УДК 517. 937

В. М. Горбачук, канд. фіз.-мат. наук (Київ. політехн. ін-т)

ПРО ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ДІРІХЛЕ ТА НЕЙМАНА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ НА ПІВОСІ

For a second-order differential equation of elliptic type in a Banach space, a description of all solutions of homogeneous Dirichlet and Neumann problems is given and conditions of their unique solvability are found.

Для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу в банаховому просторі описано всі розв'язки однорідних задач Діріхле та Неймана і знайдено умови їх однозначної розв'язності.

1. Розглянемо рівняння

$$y''(t) - A\,y(t) = 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

де A — позитивний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$. Це означає, що $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{B}$ ($\mathcal{D}(\cdot)$ — область визначення оператора), резольвентна множина A містить $(-\infty, 0]$ і виконується нерівність

$$\|(A+\lambda I)^{-1}\| \le \frac{M}{1+\lambda}, \quad \lambda > 0. \quad 0 < M = \text{const}. \tag{2}$$

Для позитивного A існують φ: $0<\varphi<\pi$ і $M(\varphi) > 0$ такі, що оцінка (2) з $M(\varphi)$ та $|\lambda|$ замість M та λ відповідно здійснюється в секторі $\{\lambda: \varphi \le |\arg \lambda| \le \pi\}$ [1]. Позначимо через ω точну нижню межу цих φ. Пара (ω, M) називається типом оператора A. Якщо A позитивний, то можна визначити його дробовий степінь A^{α}, $0 \le \alpha \le 1$, який є також позитивним оператором з типом $(\alpha\omega, M)$. За умови $\omega < \pi/2$ оператор $-A$ генерує обмежену голоморфну півгрупу лінійних операторів на $\mathfrak{B}$ [1, 2]. Це зумовлює той факт, що $-\sqrt{A}$ є генератором обмеженої голоморфної півгрупи. Позначимо цю півгрупу через $U(t)$. Покладемо

$$\mathfrak{B}_{-}(\sqrt{A}) = \lim_{t\to 0_+} \operatorname{ind} \mathfrak{B}_{-t}(\sqrt{A}),$$

де $\mathfrak{B}_{-t}(\sqrt{A})$ — поповнення $\mathfrak{B}$ за нормою $\|f\|_{-t} = \|U(t)f\|$, $f \in \mathfrak{B}$ ($\|\cdot\|$ — норма в $\mathfrak{B}$). Як показано в [3], півгрупа $U(t)$ допускає розширення $\hat{U}(t)$ до одностайно неперервної півгрупи $\hat{U}(t)$ класу C_0 на локально опуклому топологічному просторі $\mathfrak{B}_{-}(\sqrt{A})$. Її генератором є розширення за неперервністю оператора $-\sqrt{A}$ в простір $\mathfrak{B}_{-}(\sqrt{A})$. Якщо $t > 0$, $f \in \mathfrak{B}_{-t}(\sqrt{A})$, то $\hat{U}(t) f \in \mathcal{D}(A)$.

Нехай B ($\overline{\mathcal{D}(B)} = \mathfrak{B}$) — замкнений лінійний оператор в $\mathfrak{B}$ і

$$C_{\alpha}\langle n!\rangle(B) = \left\{ f \in \bigcap_{n\in N_0} \mathcal{D}(B^n) \,\middle|\, \exists\, c > 0: \left\|B^k f\right\| \le c\alpha^k k!, \ \ \forall k \in N_0 \right\},$$

де $\alpha > 0$, $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Простір $C_{\alpha}\langle n!\rangle(B)$ банаховий щодо норми

$$\|f\|_{C_{\alpha}\langle n!\rangle(B)} = \sup_{n\in N_0} \frac{\left\|B^n f\right\|}{\alpha^n n!}.$$

Введемо на множинах

$$C_{\{n!\}}(B) = \bigcup_{\alpha>0} C_\alpha\langle n!\rangle(B) \quad \text{та} \quad C_{(n!)}(B) = \bigcap_{\alpha>0} C_\alpha\langle n!\rangle(B)$$

