УДК 517. 946

В. В. Маринець, канд. фіз.-мат. наук (Ужгород. ун-т)

ПРО ОДНУ МІШАНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМ ВИЗНАЧЕНИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ З АРГУМЕНТОМ, ЩО ВІДХИЛЯЄТЬСЯ

For a mixed problem in the case of a system of definite quasilinear pseudoparabolic equations with deviating argument, we prove a theorem on differential inequalities and existence of a unique regular solution and a comparison theorem and give sufficient conditions of existence of constant-sign solutions of the considered problem.

Для мішаної задачі у випадку системи визначених квазілінійних псевдопараболічних рівнянь з аргументом, що відхиляється, доводяться теорема про диференціальні нерівності та існування єдиного регулярного розв'язку, теорема порівняння та наводяться достатні умови існування знакосталих розв'язків розглядуваної задачі.

Розглянемо мішану задачу: в області $B_0 = \{(x, y) \mid x \in (0, a), y \in (0, b)\}$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$D^{(2,1)}U(x, y) = F(x, y, U(x, y), D^{(1,0)}U(x, y), \ldots , D^k U(x, y), U(x, \theta_{0,0}(x, y)),$$

$$D^{(1,0)}U(x, \theta_{1,0}(x, y)), \ldots , D^k U(x, \theta_k(x, y))) \equiv F[U(x, y)], \tag{1}$$

$$k = (k_1, k_2), \quad k_1 = 0, 1, 2, \quad k_2 = 0, 1, \quad |k| \le 2,$$

який задовольняє умови

$$U(x, 0) = T(x), \quad x \in [0, a],$$

$$D^{(1,0)}U(0, y) = M^{(1)}(y)U(0, y) - M^{(2)}(y)U(a, y) + M_1(y), \tag{2}$$

$$M^{(3)}(y)D^{(1,0)}U(a, y) + M^{(4)}(y)D^{(1,1)}U(a, y) = M_2(y), \quad y \in [0, b],$$

де

$$D^k U : B_0 \to B_k \subset R^n, \quad F : \mathfrak{D} \to R^n,$$

$$\mathfrak{D} = B_0 \times \underset{k_1, k_2}{\boxtimes} B_{(k_1, k_2)} \underset{k_1, k_2}{\boxtimes} B_{(k_1, k_2)} \subset R^{10n+2},$$

$\boxtimes$ — декартів добуток,

$$D^k U(x, y) = (D^k u_i(x, y)), \quad D^k U(x, \theta_k(x, y)) = (D^k u_i(x, \theta_k^i(x, y))),$$

$$F[U(x, y)] = (f_i[u_1(x, y), u_2(x, y), \ldots , u_n(x, y)]), \quad T(x) = (\tau_i(x)),$$

$$M_r(y) = (\mu_{r,i}(y)), \quad r = 1, 2, \quad i = \overline{1, n},$$

— вектори, $M^{(s)}(y) = (\delta_{i,j}\mu_i^{(s)}(y))$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{1, 4}$, — відомі матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, $\theta_{k_1,k_2}^i(x, y) = y - \nu_{k_1,k_2}^i(x, y)$, $\nu_{k_1,k_2}^i(x, y) \ge 0$, — відомі неперервні функції в області $\overline{B}_0$, які визначають початкові множини

$$\overline{E}_{k_1,k_2}^i = \{(\overline{x}, \overline{y}) \mid \overline{x} \in [0, a],\ y - \nu_{k_1,k_2}^i(x, y) \le \overline{y} \le 0,\ (x, y) \in \overline{B}_0\}.$$

Нехай

$$\overline{E} = \bigcup_{k_1, k_2, i} \overline{E}_{k_1,k_2}^i, \quad U(x, y)|_{\overline{E}} = H(x, y), \tag{3}$$

де $H(x, y) = (\eta_i(x, y))$ — відома вектор-функція з простору $C^{(2,1)}(\overline{E})$, яка за-

© В. В. МАРИНЕЦЬ, 1994

довольняє умову $H(x,0) = T(x)$, $x \in [0,a]$.

