УДК 517. 928. 4

Т. А. Мельник, канд. физ.-мат. наук (Одес. инж.-строит. ин-т)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ НЕКОТОРОЙ РАЗРЫВНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ*

We construct an asymptotic expansion of a solution of the Cauchy problem for singularly perturbed system of differential equations with a right-hand side discontinuous on a surface. We examine the case of crossing the surface of discontinuity. The remainder of a constructed asymptotic expansion is estimated.

Побудовано асимптотичний розклад розв'язку задачі Коші для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з правою частиною, розривною на певній поверхні. Розглядається випадок перерізу поверхні розриву. Для побудованого асимптотичного зображення одержана оцінка залишкового члена.

Многочисленные приложения в механике, применение необходимых условий оптимальности в задачах управления вызывают необходимость исследования сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для приближенного решения уравнений с непрерывной правой частью разработаны различные асимптотические методы (см., например, [1, 2]).

Предельные свойства решений разрывных сингулярно возмущенных систем, возникающих в задачах управления, были установлены в [3]. В [4] обоснована асимптотика решения краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с кусочно-гладкими коэффициентами. Наиболее часто на практике встречается случай, когда множество точек разрыва правых частей дифференциальных уравнений принадлежит некоторой поверхности [5]. В [6] изучен случай скользящего режима для систем сингулярно возмущенных уравнений с правой частью, разрывной на некоторой поверхности.

В настоящей работе строится асимптотическое разложение решения такой задачи для случая пересечения поверхности разрыва.

Рассмотрим на конечном промежутке $I = [0, T]$ сингулярно возмущенную задачу Коши

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z, y, t), \tag{1}$$

$$z(0, \mu) = Z(\mu), \quad y(0, \mu) = Y(\mu), \tag{2}$$

где

$$F(z, y, t) = \begin{cases} F^{+1}(z, y, t), & \Phi(z, y, t) \geq 0, \\ F^{-1}(z, y, t), & \Phi(z, y, t) < 0, \end{cases}$$
$$f(z, y, t) = \begin{cases} f^{+1}(z, y, t), & \Phi(z, y, t) \geq 0, \\ f^{-1}(z, y, t), & \Phi(z, y, t) < 0, \end{cases} \tag{3}$$

$\mu > 0$ — малый параметр; z и F — M-мерные вектор-функции; y и f — m-мерные вектор-функции; Φ — скалярная функция; $\Gamma = \{(z, y, t) \mid \Phi(z, y, t) = 0\}$ — поверхность переключения. Решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (1) – (3) на сегменте I рассматривается в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнению (1) почти всюду на множестве I, значения которых при $t = 0$ определяются асимптотическими рядами

$$Z(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \overline{Z}_l^0, \quad Y(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \overline{Y}_l^0. \tag{4}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологии.

Асимптотическое разложение решения задачи Коши (1) – (3) строится при дополнительных условиях, налагаемых на вспомогательные задачи: вырожденную задачу и задачи Коши для пограничных функций. Соответствующая вырожденная задача Коши имеет вид

$$0 = F(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \quad \frac{d\bar{y}_0}{dt} = f(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t), \quad \bar{y}_0(0) = \bar{Y}_0^0. \tag{5}$$

Решение $\bar{z}_0(t)$ задачи (5) на сегменте I рассматривается в классе кусочно-непрерывных функций, а решение $\bar{y}_0(t)$ — в классе абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих уравнениям системы (5) почти всюду на I. Рассматриваются следующие задачи Коши для пограничных функций:

$$\frac{d\Pi_0 z^j}{d\tau_0^j} = F(\tilde{Z}_0^j + \Pi_0 z^j, \tilde{Y}_0^j, t_0^j), \quad \Pi_0 z^j(0) = \bar{Z}_0^j - \tilde{Z}_0^j, \quad j = \overline{0, 1}, \tag{6}$$