топології індуктивної та відповідно проективної границь банахових просторів $C_\alpha\langle n!\rangle(B)$:

$$C_{\{n!\}}(B) = \lim_{\alpha\to 0_+} \operatorname{ind} C_\alpha\langle n!\rangle(B), \quad C_{(n!)}(B) = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname{pr}\ C_\alpha\langle n!\rangle(B).$$

Елементи простору $C_{\{n!\}}(B)(C_{(n!)}(B))$ називаються аналітичними (цілими) векторами оператора B. Якщо A — позитивний оператор, то (див., наприклад, [4])

$$C_{\{n!\}}(\sqrt{A}) = \bigcup_{t>0} \mathcal{R}(U(t)), \quad C_{(n!)}(\sqrt{A}) = \bigcap_{t\geq 0} \mathcal{R}(U(t)),$$

$\mathcal{R}(\cdot)$ — область значень оператора, і ці простори щільні в $\mathfrak{B}$ й інваріантні відносно $U(t)$. Зауважимо, що у випадку, коли A — додатний самоспряжений оператор в гільбертовому просторі, простір $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$ збігається з простором, спряженим до простору аналітичних векторів оператора $\sqrt{A}$.

2. Під розв'язком на $(0, \infty)$ рівняння (1) розумітимемо двічі сильно неперервно диференційовну функцію $y(t)$: $(0, \infty) \to \mathcal{D}(A)$, що задовольняє (1). Слід зазначити, що жодних умов на поведінку розв'язку поблизу нуля не накладається. В [3] доведено, що кожен розв'язок на $(0, \infty)$ рівняння (1) має граничне значення при $t \to 0_+$ в просторі $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$.

Однорідна задача Діріхле для рівняння (1) полягає у відшуканні його розв'язку на $(0, \infty)$ $y(t)$ такого, що

$$\lim_{t\to 0_+} y(t) = 0$$

(границя береться в топології простору $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$). Означимо $\operatorname{ch}\sqrt{A}\,t$ та $\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A}$ як

$$\operatorname{ch}\sqrt{A}\,t f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^k f, \quad f \in C_{(n!)}(\sqrt{A});$$

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}} f = \int_0^t \operatorname{ch}\sqrt{A}\,s f\,ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^k f, \quad f \in C_{(n!)}(\sqrt{A}).$$

Неважко бачити, що $\operatorname{ch}\sqrt{A}\,t f$ і $(\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A}) f$ з $f \in C_{(n!)}(\sqrt{A})$ є цілими вектор-функціями, значення яких належать до простору $C_{(n!)}(\sqrt{A})$.

Теорема 1. *Для того щоб вектор-функція $y(t)$ була розв'язком однорідної задачі Діріхле для рівняння* (1), *необхідно і достатньо, щоб вона допускала зображення*

$$y(t) = \frac{\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t}{\sqrt{A}} f, \quad f \in C_{(n!)}(\sqrt{A}). \tag{3}$$

Доведення. З означення $\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A}$ випливає, що вектор-функція $(\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A}) f$, $f \in C_{(n!)}(\sqrt{A})$, є розв'язком на $(0, \infty)$ рівняння (1). Очевидно, що $(\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A}) f \to 0$ при $t \to 0_+$ в просторі $\mathfrak{B}$, а отже, в $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$.

Навпаки, нехай $y(t)$ — розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння (1).