Для відомих векторів $T(x) \in C^2([0,a])$, $M_1(y) \in C^1([0,b])$, $M_2(y) \in C([0,b])$ і матриць $M^{(r)}(y) \in C^1([0,b])$, $M^{(3)}(y)$, $M^{(4)}(y) \in C^1([0,b])$ виконуються умови

$$M^{(r)}(y) \geq 0, \quad M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y) \neq 0, \quad r = 1, 2, \quad y \in [0,b],$$
$$D^{(1,0)}T(0) = M^{(1)}(0)T(0) - M^{(2)}(0)T(a) + M_1(0). \tag{4}$$

Розв'язок мішаної задачі (1) – (4), який належить простору $C^{(2,1)}(B_0) \cap C^{(1,1)}(\overline{B}_0)$, будемо називати регулярним.

Питанням існування та єдиності розв'язку мішаних задач у випадку різних локальних і нелокальних крайових умов для лінійного скалярного псевдопараболічного рівняння без відхилення аргументу присвячені роботи [1 – 4]. В [5] досліджуються мішані задачі з нелокальними крайовими умовами А. М. Нахушева для систем вигляду (1) без відхилень в аргументах і будується одна модифікація двостороннього методу їх наближеного інтегрування.

Мета даної роботи — узагальнення результатів робіт [1 – 5] і побудова наближеного методу інтегрування мішаної задачі (1) – (4).

Будемо вважати, що $F[U(x,y)] \in C_1(\mathfrak{D})$, де $C_1(\mathfrak{D})$ — простір вектор-функцій, визначений в [5]. Тоді праву частину системи (1) завжди можна зобразити у вигляді $F[U(x,y)] = F[U^+(x,y); U^-(x,y)]$, де

$$\frac{\partial f_i}{\partial D^k u_j^+(x,y)} \equiv (a^+_{i,j,k}(x,y)) \leq (\geq)\ O, \ (a^-_{i,j,k}(x,y)) \geq (\leq)\ O, \tag{5}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial D^k u_j^+(x, \theta_k^j(x,y))} \equiv (b^+_{i,j,k}(x,y)) \leq (\geq)\ O, \ (b^-_{i,j,k}(x,y)) \geq (\leq)\ O,$$

$$k_1 = 0, 1 \quad (k_1 = 2), \quad k_2 = 0, 1.$$

Мішана задача (1) – (4) зводиться до еквівалентного інтегрального рівняння

$$U(x,y) = \begin{cases} H(x,y) & (x,y) \in \overline{E}, \\ S(x,y) - TF[U(t,\eta)], & (x,y) \in \overline{B}_0, \end{cases}$$

де

$$S(x,y) = T(x) - T(0) - xT'(l) + (M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))_{-1} \times$$
$$\times \{[E + aM^{(2)}(y) + x(M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))]\,\Omega(y) - T'(a) - T'(0) -$$
$$- M^{(2)}(y)[aT'(a) - T(a) + T(0)] - M_1(t)\}.$$

$(M^{(1)}(y) - M^{(2)}(y))_{-1} = (\delta_{i,j}(\mu_i^{(1)}(y) - \mu_i^{(2)}(y))^{-1})$ — матриця,

$$\Omega(y) = \left(\exp\left(-\int_0^y \frac{\mu_i^{(3)}(\eta)}{\mu_i^{(4)}(\eta)}\,d\eta\right)\left[\tau_i'(a) + \int_0^y \frac{\mu_{2,i}(\eta)}{\mu_i^{(4)}(\eta)} \exp\left(\int_0^\eta \frac{\mu_i^{(3)}(\zeta)}{\mu_i^{(4)}(\zeta)}\,d\zeta\right) d\eta\right]\right),$$

$i = \overline{1, n}$ — вектор,

$$TF[U(t,\eta)] = \int_0^y \int_0^a G(y,x,\eta) F[U(t,\eta)]\, dt\, d\eta,$$

$G(y,x,\eta) = (\delta_{i,j} g_j(y,x,\eta))$, $i,j = \overline{1,m}$, — матриця,

$$g_j(y,x,\eta) = \begin{cases} \eta + \dfrac{1+\eta\mu_j^{(2)}(y)}{\mu_j^{(1)}(y)-\mu_j^{(2)}(y)}, & \eta\in[0,x], \\ x + \dfrac{1+\eta\mu_j^{(2)}(y)}{\mu_j^{(1)}(y)-\mu_j^{(2)}(y)}, & \eta\in(x,a]. \end{cases}$$