где $\tau_0^j = (t - t_0^j)/\mu$; $\tilde{X}_0^j = \bar{x}_0(t_0^j + 0)$; $\bar{X}_0^1 = \bar{x}_0(t_0^1 - 0)$; $t_0^0 = 0$; t_0^1 — момент времени, для которого справедливо предельное равенство

$$\lim_{t \to t_0^1 - 0} \Phi(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t) = 0. \tag{7}$$

Пограничные функции $\Pi_0 z^j(\tau_0^j)$, $j = \overline{0, 1}$, корректируют решение $\bar{z}_0(t)$ вырожденной задачи в зонах пограничных слоев. Пограничный слой в данной задаче возникает не только в окрестности начальной точки $t^0 = 0$, но и в окрестности момента времени $t^1(\mu)$, в который решение $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ задачи (1), (2) пересекает поверхность Γ.

Пусть выполняются следующие условия:

1) Функции $F^{\pm 1}$, $f^{\pm 1}$, Φ $n + 2$ раз непрерывно дифференцируемы в некоторой открытой области $Q \subset R^{M+m+1}$.

2) Уравнения $F^{\pm 1}(z, y, t) = 0$ имеют $n + 2$ раз непрерывно дифференцируемые изолированные решения $z = \varphi^{\pm 1}(y, t)$ на непустом компактном множестве $Q_1 \subset R^{m+1}$, и точка $(\varphi^{\pm 1}(y, t), y, t) \in Q$, если $(y, t) \in Q_1$.

Введем обозначения

$$x = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}, \quad \varphi(y, t) = \begin{cases} \varphi^{+1}(y, t), & \Phi(\varphi^{+1}(y, t), y, t) \geq 0, \\ \varphi^{-1}(y, t), & \Phi(\varphi^{-1}(y, t), y, t) < 0. \end{cases}$$

3) Вырожденная задача (5) на промежутке I имеет решение $\bar{y}_0(t)$, $\bar{z}_0(t) = \varphi(\bar{y}_0(t), t)$ такое, что точка $(\bar{y}_0(t), t) \in \operatorname{int} Q_1$, и существует момент времени $t_0^1 \in \operatorname{int} I$, при котором выполняется предельное равенство (7) и соотношения:

а) $$\Phi(\bar{z}_0(\xi), \bar{y}_0(\xi), \xi)\, \Phi(\bar{z}_0(\eta), \bar{y}_0(\eta), \eta) < 0$$

при $\xi \in [0, t_0^1)$, $\eta \in (t_0^1, T]$.

б) $$\lim_{t \to t_0^1 - 0} \frac{d\Phi(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)}{dt} = \alpha \neq 0.$$

в) $$\Phi(\bar{Z}_0^0, \bar{Y}_0^0, 0)\, \Phi(\bar{z}_0(0), \bar{y}_0(0), 0) > 0.$$

4) Собственные значения $\bar{\lambda}_k(t)$ матрицы $F_z(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$ при $t \in I$ удовлетворяют неравенствам $\operatorname{Re} \bar{\lambda}_k(t) < 0$, $k = \overline{1, M}$.

5) Решения $\Pi_0 z^j(\tau_0^j)$ задач (6) при $j = \overline{0, 1}$ отвечают условиям:

а) точки $(\bar{z}_0(t_0^j + 0) + \Pi_0 z^j(\tau_0^j), \bar{y}_0(t_0^j), t_0^j) \in Q$ при $\tau_0^j \geq 0$;

б) $\lim\limits_{\tau_0^j \to +\infty} \Pi_0 z^j(\tau_0^j) = 0$;

в) существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $t \in (t_0^j, t_0^j + \varepsilon_0]$

$$\alpha \lim_{\mu \to 0} \frac{d}{dt} \Phi\left(\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z^j\left(\frac{t - t_0^j}{\mu}\right), \bar{y}_0(t), t \right) > 0.$$

