УДК 519. 21

А. А. Дороговцев, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СТОХАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И ОДНА МИНИМИЗАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

The problem of finding the form of a functional of an infinite-dimensional argument such that a certain given expression takes a minimum value for a fixed value of a parameter. The equation for an unknown functional is similar in a form and a method for solution to equations with an extended stochastic integral.

Розглядається задача пошуку форми функціоналу від нескінченновимірного аргументу, для якого деякий наперед заданий вираз набуває мінімуму при фіксованому значенні параметра. Рівняння для невідомого функціоналу близьке за формою та методом розв'язку до рівнянь з розширеним стохастичним інтегралом.

Одной из наиболее распространенных задач статистики случайных процессов является задача выделения сигнала на фоне помех. При этом, как правило, считают, что исходный сигнал формируется чисто, без помех, а затем при передаче к нему добавляется шум. Однако искажения могут возникать уже на стадии формирования сигнала. В настоящей работе сделана попытка рассмотрения именно такой ситуации. При этом решается задача поиска такой формы сигнала, при которой минимум некоторого функционала достигается при отсутствии помех.

Пусть (Ω, F, P) — вероятностное пространство, B — вещественное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Рассмотрим случайный элемент ξ в B с распределением μ. Обозначим при $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0; 1]$ через $T_{\theta,t}$ измеримое отображение B в себя, переводящее меру μ в абсолютно непрерывную. Предположим, что семейство $\{T_{\theta,t}\}$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $T: \mathbb{R} \times [0; 1] \times B \to B$ — борелевское отображение; 2) $T_{0,t}$ — тождественное преобразование при каждом $t \in [0; 1]$; 3) функция $T_{\theta,t}(u)$, $\theta \in \mathbb{R}$, дифференцируема в точке 0 при любых фиксированных t и u.

Для заданной борелевской функции $F: \mathbb{R} \times [0; 1] \times B \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и некоторой борелевской функции $x: B \times [0; 1] \to \mathbb{R}$ рассмотрим функционал

$$\Phi(\theta) = \int_0^1 F(\theta, t, \xi, x(T_{\theta,t}(\xi), t))\, dt.$$

Значение Φ может соответствовать наблюдениям функции от сигнала $x(\xi, t)$, $t \in [0; 1]$, в амплитуду которого вносятся помехи за счет нечеткого приема, а также за счет нечеткой передачи. Рассмотрим задачу поиска такой функции x, для которой Φ принимает с вероятностью 1 максимальное значение при отсутствии помех, т. е. при $\theta = 0$. Предположим, что функция F непрерывно дифференцируема по всем аргументам. Обозначим через f и g соответственно производные F по первому и четвертому аргументам. Пусть искомая функция x также дифференцируема по аргументу из B при каждом $t \in [0; 1]$. Тогда функционал Φ для функций f, g и x, удовлетворяющих естественным условиям интегрируемости, будет дифференцируемым при $\theta = 0$. Следовательно, искомая функция x должна с вероятностью 1 удовлетворять уравнению

$$\int_0^1 f(t, \xi, x(\xi, t))\, dt + \int_0^1 g(t, \xi, x(\xi, t)) \langle \nabla x(\xi, t), T'_{0,t}(\xi) \rangle\, dt = 0. \qquad (1)$$

Здесь ∇ — знак производной x по пространству B, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — действие элементов сопряженного пространства B^* на элементы B. Далее в статье в различных ситуациях обсуждается уравнение (1), которое видоизменяется в зависимости от семейства допустимых преобразований $\{T_{\theta,t}\}$. Кроме того, в некоторых случаях (1) можно записать для функции x, не являющейся непрерывно дифференцируемой по B.

1. Гладкие меры. Пусть распределение μ случайного элемента ξ в B дифференцируемо вдоль некоторого линейного множества H, всюду плотного в B [1]. Для $\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0; 1]$ определим

$$\forall u \in B: \; T_{\theta,t}(u) := u + \theta \cdot h(t),$$

где $h: [0; 1] \to B$ — измеримая функция, принимающая значения в H, $h(t) \neq 0$, $t \in [0; 1]$. В этом случае уравнение (1) примет вид

$$\int_0^1 f(t, \xi, x(\xi, t))\, dt + \int_0^1 g(t, \xi, x(\xi, t)) \langle \nabla x(\xi, t), h(t) \rangle\, dt = 0. \tag{2}$$

Отметим, что в такой записи от функции x можно требовать в момент времени t лишь существование измеримой производной в направлении $h(t)$.