Легко бачити, що вектор-функція $S(x,y)$ задовольняє умови (2), а отже, ввівши нову невідому функцію

$$U^*(x,y) = \begin{cases} U(x,y) - H(x,y), & (x,y)\in\overline{E}, \\ U(x,y) - S(x,y), & (x,y)\in\overline{B}_0, \end{cases}$$

умови (2), (3) зводяться до однорідних. В зв'язку з цим, не зменшуючи загальності майбутніх міркувань, будемо вважати, що $M_1(y) = M_2(y) = T(x) = 0$.

Нехай

$$\mu_i^{(1)}(y) - \mu_i^{(2)}(y) > 0, \quad \mu_i^{(1)}(y) \le 0, \quad \mu_i^{(2)}(y) \ge 0, \quad y\in[0,b], \quad i = \overline{1,n}.$$

Введемо такі позначення:

$$\mathrm{A}_p(x,y) = D^{(2,1)}Z_p(x,y) - F[Z_p(x,y); V_p(x,y)],$$

$$\mathrm{B}_p(x,y) = D^{(2,1)}V_p(x,y) - F[V_p(x,y); Z_p(x,y)],$$

$$F^p = (f_i^{(p)}), \quad F_p = (f_{i,p}), \quad i = \overline{1,n}, \quad p = 0,1,2,\ldots,$$

$$f_i^{(p)} = f_i[z_{1,p+1},\ldots,z_{i-1,p+1},z_{i,p},\ldots,z_{n,p}; v_{1,p+1},\ldots,v_{i-1,p+1},v_{i,p},\ldots,v_{n,p}],$$

$$f_{i,p} = f_i[v_{1,p+1},\ldots,v_{i-1,p+1},v_{i,p},\ldots,v_{n,p}; z_{1,p+1},\ldots,z_{i-1,p+1},z_{i,p},\ldots,z_{n,p}],$$

$$W_p(x,y) = Z_p(x,y) - V_p(x,y)$$

і побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_p(x,y)\}$ та $\{V_p(x,y)\}$ за формулами

$$Z_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in\overline{E}, \\ -T\{F^p - C_p\mathrm{A}_p(t,\eta)\}, & (x,y)\in\overline{B}_0, \end{cases}$$

$$V_{p+1}(x,y) = \begin{cases} 0, & (x,y)\in\overline{E}, \\ -T\{F_p - C_p\mathrm{B}_p(t,\eta)\}, & (x,y)\in\overline{B}_0, \end{cases} \tag{6}$$

де $C_p = (\delta_{i,j}, C_{i,j}^p(x,y))$ — матриці, $C_{i,i}^p(x,y)$ — довільні невід'ємні з простору $C(\overline{B}_0)$ функції, які задовольняють умови $\sup\limits_{\overline{B}_0} C_{i,i}^p(x,y) < 1$, $i = \overline{1,n}$, $p = 0,1,2,\ldots$, а функції нульового наближення $Z_0(x,y)$, $V_0(x,y)$ вибираємо так, щоб вони задовольняли умови (2), (3) і при $(x,y)\in\overline{B}_0$ виконувались нерівності

$$\mathrm{A}_0(x,y) \ge 0, \quad \mathrm{B}_0(x,y) \le 0, \quad D^kW_0(x,y) \le (\ge)\, O, \quad k_1,k_2 = 0,1 \quad (k_1 = 2). \tag{7}$$

Якщо $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{\mathfrak{D}})$, то множина вектор-функцій нульового наближення, які задовольняють умови (2), (3), (7), не порожня.

