этих точек, и отрезки этих прямых, расположенные в кольце $\alpha \le |z| \le \beta$. Обозначим через

$$S_n = \{(1, \beta, \theta_1, \theta_2):\ 1 \le \beta \le 1 + 2^{-n-1},\ 2^{-n} \le \theta_1 \le \theta_2 \le \pi - 2^{-n}\},$$

$n = 1, 2, \ldots$. Если $(1, \beta, \theta_1, \theta_2) \in S_n$, то $D(1, \beta, \theta_1, \theta_2) \subset C^+$. По лемме 1 множества $D(1, \beta, \theta_1, \theta_2)$ нормальны относительно меры μ_H^+. Если E — счетное множество, удовлетворяющее условию (1), то по лемме 2 существует функция $\tilde\varepsilon_n(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ такая, что

$$n_E^+(D(1, \beta, \theta_1, \theta_2)) \le (d_E^+(D(1, \beta, \theta_1, \theta_2)) + \tilde\varepsilon_n(r))V(r),$$

$$n_E^+(K(z, \alpha r)) \le (d_E^+(K(e^{i\theta}, \alpha)) + \tilde\varepsilon_n(r))V(r)$$

при $z = re^{i\theta} \in Y_n(2^{-n}, \pi - 2^{-n})$, $\alpha \le 2^{-n-1}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\tilde\varepsilon_{n+1}(r) \ge \tilde\varepsilon_n(r)$. Определим последовательность положительных чисел $R_n \uparrow \infty$. Пусть R_1 таково, что при $r \ge R_1$: $\tilde\varepsilon_1(r) \le 1$. Выберем $R_2 \ge 2R_1$ так, чтобы при $r \ge R_2$: $\tilde\varepsilon_2(r) \le 1/2$ и т. д. Выбираем $R_n \ge 2R_{n-1}$ таким, чтобы при $r \ge R_n$ выполнялось неравенство $\tilde\varepsilon_n(r) \le 1/(n+1)$. Определим теперь функцию $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ следующим образом: $\varepsilon_1(r) = 1/n$, если $R_{n-1} \le r < R_n$ $(R_0 = 0)$.

Пусть функция $\varphi(r) \ge 0$ при $r \ge 0$ удовлетворяет условию

$$\lim_{r \to \infty} \varphi(r)/r = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $C_\varphi = \{z:\ \operatorname{Im} z \ge \varphi(|z|)\}$. Положим $\varphi_1(r) = r/2^n$, если

$R_{n-1} \le r < R_n$. Тогда если $(1, \beta, \theta_1, \theta_2) \in \bigcup S_n$, то

$$n_E^+(D'(1, \beta, \theta_1, \theta_2) \cap C_{\varphi_1}) \le (d_E^+(D(1, \beta, \theta_1, \theta_2)) + \varepsilon_1(r))V(r),$$

а при $\alpha \le (\sin\theta)/2$ также

$$n_E^+(K(z, \alpha r) \cap C_{\varphi_1}) \le (d_E^+(K(e^{i\theta}, \alpha)) + \varepsilon_1(r))V(r).$$

В дальнейшем будет полезна лемма, полученная А. Ф. Гришиным [4, с. 41].

Лемма 3. *Пусть при* $r \to \infty$ $\varepsilon(r) \downarrow 0$, $\varphi(r) \uparrow \infty$, $\varphi(a) > 0$, φ *— дифференцируемая функция,*

$$\varepsilon_1(r) = \left(\sup_{a \le t \le r} \varepsilon(t)\varphi(t)\right)(\varphi(r))^{-1}.$$

Тогда $\varepsilon_1(r) \ge \varepsilon(r)$, $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$, $\varepsilon_1(r)\varphi(r)$ *— неубывающая функция, причем* $|\varepsilon_r'(r)|/\varepsilon_1(r) \le \varphi'(r)/\varphi(r)$, *где*

$$\varepsilon_r'(r) = \lim_{h \to 0}(\varepsilon_1(r) - \varepsilon_1(r+h))/h.$$

В частности, если $\varphi(r) = \ln r$, *то* $|\varepsilon_r'(r)|/\varepsilon_1(r) \le 1/(r\ln r)$ *при* $r \ge 2$.

Лемма 4. *Пусть* $\varepsilon(r) \downarrow 0$ *при* $r \to \infty$, $\rho(r)$ *— уточненный порядок,* $\rho > 0$. *Тогда существуют функция* $\tilde{\varphi}_2(r)$, *удовлетворяющая условию* (2), *и покрытие области* $C\tilde{\varphi}_2 \setminus C(0, r)$ *областями* $D_j = D'^j(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})$ *такое, что выполняются условия:*

1) $\overset{\circ}{D}_{j_1} \cap \overset{\circ}{D}_{j_2} = \varnothing$ *при* $j_1 \ne j_2$, $\overset{\circ}{D}$ *— внутренность* D;

2) $$\lim_{j\to\infty}(B_j - 1) = \lim_{j\to\infty}(\theta_{2j} - \theta_{1j}) = 0;$$

3) $$\lim_{r\to\infty} \sum_{D_j \cap C(0,r) \ne \varnothing} \max(1, \varepsilon(t_j)V(t_j))/V(r) = 0.$$

Доказательство. Пусть $\varphi_2(t)$, $\varphi_2(0) \ne 0$, — бесконечно большая непрерывно дифференцируемая функция с положительной производной, а $\psi(t) \ge 1$ — монотонно возрастающая бесконечно большая функция. Пусть s_j — корень уравнения $\varphi_2(s_j) = j$. Разобьем полуплоскость C^+ на полукольца окружностями $|z| = s_j$. Пусть $\nu_{j,k} = k\pi/[\psi(s_j)]$. Рассмотрим в полукольце $K_j = \{z : s_j \le |z| \le s_{j+k}, \operatorname{Im} z > 0\}$ области $D(s_j, s_{j+1}, \nu_{j,k}, \nu_{j,k+1})$, $k = 0, 1, \ldots, [\psi(s_j)] - 1$. Пронумеруем полученные области следующим образом. Сначала пронумеруем области в полукольце K_1 в порядке возрастания величин $\nu_{1,k}$, затем продолжим нумерацию в кольце K_2 и т. д. Получим систему областей D_j. Возьмем

$$\psi(t) = \varepsilon(t)^{-1/3}, \quad \varphi_2'(t) = (t\ln t\rho'(t) + \rho(t)) : \left(t\sqrt[3]{\varepsilon(t)}\right).$$

Из предположений относительно $\varepsilon(t)$ следует

$$s_{j+1} - s_j \sim \frac{\sqrt[3]{\varepsilon(s_j)}}{\rho} s_j, \quad j \to \infty. \tag{3}$$

Дальнейшее доказательство проводится, как и в [4, с. 42]. Заметим только, что в качестве $C_{\tilde{\varphi}_2}$ нужно взять объединение тех D_j, которые полностью принадлежат C^+.