В рамках этих ограничений докажем, что решение $x(t, \mu)$ задачи (1), (2) при достаточно малых значениях параметра μ пересекает поверхность Γ в единственной точке $t^1(\mu)$ промежутка I. Построим асимптотику решения $x(t, \mu)$ исходной задачи (1) – (3) на основе асимптотического представления решений следующих непрерывных вспомогательных задач:

$$\mu \frac{dz^0}{dt} = F^{\sigma}(z^0, y^0, t), \quad \frac{dy^0}{dt} = f^{\sigma}(z^0, y^0, t),$$
$$z^0(0, \mu) = Z(\mu), \quad y^0(0, \mu) = Y(\mu), \tag{8}$$

здесь $\sigma = \operatorname{sgn} \Phi(\overline{Z}_0^0, \overline{Y}_0^0, 0)$, и

$$\mu \frac{dz^1}{dt} = F^{-\sigma}(z^1, y^1, t), \quad \frac{dy^1}{dt} = f^{-\sigma}(z^1, y^1, t),$$
$$z^1(t^1, \mu) = z^0(t^1, \mu), \quad y^1(t^1, \mu) = y^0(t^1, \mu). \tag{9}$$

Для момента времени $t = t^1(\mu)$ справедливо равенство

$$\Phi(z^0(t^1, \mu), y^0(t^1, \mu), t^1) = 0. \tag{10}$$

Асимптотическое разложение решений $x^j(t, \mu)$, $j = \overline{0, 1}$, задач (8), (9) строится методом пограничных функций А. Б. Васильевой [7] в виде суммы регулярного и пограничного рядов, т. е.

$$x^j(t, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \bar{x}_l^j(t) + \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \Pi_l x^j(\tau^j), \tag{11}$$

где $\tau^j = (t - t^j)/\mu$, $t^0 = t_0^0 = 0$. Точка, в которой решение $x^0(t, \mu)$ задачи (8) попадает на поверхность Γ, определяется из уравнения (10) в виде степенного ряда

$$x^1(t^1, \mu) = x^0(t^1, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \overline{X}_l^1, \quad t^1(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l t_l^1. \tag{12}$$

Эта точка является также начальной точкой для сингулярно возмущенной задачи (9). Введем замену переменных $t = \tilde{t}\, t^1(\mu) / t_0^1$. Получим следующую сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$\mu \frac{d\tilde{z}^1}{d\tilde{t}} = \frac{t^1(\mu)}{t_0^1} F^{-\sigma}\left(\tilde{z}^1, \tilde{y}^1, \frac{\tilde{t}\, t^1}{t_0^1} \right), \quad \tilde{z}^1(t_0^1, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \tilde{Z}_l^1,$$
$$\frac{d\tilde{y}^1}{d\tilde{t}} = \frac{t^1(\mu)}{t_0^1} f^{-\sigma}\left(\tilde{z}^1, \tilde{y}^1, \frac{\tilde{t}\, t^1}{t_0^1} \right), \quad \tilde{y}^1(t_0^1, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l \tilde{Y}_l^1. \tag{13}$$

По методу пограничных функций [7] строится асимптотика решения $\tilde{x}^1(\tilde{t},\mu)$, а затем из равенства $x^1(t,\mu) = \tilde{x}^1(\tilde{t},\mu)$ находятся коэффициенты степенного ряда (11). Через $X_n^j(t,\mu,\tau^j)$ обозначим n-ю частичную сумму ряда (11) и введем функции

$$X_n(t,\mu) = \begin{cases} X_n^0(t,\mu,\tau_n^0), & 0 \le t < T_n^1(\mu), \quad \tau_n^0 = \dfrac{t}{\mu} \ge 0, \\ X_n^1(t,\mu,\tau_n^1), & T_n^1(\mu) \le t \le T, \quad \tau_n^1 = \dfrac{t - T_n^1}{\mu} \ge 0, \end{cases} \tag{14}$$

$$T_n^1(\mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l t_l^1. \tag{15}$$