Покладемо

$$z(t) = A^{-1/2}y'(t),$$

$$u(t) = \frac{1}{2}(y(t) - z(t)), \quad v(t) = \frac{1}{2}(y(t) + z(t)).$$

Тоді

$$\frac{du(t)}{dt} = -A^{1/2}u(t), \quad t \in (0, \infty). \tag{4}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = -A^{1/2}v(t), \quad t \in (0, \infty). \tag{5}$$

Оскільки $-A^{-1/2}$ — генератор обмеженої голоморфної півгрупи, то згідно з [3] $u(t)$ як розв'язок рівняння (4) можна подати у вигляді $u(t) = \hat{U}(t)f_1$, $f_1 \in \mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$. Покажемо що вектор-функція $v(t)$ зображається як $v(t) = U^{-1}(t)f_2$, $f_2 \in C_{(n!)}(\sqrt{A})$. Зауважимо, що $U^{-1}(t)$ існує в силу голоморфності $U(t)$ і співвідношення $C_{(n!)}(\sqrt{A}) \subset \mathcal{D}(U^{-1}(t))$ для будь-якого $t > 0$. Позначимо $w(t) = U(T_0 - t)v(T_0)$, $t \in [0, T_0]$, де T_0: $0 < T_0 < \infty$ фіксоване. Функція $w(t)$ є розв'язком (5) на $[0, T_0]$ і $w(T_0) = v(T_0)$. Тоді $w_0(t) = w(t) - v(t)$ — розв'язок рівняння (5), для якого $w_0(T_0) = 0$. Очевидно, $y_0(t) = w_0(T_0 - t)$ $(t \in [0, T_0])$ — розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння (1). Оскільки ця задача коректна, то $y_0(t) \equiv 0$ і $v(t) = w(t) = U(T_0 - t)v(T_0)$. Фіксуючи t й надаючи T_0 як завгодно великих значень, одержуємо завдяки включенню $v(T_0) \in \mathcal{D}(\sqrt{A})$, що $v(t) \in \bigcap_{T>0} \mathcal{R}(U(T))$ для довільного $t > 0$. Таким чином, значення вектор-функції $v(t)$ належать до $C_{(n!)}(\sqrt{A})$. Беручи до уваги, що $U^{-1}(t)U(T) = U(T - t)$, $t \le T$, маємо

$$v(t) = U^{-1}(t)U(T_0)v(T_0), \quad t \in [0, T_0].$$

Враховуючи, що $T_0 > 0$ довільне, робимо висновок, що вектор $U(T_0)v(T_0) = f_2 \in C_{(n!)}(\sqrt{A})$ не залежить від T_0. Отже, $v(t) = U^{-1}(t)f_2$. Оскільки $y(t) = u(t) + v(t)$, то

$$y(t) = \hat{U}(t)f_1 + U^{-1}(t)f_2, \quad f_1 \in \mathfrak{B}_-(\sqrt{A}), \ f_2 \in C_{(n!)}(\sqrt{A}). \tag{6}$$

Збіжність $y(t) \to 0$, $t \to 0_+$, у просторі $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$ і неперервність в нулі $\hat{U}(t)$ в просторі $\mathfrak{B}_-(\sqrt{A})$ та $U^{-1}(t)$ в просторі $C_{(n!)}(\sqrt{A})$ зумовлюють рівність $f_1 = -f_2$. Тому $y(t) = (\operatorname{sh}\sqrt{A}\,t/\sqrt{A})f$, де $f = -2\sqrt{A}f_2 \in C_{(n!)}(\sqrt{A})$. Це й завершує доведення теореми.

З теореми 1 випливає, що розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння (1) не є єдиним, а будь-який розв'язок $y(t)$ цієї задачі прямує до нуля в топології простору $C_{(n!)}(\sqrt{A})$, і тим більше, у вихідному просторі $\mathfrak{B}$, при $t \to 0_+$. Постає питання, за яких умов на поведінку $y(t)$ на нескінченності розв'язок єдиний. Як показано в [5], $y(t) \equiv 0$, якщо $y(t)$ обмежений. Цей результат був посилений А. В. Князюком [6]. А саме: було встановлено, що коли $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, c_\varepsilon > 0$: $\|y(t)\| < c_\varepsilon \exp(\varepsilon\sqrt{t})$, то $y(t) \equiv 0$. Наступна теорема показує, що це твердження може бути посилене.