Лемма 5. *Пусть* U *— множество интервалов линейной плотности ноль* ([1], *гл.* 11), K *— произвольное положительно число,* $\rho(r)$ *— уточненный порядок,* $\rho > 0$, φ_n *— последовательность чисел, удовлетворяющих условиям* $0 < \varphi_n \le 1$, $\sum \varphi_n = \infty$. *Тогда существуют функция* $\varepsilon_0(r) \downarrow 0$ *при* $r \to \infty$ *и положительное число* R_0, *не зависящие от последовательности* φ_n, *и последовательность положительных чисел* r_n *такие, что:* 1) $r_n \overline{\in} U$; 2) $r_{n+1} - r_n \ge \varphi_n d r_n^{1-\rho(r_n)}$; $d = 1/(4; K\rho)$; 3) *если последовательность* R_m, $m \ge 1$, *такова, что* $R_1 \ge R_0$, $R_{m+1} = (1 + \varepsilon(R_m))R_m$, *где* $\varepsilon(r) \ge \varepsilon_0(r)$, *то*

$$\sum_{r_n \in (R_m, R_{m+1})} \varphi_n \ge K\rho \int_{R_m}^{R_{m+1}} t^{\rho(t)-1}\, dt. \tag{4}$$

Доказательство. Положим

$$\varepsilon_U(r) = \sup_{t \ge r} \frac{1}{t} \operatorname{mes}(U \cap [0, t]).$$

Пусть

$$\varepsilon_1(r) = \max(\varepsilon_U, 1/(\ln r)), \quad \varepsilon_2(r) = \sup_{2 \le t \le r} \varepsilon_1(t) \ln t / \ln r, \quad \varepsilon_0(r) = 2\varepsilon_2(r).$$

Пусть r_1 — первая точка на луче $[2, \infty]$, не принадлежащая множеству U, и выбраны точки $r_1, r_2, \ldots, r_s$. Тогда в качестве точки r_{s+1} возьмем первую точку на луче $[r_s + \varphi_s \times d r_s^{1-\rho(r_s)}, \infty)$, не принадлежащую множеству U. Продолжая этот процесс до бесконечности, получаем последовательность r_n. Пусть $\varepsilon(r) \ge \varepsilon_0(r)$, R_0 — некоторое число, которое выберем позже, а пока будем считать, что $\varepsilon_0(r) \le 1$ при $r \ge R_0$. Пусть $R_1 \ge R_0$, $R_{m+1} = (1 + \varepsilon(R_m))R_m$. Оценим левую часть неравенства (3). Пусть $r_{s+1} = r_s + \varphi_s d r_s^{1-\rho(r_s)} + l_s$. Это означает, что полусегмент $[r_s + \varphi_s d r_s^{1-\rho(r_s)}, r_s + \varphi_s d r_s^{1-\rho(r_s)} + l_s)$ покрыт множеством U. Обозначим через l_s^m длину пересечения указанного выше полусегмента с сегментом $[R_m, R_{m+1}]$. Пусть $r_{\overline{n}}$ — первая точка последовательности r_n, попавшая в интервал (R_m, R_{m+1}). Если R_0 достаточно велико, то такая точка существует. Длина не покрытой множеством U части сегмента $[R_m, r_{\overline{n}}]$ не превышает $d R_m^{1-\rho(R_m)}$. Поэтому

$$\sum_{r_n \in (R_m, R_{m+1})} \varphi_n d r_n^{1-\rho(r_n)} \ge R_{m+1} - R_m - dR_m^{1-\rho(R_m)} - l_{\overline{n}-1}^m - \sum_{r_n \in (R_m, R_{m+1})} l_n^m.$$

Дальше доказательство проводится, как и в [4, с. 44].

Введем обозначение $L(r) = V(r)/r$.

Лемма 6. *Пусть* F *— множество,* $F \subset C^+$, *имеющее относительно уточненного порядка* $\rho(r)$, ρ *— целое положительное, аргументную плотность* $s^+(\theta_1, \theta_2)$, *непрерывную в точках* 0 *и* π ([2], *гл.* 11), *причем*

$$\lambda_0 = 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin \rho\psi}{\sin \psi}\, ds^+(\psi) = \frac{h(0) + (-1)^{\rho-1} h(\pi)}{\pi}, \tag{5}$$

где функции $s^+(\theta)$ *и* $h(\theta)$ *связаны формулой обращения. Пусть* n_F^+ *— ме-*

ра, ассоциированная с множеством F, q — произвольное число из интервала $(0, 1)$. Тогда функция

$$\delta(R, \alpha) = \frac{2}{\rho L(R)} \iint\limits_{K(R,\alpha)} \frac{\sin \rho\psi}{\sin\psi\,|\xi|^{\rho}}\, dn_F^{+}(\xi), \quad \psi = \arg\xi,$$

где $K(R, \alpha) = \{\xi\colon \alpha R \le |\xi| \le R$ при $\alpha < 1$ и $R \le |\xi| \le \alpha R$ при $\alpha \ge 1\}$, равномерно на сегменте $[q, 1/q]$ стремится к $\lambda_0 |\ln\alpha|$ при $R \to \infty$.

Доказательство. Пусть ν — мера с плотностью $\rho r^{\rho-1} dr\, ds^{+}(\theta)$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ обозначим через ν_ε сужение меры ν на угол $Y_\varepsilon = Y(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$. Тогда (см. [10], теорема 0.5)

$$\nu_\varepsilon = \tau \lim_{R\to\infty} n_{F,R,\varepsilon}^{+},$$

где $n_{F,R}^{+}(D) = n_F^{+}(D^R)/V(r)$, индекс ε внизу указывает на сужение меры в соответствующий угол, а τ означает топологию слабой сходимости в пространстве Φ^{*}, сопряженном к Φ — линейному пространству непрерывных финитных функций в C^{+}. Предположим для определенности $\alpha > 1$. Пусть K_ε — множество точек, границей которого являются дуги окружностей $|z| = 1$, $|z| = \alpha$ и отрезки прямых, соединяющие точку $e^{i(\pi-\varepsilon)}$ с $\alpha e^{i(\pi-2\varepsilon)}$ и $e^{i\varepsilon}$ с $\alpha e^{i2\varepsilon}$. Множество K_ε — нормальное множество для меры ν_ε, поэтому ([10], теорема 0.5′)

$$\nu_{K_\varepsilon} = \tau \lim_{R\to\infty} n_{F,R,K_\varepsilon}^{+},$$

где индекс K_ε означает сужение меры на K_ε.