Теорема 1. *Уравнение*

$$\int_0^1 f(t, \xi, x(\xi, t))\, dt + \int_0^1 g(t, \xi, x(\xi, t)) D_{h(t)} x(\xi, t)\, dt = 0 \tag{3}$$

имеет измеримое решение x при условии, что функции f, g непрерывны по совокупности переменных, функция g отделена от 0 и частное f/g удовлетворяет условию Липшица по x равномерно по остальным переменным.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном t уравнение

$$f(t, \xi, x(\xi, t)) + g(t, \xi, x(\xi, t)) D_{h(t)} x(\xi, t) = 0. \tag{4}$$

Выполнение (4) почти везде будет гарантировано, если x будет удовлетворять детерминированному уравнению

$$D_{h(t)} x(u, t) + \frac{f(t, u, x(u, t))}{g(t, u, x(u, t))} = 0, \quad u \in B. \tag{5}$$

Это уравнение может быть решено методом характеристик. По теореме Хана – Банаха в B^* существует функционал $l(t)$ такой, что $\langle l^*(t), h(t) \rangle \neq 0$. Пусть $S(t) = \operatorname{Ker} l^*(t)$. Тогда всякий элемент $u \in B$ единственным образом может быть представлен в виде суммы

$$u = \frac{\langle l^*(t), u \rangle}{\langle l(t), h(t) \rangle} h(t) + p(u),$$

где $p(u) \in S(t)$. Прямые, параллельные $h(t)$ — это характеристики (5) в B. Поверхность $S(t)$ может быть использована для задания начальных условий. Пусть $x(\cdot, t)$ — решение (5), равное 0 на $S(t)$. Докажем, что функционалы $\{l^*(t), t \in [0; 1]\}$ могут быть выбраны так, чтобы обеспечить измеримость x по совокупности переменных. Пусть $\{l_n^*, n \geq 1\}$ — последовательность функционалов, разделяющая точки B (такая существует из-за сепарабельности пространства B). При $n \geq 1$ обозначим

$$A_n = \{t: \langle l_n^*, h(t) \rangle \neq 0\}.$$

$$C_1 = A_1, \quad C_n = A_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} A_j, \quad n \geq 2.$$

Множества $\{C_n; n \geq 1\}$ — борелевские подмножества $[0; 1]$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = [0; 1]$. Для $t \in C_n$ положим $l^*(t) = l_n^*$, $n \geq 1$. Построим соответствующее решение x. Для доказательства измеримости x достаточно доказать измеримость $x(u, t)\chi_{C_n}(t)$, $u \in B$, $t \in [0; 1]$ при каждом $n \geq 1$. Пусть $n \geq 1$ фиксировано. Для всех $t \in C_n$, $u \in B$ разложение u, содержащееся в записи решения, имеет вид

$$u = \frac{\langle l_n^*, u \rangle}{\langle l_n^*, h(t) \rangle} h(t) + p_t(u).$$

Обозначим

$$\alpha_n(u, t) = \frac{\langle l_n^*, u \rangle}{\langle l_n^*, h(t) \rangle},$$

$$\frac{f(t, u, \cdot)}{g(t, u, \cdot)} = a(t, u, \cdot), \quad u \in B, \quad t \in C_n.$$

Тогда $\forall u \in B$, $t \in C_n$:

$$x(u, t) = \lim_{m \to \infty} x_m(u, t),$$

где

$$x_0(\cdot, \cdot) \equiv 0,$$

$$x_{m+1}(u, t) = \int\limits_{[0; \alpha_n(u,t)]^*} a(t, sh(t) + p_t(u), x_m(sh(t) + p_t(u), t))\, ds, \quad m \geq 0.$$

Здесь $[0; \alpha_n(u, t)]^*$ — отрезок с концами 0 и $\alpha_n(u, t)$, т. е. в случае $\alpha_n(u, t) < 0$ $[0; \alpha_n(u, t)]^* = [\alpha_n(u, t); 0]$. С помощью метода математической индукции можно проверить, что x_m измерима по совокупности переменных при каждом $m \geq 0$. Следовательно, x также измерима. Теорема доказана.