При $n = 0$ вектор-функция $Y_0(t,\mu)$ совпадает с функцией $\bar{y}_0(t)$ на промежутке I, а $Z_0(t,\mu)$ — с $\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z^0(\tau^0)$ для $t \in [0, t_0^1)$ и $\bar{z}_0(t) + \Pi_0 z^1(\tau_0^1)$ для $t \in [t_0^1, T]$. Норму $\|\cdot\|$ произвольного вектора определим как максимумы модулей его компонент. Через C будем обозначать не зависящие от μ постоянные, вообще говоря, разные. Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1 – 5. *Тогда существуют постоянные* $\mu_0 > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ *такие, что при* $\mu \in (0,\mu_0]$ *решение* $x(t,\mu)$ *задачи* (1) – (3) *существует и единственно. Для этого решения справедливо асимптотическое представление* (14) *и оценки*

$$\begin{gathered} \|y(t,\mu) - Y_n(t,\mu)\| \le C\mu^{n+1}, \\ \|z(t,\mu) - Z_n(t,\mu)\| \le C\mu^{n+1}(1 + \alpha_n(t,\mu)), \end{gathered} \tag{16}$$

где для любого произвольного $\xi^1 \in [T_n^1 - C\mu^{n+1}, T_n^1 + C\mu^{n+1}]$

$$\alpha_n(t,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu}\exp\left(-\kappa\dfrac{t-\xi^1}{\mu}\right), & t \ge \xi^1, \\ 0, & t < \xi^1. \end{cases}$$

Причем решение $x(t,\mu)$ *пересекает поверхность* Γ *в единственный момент времени* $t^1(\mu) \in I$, *для которого справедливо асимптотическое представление* (15) *и выполняется неравенство*

$$|t^1(\mu) - T_n^1(\mu)| \le C\mu^{n+1}. \tag{17}$$

Доказательство. Решение $\bar{x}_0(t)$ вырожденной задачи (5) на сегменте I существует и удовлетворяет условию $(\bar{x}_0(t), t) \in \dot{Q}$. Для всех $t \in [0, t_0^1)$ точки $(\bar{x}_0(t), t)$ лежат во внутренности полупространства, определенного поверхностью Γ. Функция $\bar{x}_0(t)$ при $t \in [0, t_0^1)$ совпадает с решением $\bar{x}_0^0(t)$ вырожденной задачи, соответствующей непрерывной сингулярно возмущенной задаче (8). Следовательно, можно указать такое $\delta_0 > 0$, при котором для функции F^σ и f^σ условия (1), (2) выполняются в δ_0-окрестности точки $(\bar{x}_0^0(t_0^1), t_0^1) \in \operatorname{int} Q$. Тогда решение $\bar{x}_0^0(t)$ существует и на промежутке $[t_0^1, t_0^1 + \delta_0]$. Величину $\delta_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы вспомогательная задача (8) на сегменте $[0, t_0^1 + \delta_0]$ удовлетворяла всем условиям теоремы из [7, с. 55] об асимптотическом разложения решения задачи Коши для системы сингулярно возмущенных уравнений с непрерывной правой частью. В силу этой теоремы заключаем, что для некоторых $C > 0$, $\mu_0 > 0$ решение $x^0(t, \mu)$ при $\mu \in (0, \mu_0]$ на промежутке $[0, t_0^1 + \delta_0]$ существует, единственно и удовлетворяет оценкам

$$\| x^0(t, \mu) - X_n^0(t, \mu) \| \le C \mu^{n+1},$$
$$\| \Pi_l^0 x^0(\tau^0) \| \le C \exp(-\kappa \tau^0), \quad \tau^0 \ge 0, \quad \kappa > 0, \quad l = 0, 1, \ldots . \tag{18}$$