Функция $(2\sin\rho\theta)/(\rho r^{\rho}\sin\theta)$ с множества K_ε продолжается до финитной бесконечно-дифференцируемой в угле Y_ε функции $B(z)$, $z = re^{i\theta}$, по переменным r и θ. Зафиксируем $\varepsilon_1 > 0$. Возьмем ε таким, чтобы выполнялись неравенства

$$s^{+}(0, 2\varepsilon) < \varepsilon_1/(12\alpha^{\rho}), \quad s^{+}(\pi - 2\varepsilon, \pi) < \varepsilon_1/(12\alpha^{\rho}) \tag{6}$$

и

$$\left| 2\int\limits_{2\varepsilon}^{\pi-2\varepsilon} \frac{\sin\rho\psi}{\sin\psi}\, ds^{+}(\psi) - \lambda_0 \right| < \varepsilon_1/(3\ln\alpha). \tag{7}$$

Пусть $\delta(R, \alpha) = I_1 + I_2$, где I_1 — интеграл по области K_ε^R, а I_2 — интеграл по оставшейся части множества $K(R, \alpha)$. Из (6) следует $\lim\limits_{R\to\infty} I_2 \le \varepsilon_1/3$. Кроме того,

$$\lim_{R\to\infty} I_1 = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{\rho L(R)} \iint\limits_{K_\varepsilon^R} \frac{\sin\rho\psi}{|\xi|^{\rho}\sin\psi}\, dn_F^{+}(\xi) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \frac{2}{\rho} \iint\limits_{K_\varepsilon} \frac{\sin\rho\psi}{|\xi|^{\rho}\sin\psi}\, dn_{F,R,\varepsilon}^{+}(\xi) = \lim_{R\to\infty} \frac{2}{\rho} \iint\limits_{Y_\varepsilon} \beta(z)\, dn_{F,R,K_\varepsilon}^{+}(z) =$$

$$= \frac{2}{\rho} \iint\limits_{Y_\varepsilon} \beta(z)\, d\nu_{K_\varepsilon}(z) = 2 \iint\limits_{K_\varepsilon} \frac{\sin\rho\psi}{r^{\rho}\sin\psi}\, r^{\rho-1} dr\, ds^{+}(\psi) =$$

$$= 2\int_1^{\alpha}\frac{dr}{r}\int_{2\varepsilon}^{\pi-2\varepsilon}\frac{\sin\rho\psi}{\sin\psi}\,ds^{+}(\psi) + I_{\varepsilon}.$$

В силу условия (7) первое слагаемое в последней части цепочки равенств отличается от $\lambda_0 \ln\alpha$ меньше, чем на $\varepsilon_1/3$. Считая ε столь малым, чтобы

$$2\ln\alpha\max\{s^{+}(0,2\varepsilon),\ s^{+}(\pi-2\varepsilon,\pi)\} < \varepsilon_1/6,$$

получаем

$$|I_{\varepsilon}| \le 2\ln\alpha[s^{+}(0,2\varepsilon),\ s^{+}(\pi-2\varepsilon,\pi)] < \varepsilon_1/3.$$

Далее нужно доказать, что предел равномерен на сегменте $[q;1/q]$. Если это не так, то существует положительное число δ и последовательности $R_n\to\infty$, $\alpha_n\in[q;1/q]$ такие, что

$$|\delta(R_n,\alpha_n)-\lambda_0\ln\alpha| > \delta. \tag{8}$$

Можно считать, что $\alpha_n\downarrow\alpha_0$. По лемме 2 существует такая функция $\varepsilon(r)\downarrow 0$ при $r\to\infty$, что для любых $\alpha,\beta\in[q;1/q]$ будет выполняться неравенство $n_F^{+}(K_{\varepsilon}^{R}(\alpha,\beta)) \le [\Delta_{\varepsilon}(\beta^{\rho}-\alpha^{\rho})+\varepsilon(r)]V(r)$, где $\Delta_{\varepsilon}=\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}ds^{+}(\theta)$, $K_{\varepsilon}^{R}(\alpha,\beta)$ — множество точек в C^{+}, границей которого являются дуги $|z|=\alpha r$, $|z|=\beta r$ и отрезки, соединяющие точки $\alpha re^{i\varepsilon}$ с $\beta re^{2i\varepsilon}$ и $\alpha re^{i(\pi-\varepsilon)}$ с $\beta re^{i(\pi-2\varepsilon)}$. Пусть $A_n = K_{\varepsilon}^{R_n}(\alpha_0,\alpha_n)\setminus\{z:|z|=\alpha_nR_n\}$. Тогда

$$n_F^{+}(A_n) \le [\Delta_{\varepsilon}(\alpha_n^{\rho}-\alpha_0^{\rho})+\varepsilon(R_n)]V(R_n).$$

Поэтому существует число n_0 такое, что при $n>n_0$ справедливо неравенство

$$\frac{2}{\rho L(R_n)}\left|\iint_{A_n}\frac{\sin\rho\psi}{|\xi|^{\rho}\sin\psi}\,dn_F^{+}(\xi)\right| \le \frac{2n_F^{+}(A_n)}{\rho q^{\rho}R_n^{\rho}L(R_n)} < \frac{\delta}{4}.$$

Учитывая (8) и проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем неравенство $|\delta(R_n,\alpha_0)-\lambda_0\ln\alpha| > \delta/2$ при $n>n_0$, которое противоречит доказанному выше утверждению. Лемма 6 доказана.

Следствие. *Положим*

$$\tilde{\delta}(R,\alpha) = \delta(R,\alpha)-\frac{\lambda_0}{L(R)}\int_R^{\alpha R}\frac{V(t)}{t^{\rho+1}}\,dt. \tag{9}$$

Тогда функция $\tilde{\delta}(R,\alpha)$ *равномерно по* $\alpha\in[q;1/q]$ *стремится к нулю при* $R\to\infty$.

В силу леммы 6 достаточно показать, что равномерно по α

$$\lim_{R\to\infty}\left[\frac{\lambda_0}{L(R)}\int_R^{\alpha R}\frac{V(t)}{t^{\rho+1}}\,dt-\lambda_0\ln\alpha\right] = 0$$

или

$$\lim_{R\to\infty} \lambda_0 \int\limits_R^{\alpha R} \left[\frac{L(t)}{L(R)} - 1\right] \frac{dt}{t} = 0.$$

Последнее утверждение следует из свойств уточненного порядка [1, с. 49].

Пусть E — счетное множество, $E \subset C^+$, все предельные точки которого лежат на вещественной оси. Обозначим

$$\Phi_{E,z}(\alpha) = \left(n_E(C(z, \alpha r)) - q_n\right)^+ / V(r),$$

$$\Phi_{E,z}^+(\alpha) = \left(n_E^+(C(z, \alpha r)) - q_n \sin\theta_n\right)^+ / V(r),$$

где $r = |z|$, $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ — точка множества E, ближайшая к z, q_n — ее кратность. Если E — множество корней функции $f(z)$, аналитической в C^+, то будем писать $n_f = n_E$, $n_f^+ = n_E^+$, $\Phi_{f,z} = \Phi_{E,z}$, $\Phi_{f,z}^+ = \Phi_{E,z}^+$.