Припустимо, що

$$\max_{i,j,k}\left(\sup_{\overline{\mathfrak{D}}}|a_{i,j,k}^+(x,y) - a_{i,j,k}^-(x,y)|, \sup_{\overline{\mathfrak{D}}}|b_{i,j,k}^+(x,y) - b_{i,j,k}^-(x,y)|\right) \le 0.5P,$$

$$|G| = \max\left\{\max_i \sup_{\overline{B}_0\times[0,a]} |g_i(y,x,\eta)|, \max_i \sup_{\overline{B}_0\times[0,a]} \frac{\partial g_i(y,x,\eta)}{\partial y}\right\}.$$

$$N = \max\{a, ab, a|G|(b+1)\},$$

а елементи матриць C_p на кожному кроці ітерації (6) вибираємо так, щоб в області $\overline{B}_0$ виконувались умови

$$\mathrm{A}_p(x, y) \ge 0, \quad \mathrm{B}_p(x, y) \le 0. \tag{8}$$

Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай права частина системи* (1) $F[U(x, y)] \in C_1(\overline{D})$, *а вектор-функції нульового наближення задовольняють умови* (2), (3), (7).

Тоді послідовності $\{Z_p(x, y)\}$ *і* $\{V_p(x, y)\}$, *побудовані за законом* (6), (7), (8) *при* $PNn < 1$ *і* $(x, y) \in \overline{B}_0$, *збігаються абсолютно і рівномірно до єдиного регулярного розв'язку мішаної задачі* (1) – (4) *і виконуються нерівності*

$$D^k Z_p(x, y) \le (\ge)\ D^k Z_{p+1}(x, y) \le (\ge)\ D^k U(x, y) \le (\ge)\ D^k V_{p+1}(x, y) \le$$

$$\le (\ge)\ D^k V_p(x, y), \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ \ (k_1 = 2), \quad |k| \le 2, \quad p \in N.$$

Збіжність алгоритму (6) – (8) не повільніша за збіжність методу Зейделя.

Наслідок. *Нехай в області* $\overline{\mathfrak{D}}$ *права частина системи* (1) *задовольняє умови теореми* 1 *і існує в просторі* $C^{(2,1)}(B_0) \cap C^{(1,1)}(\overline{B}_0)$ *вектор-функція* $V_0(x, y)$ $(Z_0(x, y))$, *яка задовольняє умови* (2), (3), *така, що*

$$D^k V_0(x, y) \ge (\le)\ O \ \ (D^k Z_0(x, y) \ge (\le)\ O), \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ \ (k_1 = 2),$$

$$D^{(2,1)} V_0(x, y) - F[V_0(x, y); O] \le O, \quad F[O; V_0(x, y)] \le O,$$

$$(D^{(2,1)} Z_0(x, y) - F[Z_0(x, y); O] \ge O, \quad F[0; Z_0(x, y)] \ge O).$$

Тоді для розв'язку мішаної задачі (1) – (4) *з однорідними умовами* (2), (3) *в області* $\overline{B}_0$ *виконуються нерівності*

$$D^k U(x, y) \ge (\le)\ O \quad (D^k U(x, y) \le (\ge)\ O), \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ \ (k_1 = 2).$$

Розглянемо дві лінійні системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{gathered}
D^{(2,1)} z_i(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_1, k_2} [a_{i,j,k}(x, y) D^k z_j(x, y) + \\
+ b_{i,j,k}(x, y) D^k z_j(x, \theta_k^j(x, y))] + f_i(x, y), \\
D^{(2,1)} v_i(x, y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_1, k_2} [a^*_{i,j,k}(x, y) D^k v_j(x, y) + \\
+ b^*_{i,j,k}(x, y) D^k v_j(x, \theta_k^j(x, y))] + f_i^*(x, y)
\end{gathered} \tag{9}$$

з однорідними умовами (2), (3).

Теорема 2. *Нехай кусково-неперервні коефіцієнти систем* (9) *задовольняють умови* (5),

$$\max_{i,j,k} \left\{ \sup_{\overline{B}_0} |a_{i,j,k}(x, y)|, \sup_{\overline{B}_0} |b_{i,j,k}(x, y)| \right\} \le 0.5\, P$$

і в області $\overline{B}_0$

$$a_{i,j,k}(x, y) - a^*_{i,j,k}(x, y) \le (\ge)\ 0, \quad b_{i,j,k}(x, y) - b^*_{i,j,k}(x, y) \le (\ge)\ 0,$$

$$k_1, k_2 = 0, 1 \ \ (k_1 = 2), \quad |k| \le 2.$$

а для кусково-неперервних функцій $f_i(x,y)$, $f_i^*(x,y)$ *виконуються нерівності* $f_i(x,y) \ge 0$, $f_i^*(x,y) \ge 0$, $f_i(x,y) - f_i^*(x,y) \ge 0$, $(x,y) \in \overline{B}_0$.