Отсюда и из требования 3 вытекает возможность указать такое $\mu_0 > 0$, что при всех $\mu \in (0, \mu_0]$ существует момент времени $t^1(\mu)$, для которого $\Phi(z^0(t^1(\mu), \mu), y^0(t^1(\mu), \mu), t^1(\mu)) = 0$, и для его асимптотического представления (15) справедлива оценка (17). Из условий 3 и 5 и неравенства (18) следует, что решение $x^0(t, \mu)$ задачи (8) при $\mu \in (0, \mu_0]$ пересекает поверхность Γ в единственной точке промежутка $[0, t^1]$. Примем за решение задачи (1) – (3) на отрезке $[t^1, T]$ функцию $x^1(t, \mu)$. Покажем, что функция

$$x(t, \mu) = \begin{cases} x^0(t, \mu), & t \in [0, t^1], \\ x^1(t, \mu), & t \in [t^1, T] \end{cases}$$

является решением задачи (1) – (3) при $t \in [0, T]$. Очевидно, для $\mu \in (0, \mu_0]$, $t \in I_0 = [0, \min\{t^1, T_n^1\}]$ выполняются оценки (16) и (17). Из условия 3 вытекает, что на промежутке $(t_0^1, T]$ точки $(\bar{x}_0(t), t) \in Q$ попадают во внутренность другого полупространства, определенного поверхностью Γ. Решение $\tilde{x}_0^1(\tilde{t})$ вырожденной задачи, соответствующей сингулярно возмущенной задаче (13), совпадает с функцией $\bar{x}_0(\tilde{t})$ при $\tilde{t} \in (t_0^1, T]$. Найдется такое $\delta_0 > 0$, что решение $\tilde{x}_0^1(\tilde{t})$ можно продолжить на сегменте $[t_0^1 - \delta_0, T + \delta_0]$ так, чтобы для решения $\tilde{x}^1(\tilde{t}, \mu)$ задачи (13) выполнялись все условия теоремы [7, с. 55]. Поэтому можно указать такие $\mu_0 > 0$ и $C > 0$, что при $\mu \in (0, \mu_0]$ и $t \in [t_0^1 - \delta_0, T + \delta_0]$ решение $\tilde{x}^1(\tilde{t}, \mu)$ задачи (13) существует, единственно и отвечает неравенству

$$\| \tilde{x}^1(\tilde{t}, \mu) - \tilde{X}_n^1(\tilde{t}, \mu, \tilde{\tau}_0^1) \| \le C \mu^{n+1}, \quad \tilde{\tau}_0^1 = \frac{\tilde{t} - t_0^1}{\mu} \ge 0.$$

Тогда при $\mu \in (0, \mu_0]$ и $t \in [t^1(\mu), T]$ заключаем, что

$$\| x^1(t, \mu) - X_n^1(t, \mu, \tau^1) \| \le \| \tilde{x}^1(\tilde{t}, \mu) - \tilde{X}_n^1(\tilde{t}, \mu, \tilde{\tau}_0^1) \| +$$
$$+ \| \tilde{X}_n^1(\tilde{t}, \mu, \tilde{\tau}_0^1) - X_n^1(t, \mu, \tau^1) \| \le C \mu^{n+1}, \tag{19}$$
$$\| \Pi_0 x^1(\tau^1) \| \le \| \Pi_0 \tilde{x}^1(\tilde{\tau}_0^1) \| \le C \exp\left(-\frac{\kappa}{\mu} \left(\frac{t t_0^1}{t^1} - t_0^1 \right) \right) \le C \exp(-\kappa \tau^1).$$