Лемма 7. *Пусть множества* E_1 *и* E_2 *удовлетворяют условиям* (23) – (26). *Причем круги* $C(z, r^{-\rho'} \sin\theta)$, $\rho' > \rho - 1$, $z = re^{i\theta} \in E_2$, *попарно не пересекаются и не пересекают множества* E_1 *и* $\sin\theta \geq r^{-\rho/2}$. *Тогда множество* $E_1 \cup E_2$ *удовлетворяет условиям* (23) – (26).

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 9 из [4].

Теорема 3. *Пусть множество* E *удовлетворяет условию* (1). *Тогда существуют* $E(z)$ — *ф. в. р. р. в замкнутой полуплоскости* C^+ *с индикатором* $h(\theta)$ *и функция* $\varphi(r)$, *удовлетворяющая условию* (2), *такие, что* $E(z)$ *обращается в ноль на множестве* $E_\varphi = E \cap C_\varphi$. *Причем выполняются условия* 1) *у функции* $E(z)$ *нет кратных корней (кроме, может быть, точек множества* E_φ); 2) *все корни функции* $E(z)$ *лежат в* C_φ; 3) *пусть* $\rho' > \rho - 1$ (ρ' — *произвольное число, удовлетворяющее этому неравенству, а функции* $E(z)$ *и* $\varphi(r)$ *будут зависеть от выбора* ρ'), $E_1 = \{\lambda_n = \tau_n e^{i\varphi_n}\}$, $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots$ — *корни* $E(z)$, *не принадлежащие множеству* E. *Тогда круги* $C(\lambda_n, \tau_n^{-\rho'} \sin\varphi_n)$ *не пересекаются между собой и не пересекают множество* E. *Кроме того, существует положительное число* d *такое, что выполняются неравенства*

$$\tau_{n+1} \geq \tau_n + d \sin\varphi_n \tau_n^{1-\rho(\tau_n)}.$$

Доказательство. Опишем около каждой точки $z \in E$, $z = re^{i\theta}$, открытый круг $C(z, 2qr^{-\rho'} \sin\theta)$, q — кратность точки z, и обозначим через U круговую проекцию этого множества на луч $(0, \infty)$. В силу неравенства $\rho' > \rho - 1$ открытое множество U имеет нулевую плотность. Пусть $\varphi_1(r)$ — функция, существование которой утверждается в замечании 1. Положим $\varphi_3(r) = \max(\varphi_1(r), r^{(\rho-\rho'+1)/2})$. Пусть при целом ρ выполняется условие (5). Положим $\Delta = s^+(0, \pi)$, $K = 6\Delta + 3$, $d_1 = 1/(4K\rho)$. Пусть R_0 и функция $\varepsilon_0(r)$ — обьекты, которые конструируются в лемме 5 для заданных множества U и числа K. Существует число T_1 такое, что если $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ таковы, что $z_1, z_2 \in C_{\varphi_3}$; $r_1, r_2 \,\overline{\in}\, U$; $r_2 \geq r_1 + d_1 \sin\theta_1 r_1^{1-\rho(r_1)}$, то круги $C(z_1, \sin\theta_1 r_1^{-\rho'})$, $C(z_2, \sin\theta_2 r_2^{-\rho'})$ не пересекаются и не пересекают множества E. Пусть $\varepsilon_1(r)$ — функция для множества E, существование которой утверждается в замечании 1; $\varepsilon_2(r) = \max(\varepsilon_1(r), \varepsilon_0(r))$ при $r \geq 2$; а

$$\varepsilon_3(r) = \sup_{2 \le t \le r} (\varepsilon_2(t) \ln t)/\ln r.$$

Пусть, кроме того, в лемме 4 построение системы областей D_j ведется с помощью функций $\varphi_2(t)$ и $\psi(t)$, которые определяются с помощью функции $\varepsilon_3(t)$. Подвергнем систему D_j следующему преобразованию. Оставим только те множества, которые строго принадлежат C_{φ_3} и обозначим объединение полученных множеств через C_{φ_4}. Ясно, что функция $\varphi_4(r)$ удовлетворяет условию (2). Область $\tilde{D}_j$ получается из D_j удалением некоторых граничных отрезков, дуг окружностей или угловых точек. Это удаление можно произвести так, чтобы области $\tilde{D}_j$ не пересекались и чтобы $C_{\varphi_4} = \bigcup \tilde{D}_j$. Таким образом полученную систему областей вновь будем обозначать D_j. Для этой системы будут выполняться соотношения:

$$n_E^+(D_j) \le (d_E^+(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})) + \varepsilon_3(t_j))V(t_j); \tag{10}$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{V(R)} \sum_{D_j \cap C(0, r) \neq \varnothing} \max(1, \varepsilon_3(t_j)V(t_j)) = 0. \tag{11}$$

Из (3) следует, что существует число T_2 такое, что если $s_j \ge T_2$, то $s_{j+1} - s_j \ge \varepsilon_0(s_j)s_j$. В дальнейшем будем считать, что $s_j \ge T_3 = \max(T_1, T_2, R_0)$. Пусть n_j^+ — наименьшая мера точек из E_{φ_4}, попавших в D_j, такая, что $n_E^+(D_j) - n_j^+ \le d_E^+(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}))V(t_j)$. Из (10) следует, что $0 \le n_j^+ \le \le \varepsilon_3(t_j)V(t_j)$. Выбросим в каждой области D_j эти точки. Обозначим через A множество выброшенных точек, а через B — множество всех точек, оставшихся в C_{φ_4}, так что $E_{\varphi_4} = E \cap C_{\varphi_4} = A \cup B$. Из равенства (11) следует, что множество A имеет нулевую аргументную плотность, а для множества B справедливы неравенства

$$n_B^+(D_j) \le d_E^+(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j})V(t_j). \tag{12}$$

Существует непрерывная функция $\varepsilon_4(r) \downarrow 0$ при $r \to \infty$ такая, что для меры μ_1^+ с плотностью $\rho(1 + \varepsilon_4(r))(V(r)/r)\,dr\,ds^+(\theta)$ будут справедливы неравенства

$$\mu_1^+(D_j) \ge \mu_H^+(D(1, \beta_j, \theta_{1j}, \theta_{2j}))V(t_j). \tag{13}$$

Пусть μ_2^+ — мера, плотность которой в области D_j равна $\rho\sigma_j(1 + \varepsilon_4(r))L(r)\,dr\,ds^+(\theta)$, где число σ_j определяется из равенства $\mu_2^+(D_j) = n_B^+(D_j)$. Из неравенств (12) и (13) следует, что $0 \le \sigma_j \le 1$. Поэтому мера $\mu_3^+ = \mu_1^+ - \mu_2^+$ неотрицательная, ее плотность в области D_j равна $\rho(1 - \sigma_j)(1 + \varepsilon_4(r))L(r)\,dr\,ds^+(\theta)$. Пусть при $r \ge T_4$ выполняется неравенство $\varepsilon_4(r) < 1$. В дальнейшем будем считать, что $s_m \ge T = \max(T_3, T_4)$.