Теорема 2. *Нехай A — позитивний оператор типу (ω, M). Припустимо,* *що розв'язок однорідної задачі Діріхле для рівняння* (1) *задовольняє умову*

$$\exists\, a>0,\ \exists\, c>0:\ \|y(t)\| \le c\exp(at^{\alpha}),\quad 0<\alpha<\frac{\pi}{\pi+\omega}. \tag{7}$$

Тоді $y(t)\equiv 0$.

Доведення. Із зображення (6) випливає $U^{-1}(t)g = U(t)g - y(t)$, де $g = A^{1/2}f/2$. Оскільки $\|U(t)\| \le \mathrm{const}$, оцінка (7) зумовлює нерівність

$$\|U^{-1}(t)\| \le c_0\exp(at^{\alpha}),\quad 0<c_0=\mathrm{const}.$$

Але вектор-функція $U^{-1}(t)g$ — розв'язок на $(0,\infty)$ рівняння (5), в якому $-A^{1/2}$ — генератор голоморфної півгрупи з кутом $\varphi=(\pi-\omega)/2$. Враховуючи, що $\pi/2(\pi-\varphi)=\pi/\pi+\omega$ і за умовою (7) $\alpha<\pi/(\pi+\omega)$, маємо на основі теореми 1 з [7], що $U^{-1}(t)g\equiv 0$, а отже, $g=0$ і тому $f=0$. З цього випливає, що $y(t)\equiv 0$, що й треба було довести.

З нерівності $0\le\omega\le\pi/2$ витікає співвідношення $2/3<\omega/(\pi+\omega)\le 1$. Тому α можна брати з проміжку $[2/3, 1)$. Таким чином, доведена теорема суттєво підсилює результат А. В. Князюка [6], де $\alpha=1/2$. Використовуючи теорему 2 з [7] і міркуючи так само, як в доведенні теореми 2, у випадку, коли A — нормальний позитивний оператор в гільбертовому просторі, одержуємо таке твердження: якщо $y(t)$ — розв'язок розглядуваної задачі Діріхле такий, що

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, c_{\varepsilon}>0:\ \|y(t)\|\le c_{\varepsilon}\exp(\varepsilon t),$$

то $y(t)\equiv 0$.

Теорему, аналогічну теоремі 2, можна довести для однорідної задачі Неймана, яка полягає у відшуканні розв'язку на $(0,\infty)$ рівняння (1) такого, що

$$\lim_{t\to 0_+} y'(t) = 0$$

(границя береться у просторі $\mathfrak{B}\_(\sqrt{A})$). Для цього досить довести, що вектор-функція $y(t)$ є розв'язком цієї задачі тоді і лише тоді, коли $y(t)=\mathrm{ch}\sqrt{A}\,t f$, де $f\in C_{(n!)}(\sqrt{A})$.

Зауважимо, вище припускається, що оператор A позитивний. Але сформульовані результати вірні і у випадку, коли A — слабко позитивний оператор. Це означає, що в правій частині (2) замість $M/(1+\lambda)$ стоїть M/λ. В цій ситуації роль тривіального розв'язку $y(t)\equiv 0$ грає вектор-функція вигляду $y(t) = tf$, де $f\in\ker A$.

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
2. *Komatsu H.* Fractional powers of operators // Pacif. J. Math. – 1966. – **19**, No. 2. – P. 285–346.
3. *Князюк А. В.* Граничные значения решений эволюционных уравнений в банаховом пространстве: Автореф. дис. канд. ... физ.-мат. наук. – Киев, 1985. – 15 с.
4. *Горбачук В. И., Князюк А. В.* Граничные значения решений операторно-дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1989. – **44**, вып. 3. – С. 55–91.
5. *Balakrischnan A.* Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them // Pacif. J. Math. – 1960. – **10**, No. 2. – P. 419–439.
6. *Князюк А. В.* Единственность в задаче Дирихле на полуоси в банаховом пространстве // Нелинейные задачи математической физики. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики АН УССР, 1987. – 63 с.
7. *Горбачук В. М.* Поведение на бесконечности решений дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 5. – С. 629–632.

Получено 24.12.93