2. Сдвиги по времени стационарного процесса. Пусть $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ — окружность на комплексной плоскости, B — пространство непрерывных действительнозначных функций на Γ с равномерной нормой. Случайный элемент ξ в B зададим следующим образом. Рассмотрим пуассоновскую случайную меру ν на борелевских подмножествах Γ со структурной мерой λ, получающейся из меры Лебега при естественном отождествлении Γ и интервала $[0; 2\pi)$. Пусть $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. Определим

$$\xi(\tau) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(r \cdot \tau)\nu(dr), \quad \tau \in \Gamma.$$

Тогда ξ — случайный процесс на Γ с непрерывно дифференцируемыми траекториями, являющийся случайным элементом в B. Распределение μ процесса (случайного элемента) ξ в B не зависит от поворота Γ вокруг начала координат. Выберем семейство преобразований $\{T_{\theta, t}\}$ следующим образом. При

$\theta \in \mathbb{R}$, $t \in [0;1]$ $T_{\theta,t} = T_\theta$ индуцировано поворотом Γ на угол θ. Теперь производная B-значной функции $T_{\theta,t}(u)$, $\theta \in \mathbb{R}$, в точке 0 существует не при каждом u. Однако за счет строения ξ с вероятностью 1 существует $(T_{\theta,t}(\xi))'_{\theta=0} = \dot{\xi}$, где $\dot{\xi}$ — производная процесса ξ по Γ, равная

$$\dot{\xi}(\tau) = \int_\Gamma \varphi'(r\cdot\tau)\nu(dr).$$

Здесь φ' — производная φ вдоль Γ, $\dot{\xi}$ — случайный элемент в B. Поэтому для дифференцируемой на B функции $x(\cdot,\cdot)$ функционал Φ по-прежнему может иметь (при выполнении условий интегрируемости) производную при $\theta = 0$ и уравнение (1) примет вид

$$\int_0^1 f(t,\xi,x(\xi,t))\,dt + \int_0^1 g(t,\xi,x(\xi,t))\langle \nabla x(\xi,t),\dot{\xi}\rangle\,dt = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6), в отличие от (1), не допускает прямого использования метода характеристик. Однако, как и в предыдущем случае, если ослабить требование дифферецируемости x и считать, что (6) должно выполняться почти везде, то в некоторых случаях удается доказать существование решения. Для простоты рассмотрим автономное уравнение

$$a(\xi,x(\xi)) + \langle \nabla x(\xi),\dot{\xi}\rangle = 0. \tag{7}$$

От решения x потребуем только измеримость и дифференцируемость по θ действительнозначных функций вида $x(T_\theta(u))$ для дифференцируемых функций u.

Теорема 2. *Пусть функция a удовлетворяет условию Липшица по второму аргументу равномерно относительно первого. Кроме того, существует единственное непрерывно дифференцируемое решение y уравнения*

$$a(c,y(c)) = 0$$

на $\mathbb{R}$. Тогда (7) имеет решение.

Доказательство. Отождествляя B с периодическими с периодом 2π непрерывными функциями, рассмотрим множество S_n, состоящее из функций, в разложении которых в ряд Фурье первые не равные нулю коэффициенты равны между собой, положительны и стоят при $\sin nx$ и $\cos nx$. Пусть $S = \bigcup_{n=1}^\infty S_n \oplus \oplus \{e\}$ (e — тождественно равная единице функция). Тогда для всякой функции $u \in B$, ортогональной e, существует единственное число $\tau_0 \in [0;2\pi)$ такое, что $T_{\tau_0}u \in S$. Множество S измеримо и может служить для задания на нем начальных условий. Далее, рассматривая вместо характеристик из доказательства теоремы 1 кривые вида $T_\tau u$, $\tau \in [\tau_0,\tau_0+2\pi)$, и полагая x на S равным 0, определим x везде, за исключением прямой $\{c\cdot e; c\in\mathbb{R}\}$. На этой прямой получаем решение с помощью функции y. Теорема доказана.

1. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Аналитические функционалы от случайных процессов // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**. – С. 3 – 83.

Получено 10.05.93