Построим теперь последовательности r_n и φ_n, о которых говорится в лемме 5. Последовательность r_n разобьем на два множества $\{r_{2m-1}\}$ и $\{r_{2m,k}\}$, $k = 1, \ldots, k_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Соответственно последовательность φ_n будет представлена в виде объединения множеств $\{\varphi_{2m-1}\}$ и $\{\varphi_{2m,k}\}$, причем $\varphi_{2m-1}=1$. Пусть K_p — полукольцо из леммы 4 и для K_{p-1} числа r_n и φ_n уже выбраны; $j(p)$ — наименьшее значение j, для которого $D_j \subset K_p$, а $\tilde{r}$ — первая точка в полуинтервале $[s_p, s_{p+1})$, построенная в лемме 5; такая точка существует, так как в K_{p-1} построение проведено. Если последняя точка из $[s_{p-1}, s_p)$ имеет вид $\tilde{r}_n = r_{2(m-1)k}$, то положим $\tilde{r} = r_{2m-1}$, если же $\tilde{r}_n = r_{2m-1}$, то обозначим $\tilde{r} = r_{2m,1}$. Положим

$$\varphi_{2m,1} = \min_{z\in D_{j(p)}} \sin\arg z.$$

Затем выберем $r_{2m,2}$ и положим $\varphi_{2m,2}=\varphi_{2m,1}$. Этот процесс продолжим до точки r_{2m,k_1}, где k_1 — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $k_1\varphi_{2m,1}\ge 1$. Полученные точки отнесем к классу $\{r_{2m,k}\}_{k=1}^{k_1}$, для этих точек $\varphi_{2m,k}=\varphi_{2m,1}$, $k=1,\ldots,k_1$. После этого выберем точку r_{2m+1}. Затем — точку $r_{2(m+1),1}$ и положим $\varphi_{2(m+1),1}=\varphi_{2m,1}$. Построим класс $\{r_{2(m+1)k}\}_1^{k_1}$. Этот процесс продолжим до номера $2(m+n-1)$ так, чтобы $0\le \mu_3^+(D_{j(p)}) - nk_1\varphi_{2m,1}\le 1$. После этого перейдем к множеству $D_{j(p)+1}$ следующим образом: выбрав точку $r_{2(m+n),1}$, положим

$$\varphi_{2(m+n),1} = \min_{z\in D_{j(p)+1}} \sin\arg z.$$

Повторим описанный выше процесс. Таким образом переберем все множества $D_j \subset K_p$. Покажем, что это возможно. Действительно, из (4) следует

$$\sum_{r_n\in(s_p,s_p+1)} \varphi_n \ge (6\Delta+3)\rho \int\limits_{s_p}^{s_{p+1}} L(t)\,dt. \tag{14}$$

Обозначим через n_p^1 число точек с нечетными номерами, а через n_p^0 — число классов точек вида $\{r_{2m,k}\}$, попавших в $[s_p, s_{p+1})$. Ясно, что они отличаются друг от друга не более единицы. Так как $1\le k_i\varphi_{2m,k}\le 2$, то сумма в левой части (14) не превышает $3\max(n_p^1, n_p^0)$. Следовательно,

$$n_p^i > 2\Delta\rho \int\limits_{s_p}^{s_{p+1}} L(t)\,dt, \quad i=0,1. \tag{15}$$

Из тех же соображений получаем

$$\sum_{r_{2m,i}\in(s_p,s_p+1)} \varphi_{2m,i} > 2\Delta\rho \int\limits_{s_p}^{s_{p+1}} L(t)\,dt. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$\sum \varphi_{2(q_p+i),k} \le \mu_3^+(K_m) \le \mu_1^+(K_m),$$

где суммирование проводится по точкам одного цикла, а следовательно, из (15) и (16) следует возможность проведения цикла.

Выберем теперь точки u_l^n, $l=1,2,\ldots,l(D_n)$, в пересечении $D_n \cap \{z: |z| =$

$= r_{2(q_n+1),k}\}$ так, чтобы $0 \le \mu_3^+(D_n) - \mu_4^+(D_n) \le 1$, где μ_4^+ — неванлинновская мера, ассоциированная с точками u_l^n. Так как

$$\max_{z', z'' \in D_n} ((\sin \arg z') / (\sin \arg z'')) \le 2,$$

то, обозначив $d = d_1 / 2$, получим, что для точек u_l^n выполняются условия теоремы. Из равенства (11) следует, что мера $\mu_3^+ - \mu_2^+$ имеет нулевую аргументную плотность и, следовательно, множество $B_1 = B \cup A \cup \{u_l^n\}$ имеет аргументную плотность $d\Delta^+(\theta)$, которая в интервале $(0, \pi)$ совпадает с $ds^+(\theta)$. Пусть $\varepsilon_n \downarrow 0$. Положим $\Delta_n = s^+(\varepsilon_n, \pi - \varepsilon_n)$. Ясно, что $\Delta_n \uparrow \Delta$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\Delta - \Delta_n < 1/n$ и лучи $\arg z = \varepsilon_n$, $\arg z = \pi - \varepsilon_n$ неособые для $s^+(\theta)$. Выберем числа $R_n \uparrow \infty$ так, чтобы при $r \ge R_n$ выполнялось неравенство

$$\left| \frac{n_{B_1}^+(Y(\varepsilon_n, \pi - \varepsilon_n) \cap C(0, r))}{V(r)} - \Delta_n \right| < \frac{1}{n}.$$

Положим $C_{\varphi_5} = \cup \{Y(\varepsilon_n, \pi - \varepsilon_n) \setminus C(0, R_n)\}$. Ясно, что $\varphi_5(r)$ удовлетворяет условию (9). Обозначим через $\varphi(r) = \max(\varphi_4(r), \varphi_5(r))$, $B_2 = B_1 \cap C_\varphi$. Множество B_2 имеет аргументную плотность, непрерывную в точках 0 и π, равную $ds^+(\theta)$. Обозначим через $E_1(z)$ каноническое произведение Неванлинны множества B_2. Положим при нецелом ρ

$$E(z) = E_1(z) \exp \left\{ \frac{z^{q+1}}{\pi i} \int_1^\infty \left[\frac{h(0)}{x - z} - \frac{(-1)^{q+1} h(\pi)}{x + z} \right] \frac{V(x)\, dx}{x^{q+1}} \right\},$$

где $q = [\rho]$. Случаи целого ρ несколько сложнее и мы не будем на нем останавливаться. Заметим только, что в этом случае построение функции $E(z)$ основывается на лемме 6 и аналогично рассуждениям из [4, с. 50–52].