Из условия 3, неравенства (18), условия 5 и неравенства (19) следует, что при $\mu \in (0, \mu_0]$ справедливы оценки

$$\left\| \frac{dS^0(t, \mu)}{dt} \bigg|_{t = t^1 - 0} - \frac{d\bar{S}^0(t)}{dt} \bigg|_{t = t_0^1 - 0} \right\| \le C \mu,$$

$$\left\| \frac{dS^1(t,\mu)}{dt}\bigg|_{t=t^1+0} - \frac{dS_0^1(t,\mu)}{dt}\bigg|_{t=t_0^1+0} \right\| \le C\mu +$$

$$+ \frac{1}{\mu}\left\| \frac{\partial S^1(t,\mu)}{\partial z}\bigg|_{t=t^1+0} - \frac{\partial S_0^1(t,\mu)}{\partial z}\bigg|_{t=t_0^1+0} \right\|,$$

$$\left\| \frac{\partial S^1(t,\mu)}{\partial z}\bigg|_{t=t^1+0} - \frac{\partial S_0^1(t,\mu)}{\partial z}\bigg|_{t=t_0^1+0} \right\| \le C\mu,$$

где

$$S^j(t,\mu) \equiv \Phi(z^j(t,\mu), y^j(t,\mu), t), \quad \overline{S}^j(t) \equiv \Phi(\overline{z}_0^j(t), \overline{y}_0^j(t), t),$$

$$S_0^j(t,\mu) \equiv \Phi(Z_0^j(t,\mu,\tau_0^j), Y_0^j(t,\mu,\tau_0^j), t).$$

В силу условий 5в и 3б следует, что при $\mu \in (0, \mu_0]$ знаки производной функции Φ на решении $x^0(t,\mu)$ задачи (8) слева от точки t^1 и на решении $x^1(t,\mu)$ задачи (9) справа от точки t^1 совпадают. В силу условия 5 функция $x(t,\mu)$ не пересекает Γ в зоне пограничных слоев, а в силу условия 3 не пересекает Γ и в остальных точках промежутка $I \setminus \{t^1\}$. Таким образом, абсолютно непрерывная функция $x(t,\mu)$ удовлетворяет начальному условию (2) и системе уравнений (1), (3) при $t \in I \setminus \{t^1(\mu)\}$, т. е. почти всюду. Кроме того, в точке $t^1(\mu) \in I$ выполняется достаточное условие [5, с. 42] строгого пересечения поверхности Γ, в силу чего функция $x(t,\mu)$ является решением задачи (1) – (3). Осталось доказать справедливость неравенства (16) на промежутках $I_1 = [\eta^1, T]$ и $I_2 = [\xi^1, \eta^1]$, где $\xi^1 = \min\{t^1, T_n^1\}$, $\eta^1 = \max\{t^1, T_n^1\}$. При $\mu \in (0, \mu_0]$ и $t \in I_1$ оценим величину

$$\| x(t,\mu) - X_n(t,\mu) \| = \| x^1(t,\mu) - X_n^1(t,\mu,\tau^1) \| \le$$

$$\le \| x^1(t,\mu) - X_n^1(t,\mu,\tau^1) \| + \| X_n^1(t,\mu,\tau^1) - X_n^1(t,\mu,\tau_n^1) \| \le$$

$$\le \| x^1(t,\mu) - X_n^1(t,\mu,\tau^1) \| + \sum_{l=0}^{n} \mu^l \| \Pi_l x^1(\tau^1) - \Pi_l x^1(\tau_n^1) \|.$$

Из последнего соотношения в силу оценки (17) и того, что $\Pi_0 y(\tau_n^1) \equiv 0$, $\Pi_0 y(\tau^1) \equiv 0$ при $\tau_n^1 \ge 0$, $\tau^1 \ge 0$, а $|\tau^1 - \tau_n^1| \le C\mu^n$, получаем, что для $\mu \in (0, \mu_0]$ и $t \in I_1$ выполняется неравенство (16). Докажем оценку (16) на промежутке I_2. При $t \in I_2$ справедливы соотношения $x(t,\mu) = x^j(t,\mu)$, $X_n(t,\mu) = X_n^i(t,\mu,\tau_n^i)$, где $i \ne j$, $i, j = \overline{0,1}$. В силу оценок (17) – (19) при $\mu \in (0, \mu_0]$ и $t \in I_2$ можно записать