Тоді

$$D^k[z_i(x,y) - v_i(x,y)] \le (\ge)\ 0, \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ (k_1 = 2), \quad (x,y) \in \overline{B}_0.$$

Для прискорення збіжності двостороннього методу (6) – (8) можна на кожному кроці уточнити одержані наближення за формулами

$$Z_p^*(x,y) = Z_p(x,y) - R_p(x,y) W_p(x,y), \quad V_p^*(x,y) = V_p(x,y) + \mathfrak{D}_p(x,y) W_p(x,y),$$

де функціональні матриці $R_p(x,y) = (\delta_{i,j} r_{i,p}(x,y))$ і $\mathfrak{D}_p(x,y) = (\delta_{i,j} d_{i,p}(x,y))$, $r_{i,p}(x,y)$, $d_{i,p}(x,y) \in C^{(2,1)}(\overline{B}_0)$, $i, j = \overline{1, n}$, елементи яких задовольняють умови

$$\sup_{\overline{B}_0} |D^k r_{i,p}(x,y)| + \sup_{\overline{B}_0} |D^k d_{i,p}(x,y)| < 1, \quad i = \overline{1, n}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$D^k r_{i,p}(x,y) \ge (\le)\, 0, \ D^k d_{i,p}(x,y) \ge (\le)\, 0, \ k_1, k_2 = 0, 1 \ (k_1 = 2), \ (x,y) \in \overline{B}_0,$$

вибираємо таким чином, що в області $\overline{\mathfrak{D}}$

$$D^{(2,1)} Z_p^*(x,y) - F[Z_p^*(x,y); V_p^*(x,y)] \ge 0,$$

$$D^{(2,1)} V_p^*(x,y) - F[V_p^*(x,y); Z_p^*(x,y)] \le 0,$$

$$D^k W_p^*(x,y) \le (\ge)\ 0, \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ (k_1 = 2).$$

Тоді на підставі теореми 1 будемо мати

$$D^k Z_p(x,y) \le (\ge)\ D^k Z_p^*(x,y) \le (\ge)\ D^k U(x,y) \le (\ge)\ D^k V_p^*(x,y) \le$$

$$\le (\ge)\ D^k V_p(x,y), \quad k_1, k_2 = 0, 1 \ (k_1 = 2), \quad |k| \le 2, \quad (x,y) \in \overline{B}_0,$$

а отже, як p-наближення в (6) можна взяти вектор-функції $Z_p^*(x,y)$ та $V_p^*(x,y)$.

На закінчення зауважимо, що коли в (6) як F^p та F_p взяти вирази вигляду

$$f_i^{(p)} = f_i[z_{1,p+1}, \ldots, z_{i-1,p+1}, v_{i,p}, \ldots, v_{n,p}; v_{1,p+1}, \ldots, v_{i-1,p+1}, z_{i,p}, \ldots, z_{n,p}],$$

$$f_{i,p} = f_i[v_{1,p+1}, \ldots, v_{i-1,p+1}, z_{i,p}, \ldots, z_{n,p}; z_{1,p+1}, \ldots, z_{i-1,p+1}, v_{i,p}, \ldots, v_{n,p}],$$

і покласти $C_p = 0$, то одержимо альтернуючий метод Зейделя [6].

1. *Calistru N.* On the existence and asymptotic behaviour of the solution of a boundary value problem // An. şti. Univ. Iaşi. Sec. I. A. – 1978. – **24**, № 1. – P. 135 – 140.
2. *Colton D.* Pseudoparabolic Equations in One Space Variable // J. Different. Equat. – 1972. – **12**, № 3. – P. 559 – 565.
3. *Шханукоs М. Х.* О некоторых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. С. 689 – 699.
4. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 2. С. 280 – 285.
5. *Маринец В. В.* О некоторых задачах для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелокальными краевыми условиями // Там же. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1393 – 1397.
6. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.

Получено 04.01.93