Теорема 4. *Пусть $\varepsilon(r)$ — функция, стремящаяся к 0 при $r \to \infty$, $A = \{a_n\}$ — счетное множество, $A \subset C^+$, $n_A^+(C(0, R)) \le \exp(\varepsilon(r) V(r))$. Тогда существует ф. в. р. р $\varphi(z)$ в $\overline{C}^+$ с индикатором $h(\theta)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ такая, что*

$$\lim_{r \to \infty} \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln |\varphi(a_n)| - h(\theta_n) \right] = 0, \quad a_n = r_n e^{i\theta_n}. \tag{17}$$

Кроме того, функция $\varphi(z)$ удовлетворяет дополнительным условиям: 1) *корни $\lambda_n = \tau_n e^{i\varphi_n}$, $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots$, функции $\varphi(z)$ простые;* 2) $\tau_{n+1} \ge \tau_n + d \operatorname{Im} \lambda_n / V(\tau_n)$ *при некотором $d > 0$;* 3) *для некоторой функции $\varepsilon_1(r) \downarrow 0$ круги $C(\lambda_n, \operatorname{Im} \lambda_n \exp(-\varepsilon_1(\tau_n) V(\tau_n)))$ не пересекаются между собой и не пересекают множества A.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon_2(r)$ — такая функция, что $\varepsilon_2(r) \downarrow 0$,

$$\varepsilon_2(r) \ge 2\varepsilon(r), \quad \varepsilon_2(r) \ge \frac{1}{\ln r}, \quad \frac{|\varepsilon_2'(r)|}{\varepsilon_2(r)} \le \frac{1}{r \ln r} \quad \text{при} \quad r \ge 2.$$

Существование функции $\varepsilon_2(r)$ следует из леммы 3. Опишем около каждой точки $a_n \in A$ круг $C(a_n, \operatorname{Im} a_n \exp(-\varepsilon_2(r_n)V(r_n)))$. В силу ограничения на множество A сумма радиусов таких кругов конечна. Пусть U — круговая проекция этих кругов на ось $(0, \infty)$. Пусть d выбрано так же, как и в теореме 3. Пусть T_1 такое, что если

$$r_1 = |z_1|; \quad r_2 = |z_2|; \quad r_1, r_2 \,\overline{\in}\, U; \quad r_1 \geq T_1; \quad r_2 \geq r_1 + d \operatorname{Im} z_1 / V(r_1),$$

то круги

$$C(z_1, \operatorname{Im} z_1 \exp(-2\varepsilon_2(r_1)V(r_1))) \quad \text{и} \quad C(z_2, \operatorname{Im} z_2 \exp(-2\varepsilon_2(r_2)V(r_2)))$$

не пересекаются между собой и не пересекают множества A. Дальше построения нужно производить так же, как и в теореме 3, считая множество E пустым. Для построенной функции $\varphi(z)$ будут выполняться все условия теоремы (в дополнительном условии 3 нужно считать $\varepsilon_1(r) = 2\varepsilon_2(r)$). При этом (17) следует из результатов работы А. Ф. Гришина [11].

Теорема 5. *Если функция $f(z)$ имеет регулярный рост относительно индикатора $h_1(\theta)$ на некотором множестве подмножества своих корней в C^+, то существует функция $\varphi(r)$, удовлетворяющая условию (2), и ф. в. р. р. $E(z)$ в $\overline{C}^+$ с индикатором $h_1(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве $E \cap C_\varphi$. Причем функция $E(z)$ удовлетворяет дополнительным условиям теоремы 3.*

Эта теорема — следствие теорем 2 и 3.

Теорема 6. *Если функция $f(z)$ имеет регулярный рост относительно индикатора $h_1(\theta)$ на некотором подмножестве E множества своих корней, причем для любого $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in Y_\varepsilon} \int_0^\delta \frac{\Phi_{E,z}(\alpha)\, d\alpha}{\alpha} = 0,$$

то существуют функция $\varphi(r)$, удовлетворяющая условию (2), и ф. в. р. р. $E(z)$ в $\overline{C}^+$ с индикатором $h_1(\theta)$, которая обращается в ноль на множестве $E \cap C_\varphi$, причем

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{z \in Y_\varepsilon} \int_0^\delta \frac{\Phi_{E(z),z}(\alpha)\, d\alpha}{\alpha} = 0.$$

Доказательство. Из теорем 2 и 3 следует существование функции $\varphi(r)$, удовлетворяющей условию (2), ф. в. р. р. $E(z)$ в $\overline{C}^+$ с индикатором $h_1(\theta)$ и множеством корней $E_1 \cup E_\varphi$, причем множество E_1 удовлетворяет условию 3 теоремы 3. Используя методы Б. Я. Левина ([1], гл. 11, § 6, теорема 5), можно доказать справедливость неравенства $\Phi^+_{E_1,z}(\alpha) \leq M\alpha$, $\alpha \in [0; 0{,}5]$, при некотором $M > 0$. Из этого неравенства, свойства 3 и леммы 7 следует заключение теоремы.

3. Одна задача кратной интерполяции. Символом $[\rho(r), h(\theta)]^+$, где $h(\theta)$ — непрерывный на отрезке $[0; \pi]$ индикатор, обозначается класс функций, аналитических в открытой полуплоскости C^+, индикатор которых относительно уточненного порядка $\rho(r)$ не превышает $h(\theta)$, $\theta \in (0; \pi)$. Через $[\rho(r), h(\theta)]^+_p$ обозначим класс ф. в. р. р. в C^+ с индикатором, равным $h(\theta)$ при $\theta \in (0; \pi)$. Пусть в C^+ задан дивизор $D = \{a_n, q_n\}$ (т. е. множество различных комплексных чисел $A = \{ a_n \}$, $a_n = r_n e^{i\theta_n} \in C^+$, вместе с их кратностями q_n, $q_n \geq 1$, — целое число, $n = 1, 2, \ldots$).