$$\| x(t,\mu) - X_n(t,\mu) \| \le \| x^j(t,\mu) - X_n^j(t,\mu,\tau^j) \| +$$

$$+ \| X_n^j(t,\mu,\tau^j) - X_n^i(t,\mu,\tau_n^i) \| \le C\mu^{n+1} +$$

$$+ \left\| X_n^j\left(t,\mu,\frac{t-t^j}{\mu}\right) - X_n^j\left(T_n^1,\mu,\frac{T_n^1 - T_n^j}{\mu}\right) \right\| +$$

$$+ \left\| X_n^i\left(T_n^1,\mu,\frac{T_n^1 - T_n^i}{\mu}\right) - X_n^i\left(t,\mu,\frac{t-T_n^i}{\mu}\right) \right\| +$$

$$+ \left\| X_n^i\left(T_n^1, \mu, \frac{T_n^1 - T_n^i}{\mu}\right) - X_n^j\left(T_n^1, \mu, \frac{T_n^1 - T_n^j}{\mu}\right) \right\| \le$$

$$\le C\mu^{n+1} + C\mu^n \exp\left(-\kappa \frac{t - \xi^1}{\mu}\right),$$

$$|\xi^1 - T_n^1| \le C\mu^{n+1}.$$

Таким образом, неравенство (16) справедливо на всем промежутке для достаточно малых $\mu \in (0, \mu_0]$ и не изменится, если в качестве ξ^1 взять любую точку из $[T_n^1 - C\mu^{n+1}, T_n^1 + C\mu^{n+1}]$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Пусть выполняются условия 1 – 5. Тогда расстояние по Хаусдорфу между графиком $L(I, \mu)$ решения $x(t, \mu)$ задачи (1) – (3) и графиком $L_n(I, \mu)$ приближения $X_n(t, \mu)$ на промежутке I не превышает величины $C\mu^{n+1}$ при $\mu \in (0, \mu_0]$.

Легко показать, что для каждой точки множества $L(I, \mu) = \{(x, t) | x = x(t, \mu), t \in I\}$ можно указать точку множества $L_n(I, \mu) = \{(x, t) | x = X_n(t, \mu), t \in I\}$, отличающуюся на величину $C\mu^{n+1}$ при $\mu \in (0, \mu_0]$, и наоборот.

2. Если в асимптотическое приближение $Z_n(t, \mu)$ не включать последние члены $\Pi_n z^j(\tau_n^j)$ пограничного ряда, то оценка (16) выполняется при

$$\alpha_n(t, \mu) = \sum_{j=0}^{1} \frac{1}{\mu} H(t, \xi^j) \exp\left(-\kappa \frac{t - \xi^j}{\mu}\right), \tag{20}$$

где

$$\xi^0 = 0, \quad H(t, \xi^j) = \begin{cases} 0, & t < \xi^j, \\ 1, & t \ge \xi^j. \end{cases}$$

Причем каждое слагаемое в правой части представления (20) является дельтообразной функцией с сингулярностью в нуле [3]. Справедливость этого вытекает из соответствующей оценки для пограничных функций.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* К вопросу об асимптотических разложениях нелинейной механики // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 1. – С. 42 – 53.
2. *Тихонов А. Н.* Методы малого параметра и их применение // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 10. – С. 1659 – 1661.
3. *Дмитриев М. Г.* Сингулярные возмущения в задачах оптимального управления: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Красноярск, 1983. – 274 с.
4. *Сушко В. Г.* Асимптотика по малому параметру для решения одного дифференциального уравнения с разрывными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Вычислит. математика и кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 3 – 8.
5. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
6. *Уткин В. И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, 1981. – 386 с.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.

Получено 15.12.92