***Определение* 4.** *Дивизор* D *называется интерполяционным в классе* $[\rho(r), h(\theta)]^+$ *(в классе* $[\rho(r), h(\theta)]^+_p$, *если для любой последовательности комплексных чисел* $\{ b_{n,k} \}$, $k = 1, \ldots, q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющей условиям*

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ a_n \in Y(\alpha,\beta)}} \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \max_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} - h(\theta_n) \right] \leq 0 \tag{18}$$

для любого угла $Y(\alpha, \beta) \subset C^+$, *и*

$$\sup_n \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \max_{1 \leq k \leq q_n} \frac{|b_{n,k}| \Lambda_n^{k-1}}{(k-1)!} \right] < \infty, \tag{19}$$

где $\Lambda_n = \min(1, \operatorname{Im} a_n / 2)$, *существует функция* $F(z)$ *из класса* $[\rho(r), h(\theta)]^+$ *(из класса* $[\rho(r), h(\theta)]^+_p$) *со свойством*

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, \ldots q_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{И}$$

Условимся о таких обозначениях. Если D — дивизор, то $|D| = A = \bigcup a_n$. Включение $D \subset D' = \{ \lambda_n, p_n \}$ означает, что $|D| \subset |D'|$, и если $a_n = \lambda_n$, то $q_n \leq p_n$. Если $f(z)$ — функция, аналитическая в C^+, то через D_f обозначается дивизор ее корней.

Теорема 7. *Следующие пять утверждений эквивалентны:*

1) *дивизор* D *является интерполяционным в классе* $[\rho(r), h(\theta)]^+$;

2) *дивизор* D *является интерполяционным в классе* $[\rho(r), h(\theta)]^+_p$;

3) *существуют функция* $\varphi(r)$, *удовлетворяющая условию* (2), *и функция* $E(z)$ *из класса* $[\rho(r), h(\theta)]^+$ *такая, что* $D_E \supset (D \cap C_\varphi)$ *и функция* $E_1(z)$, *имеющая тип не выше, чем нормальный при порядке* $\rho(r)$, *такая, что* $D \subset D_{E_1}$. *Причем выполняются условия:*

$$\varlimsup_{\substack{n \to \infty \\ a_n \in C_\varphi}} \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \frac{|\gamma_{n,1}(E)|}{\Lambda_n^{q_n}} + h(\theta_n) \right] = 0, \tag{20}$$

$$\sup_n \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \frac{|\gamma_{n,1}(E_1)|}{\Lambda_n^{q_n}} \right] < \infty, \tag{21}$$

где

$$\gamma_{n,k}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{k-1} \frac{(z - a_n)^{q_n}}{f(z)} \bigg|_{z = a_n}, \quad k = 1, \ldots, q_n, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{22}$$

4) *в утверждении 3 функция* $E(z)$ *может быть выбрана из класса* $[\rho(r), h(\theta)]^+_p$;

5.1) *для любого компакта* $K \subset C^+$ *выполняются неравенства* (1);

5.2) *пусть* $\theta = \arg z$.

$$\sup_{z\in C^+} I^+(z, 1/2) = \sup_{z\in C^+} \sin\theta \int_0^{1/2} \frac{\Phi^+_{D,z}(\alpha)d\alpha}{\alpha(\alpha+\sin\theta)^2} < \infty, \tag{23}$$

$$\sup_n (q_n \ln(\operatorname{Im} a_n/\Lambda_n))/V(r_n) < \infty; \tag{24}$$

5.3) *в любом угле* $Y(\alpha, \beta) \subset C^+$ *выполняются условия*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ a_n\in Y(\alpha,\beta)}} (q_n \ln r_n)/V(r_n) = 0, \tag{25}$$

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in Y} I(z, \delta) = \lim_{\delta\to 0} \sup_{z\in Y} \int_0^{\delta} \frac{\Phi_{D,z}(\alpha)d\alpha}{\alpha} = 0. \tag{26}$$

Доказательство. Импликации $2 \Rightarrow 1$ и $4 \Rightarrow 3$ тривиальны. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 5$. $1 \Rightarrow 5.2$ и $1 \Rightarrow 5.3$ доказываются стандартными методами [6, 11]. Докажем импликацию $1 \Rightarrow 5.1$. Пусть $\overline{K} \subset C^+$. Существует $\varepsilon > 0$ такое, что $K \subset Y_\varepsilon \subset C^+$. Пусть D_j — система областей из леммы 4, построенная по функции $\varepsilon(t) = 1/\ln t$. Выберем в каждой из областей D_j, $D_j \cap Y_\varepsilon \neq \varnothing$, по точке λ_j множества A, если такие точки есть. Множество выбранных точек обозначим через Λ_ε, а через B_ε обозначим точки, оставшиеся в угле Y_ε, так что $A_\varepsilon = A \cap Y_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon \cup B_\varepsilon$. Пусть $F_\varepsilon(z)$ — функция класса $[\rho(r), h(\theta)]^+$ со свойством (И) для последовательности $b_{n,k}$, где $b_{n,k} = 0$, если $a_n \in B_\varepsilon$ или $k = 1$, $b_{n,1} = \exp[h(\arg a_n)V(|a_n|)]$ для $a_n \in \Lambda_\varepsilon$. Определим отображение T на множестве B_ε следующим образом: если $a_n \in B_\varepsilon \cap D_j$, то $T(a_n) = \lambda_j$. В силу свойств областей D_j отображение T асимптотически тождественное на бесконечности. Кроме того, $\ln|F_\varepsilon(z)| = h(\arg z)V(|z|)$ при $z \in T(B_\varepsilon)$. Таким образом, множество B_ε — есть м. р. р. функции $F_\varepsilon(z)$ относительно индикатора $h(\theta)$ в C^+. Функция $F_\varepsilon(z)$ обращается в ноль на дивизоре D_{B_ε}. Тогда по теореме 2 $d_{D_{B_\varepsilon}}(K) \le \mu_H(K)$. В силу определения множества A, условия (25), определения $\varepsilon(t)$ и свойств множеств D_j получаем, что $d_{D_\varepsilon}(K) \le \mu_H(K)$. Так как $d_{D_\varepsilon}(K) = d_D(K)$, то справедливость 5.1 доказана. Докажем импликацию $5 \Rightarrow 4$. Из теоремы 3 и леммы 7 следует, что если выполнены условия 5.1 и 5.3, то существует ф. в. р. р. $E(z)$ в $\overline{C}^+$ с индикатором $h(\theta)$ и функция $\varphi(r)$, удовлетворяющая условию (2), такие, что $D_E \supset (D \cap C_\varphi)$ и для D_E выполняется условие 5.3. Аналогично можно показать, что из 5.2 следует существование функции $E_1(z)$ типа не выше чем нормальный при порядке $\rho(r)$, такой, что $d \subset D_{E_1}$, и дивизор D_{E_1} удовлетворяет условию 5.2. Методами работы [6] можно показать, что условие (20) выполняется в любом угле $Y_\varepsilon \subset C^+$. Пусть Y_n — возрастающая последовательность углов, исчерпывающая C^+, т. е. $Y_n \subset Y_{n+1}$ и $\bigcup_n Y_n = C^+$, а $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Выберем последовательность положительных чисел $R_n \uparrow \infty$ таких, что при $r_k \ge R_n$, $a_k \in Y_n$ модуль правой части в (20) не превышает ε_n. Положим $C_\varphi = \bigcup(Y_n \setminus C(0, R_n))$. Ясно, что функция $\varphi(r)$ удовлетворяет условию (2) и выполняется (20). То, что из

$5.2 \Rightarrow (21)$ при $q_n = 1$, $n = 1, 2, \ldots$, показано в работе [12]. То же доказательство справедливо, если q_n удовлетворяют условию (24). Докажем импликацию $4 \Rightarrow 2$. Следующая лемма получена А. М. Руссаковским [13].

Лемма 8. *Если дивизор* D_{E_1} *удовлетворяет условию* (21), *то*

$$\sup_n \left[\frac{1}{V(r_n)} \ln \max_{1 \le k \le q_n} \frac{\left|\gamma_{n,k}(E_1)\right|}{\Lambda_n^{q_n - k + 1}} \right] < \infty. \tag{27}$$

Из условия (21), используя идеи работы [14, с. 243], нетрудно получить полезное неравенство

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} a_n q_n \operatorname{Im} a_k}{|a_n - \overline{a}_k|^2 r_k^{\rho+1}} < \infty. \tag{28}$$

Пусть, далее, последовательность $\{b_{n,k}\}$ удовлетворяет условию (19). Положим

$$\alpha_{n,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=0}^{q_n - m} \frac{1}{i!} b_{n, q_n + 1 - m - i} b_{n, i+1},$$

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1 + a_k z) q_k \operatorname{Im} a_k}{(\overline{a}_k - z) i r_k^{[\rho]+3}}.$$

Ряд, определяющий функции $\alpha_n(z)$, сходится равномерно на каждом компакте в C^+. Перенумеровав, если есть необходимость, точки a_n, можно считать, что $\operatorname{Im} a_n / r_n^2 \ge \operatorname{Im} a_{n+1} / r_{n+1}^2$. Отсюда и из (28) получаем

$$\sup_n \operatorname{Re} \alpha_n(a_n) < \infty,$$

$$\operatorname{Re} \alpha_n(z) \ge \sum_{k=n}^{\infty} \frac{q_k (\operatorname{Im} a_k)^2}{r_k^{[\rho]+3} |z - \overline{a}_k|^2}.$$

Положим далее

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{n,m} \left[\frac{1}{z - a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{s_n} \varphi_n(z) \right]^{m-1},$$

где выбор натуральных чисел s_n будет осуществлен ниже, а

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{z \overline{a}_n}{r_n^2}\right)^{[\rho]+3} \left(\frac{2 \operatorname{Im} a_n}{z - \overline{a}_n}\right)^2 \exp[\alpha_n(a_n) - \alpha_n(z)].$$

Непосредственной проверкой (см., например, [15]) доказывается, что функция $f(z) = \sum E_1(z) P_n(z)$ решает задачу (II). Методами работ [13, 14] можно показать, что $f(z)$ имеет тип не выше чем нормальный при порядке $\rho(r)$, если выбрать подходящим образом числа s_n. Из результатов работы [13] следует, что справедливо условие 1 теоремы 7. Пусть $f_1(z)$ — интерполирующая функция, о существовании которой говорится в этом условии. Возьмем последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$, $\varepsilon_1 = \pi/6$. Положим

$$\psi_n(r) = \sup\{|f_1(z) E^{-1}(z)|;\ |z| = r,\ \arg z \in [\varepsilon_n, \pi - \varepsilon_n]\}.$$

Из свойств функций $f_1(z)$ и $E(z)$ следует, что

$$\lim_{\substack{r \to \infty \\ z \overline{\in} E_n}} \ln^+ \psi_n(r) / V(r) = 0,$$

где E_n — множество нулевой относительной меры. Определим последовательность $R_n \uparrow \infty$ таким образом, что при $r \geq R_n$, $z \overline{\in} E_n$, $\ln^+ \psi_n(r)/V(r) \leq \leq 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$G = \bigcup_n \{z: \arg z < \varepsilon_n, \arg z > \pi - \varepsilon_n, |z| \leq R_{n+1}\}.$$

Определим функцию $\psi(r) = \exp[2^{-n} V(r)]$, если $R_n \leq r \leq R_{n+1}$. Пусть $\rho_1(r)$ — такой уточненный порядок, что

$$\lim_{r \to \infty} \ln^+ \psi(r) / V_1(r) = 0, \quad \lim_{r \to \infty} V_1(r) / V(r) = 0,$$

и $\varphi(z)$ — целая ф. в. р. р. с индикатором 1 относительно порядка $\rho_1(r)$. В силу изложенного выше, если $z \overline{\in} E_0 = \bigcup_n E_n$ и $|z| \to \infty$, то отношение $f_1(z)/[\varphi(z) E(z)]$ стремится к нулю. Заметим, что пересечение множества E_0 с любым внутренним углом полуплоскости C^+ имеет нулевую относительную меру. Функция $\varphi(z) E(z)$ — ф. в. р. р. в C^+ с индикатором $H(\theta)$ относительно порядка $\rho(r)$. Следовательно, такой же является функция $F(z) = f_1(z) + \varphi(z) E(z)$. Функция $F(z)$ имеет свойство (Н). Импликация 4) $\Rightarrow$ 2) доказана. Аналогично доказывается 3) $\Rightarrow$ 1).

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
2. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
3. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1983. – Вып. 40. – С. 36–47.
4. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. 2 // Там же. – 1984. – Вып. 41. – С. 39–55.
5. *Гришин А. Ф.* О множествах регулярного роста целых функций. 3 // Там же. – 1984. – Вып. 42. – С. 32–46.
6. *Гришин А. Ф., Руссаковский А. М.* Свободная интерполяция целыми функциями // Там же. – 1985. – Вып. 44. – 32–42.
7. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционная задача в пространствах целых функций конечного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1976. – **40**, № 5. – С. 1102–1127.
8. *Братищев А. В.* Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций // Сиб. мат. журн. – 1976. – **17**, № 1. – С. 30–43.
9. *Руссаковский А. М.* Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости и имеющих индикатор не выше данного // Докл. АН СССР. – 1983. – **269**, № 4. – С. 814–817.
10. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 516 с.
11. *Гришин А. Ф.* О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функцион. анализ и его прил. – 1968. – Вып. 7. – С. 59–84.
12. *Мальютин К. Г.* Интерполяция голоморфными функциями: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Харьков, 1980. – 104 с.
13. *Руссаковский А. М.* Задача кратной интерполяции в классе функций, аналитических в полуплоскости, и имеющих индикатор не выше данного. – М., 1982. – 64 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 5087.
14. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
15. *Нгуен Тхыонг Уен.* Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1979. – Вып. 31. – С. 119–129.

Получено 09.10.92