:12.546

I. Протасов, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Е ТЕОРЕМЫ О ВЛОЖЕНИЯХ 0-МЕРНЫХ ГРУПП

class of 0-dimensional groups of infinite weight, a universal group is constructed. The existence imbedding of a 0-dimensional group into a multiplicative subgroup of a topological ring is proved.

дована універсальна група в класі 0-вимірних груп нескінченної ваги. Доведено, що 0-ви група вкладається в мультиплікативну півгрупу топологічного кільця.

жением топологической группы G в топологическую группу или полу- ппу H называется топологический изоморфизм группы G на некоторую группу из H. Все рассматриваемые топологии предполагаются хаусдорфо- ми. Специалистам по топологической алгебре хорошо известны следующие блемы (см., например, [1]).

Проблема Архангельского. *Верно ли, что для любого бесконечного карди- а τ существует универсальная группа в классе групп веса τ? Топологиче- я группа G называется универсальной в классе групп $\mathcal{K}$, если $G \in \mathcal{K}$ и бая группа из класса $\mathcal{K}$ вложима в группу G. Вес топологической группы что наименьшая из мощностей баз топологии.*

Проблема Арнаутова – Михалева. *Можно ли любую топологическую ппу вложить в мультипликативную полугруппу топологического кольца?*

В. В. Успенский [2] решил проблему Архангельского для счетного кардина- а: универсальной в классе групп счетного веса является группа гомеоморфиз- мов гильбертова куба с компактно-открытой топологией. Неизвестно, однако, существует ли универсальная группа в классе абелевых групп счетного веса.

Наиболее сильный результат по проблеме Арнаутова – Михалева получен в работе [3]: существование соответствующего вложения доказано для тополо- гической группы с совпадающими левой и правой равномерностями. Топологи- ческая группа, имеющая базу окрестностей единицы из открытых подгрупп, на- зывается 0-мерной. Класс 0-мерных групп достаточно широк. Так, 0-мерны- ми являются все локально компактные вполне несвязные группы, а также все P-группы, т. е. группы, топология которых замкнута относительно счетных пе- ресечений. Отметим также, что 0-мерные топологии естественно возникают и широко используются при исследовании абелевых групп [4, 5]. В настоящей статье решаются поставленные проблемы в классе 0-мерных групп.

1. Универсальная 0-мерная группа. Пусть X — произвольное дискрет- ное пространство, $S(X)$ — группа всех подстановок пространства X с тополо- гией поточечной сходимости. Для подмножества $K \subseteq X$ обозначим $\mathrm{St}(K) = \{ f \in S(X) : f(x) = x \text{ для всех } x \in K \}$. Базу окрестностей единицы группы $S(X)$ образуют подгруппы $\mathrm{St}(K)$, где K пробегает все конечные подмноже- ства из X. Таким образом, $S(X)$ — 0-мерная топологическая группа. Отож- дествляя кардинал τ с дискретным пространством всех ординалов меньшей мощности, приходим к определению 0-мерной группы $S(\tau)$.

Теорема 1. *Для любого бесконечного кардинала τ $S(\tau)$ — универсальная группа в классе всех 0-мерных групп веса τ.*

Доказательство. Рассмотрим вначале произвольную 0-мерную группу G веса τ и выделим наименьшее по мощности семейство $\mathfrak{A}$ открытых подгрупп из G, образующее базу окрестностей единицы. Рассмотрим также множество X всех левых смежных классов группы G по всевозможным открытым под- группам из $\mathfrak{A}$. Снабдим X дискретной топологией. Для каждого элемента $g \in G$ обозначим через $\hat{g}$ подстановку из $S(X)$, определенную формулой $\hat{g}(x) = gx$. Зададим отображение $I : G \to S(X)$ правилом $I(g) = \hat{g}$. Ясно, что I — изоморфизм группы G на некоторую подгруппу группы $S(X)$.

Проверим непрерывность отображения I. Пусть K — фиксированное конечное множество из X. По определению множества X $K = \{g_1U_1, \ldots, g_nU_n\}$, где $g_1, \ldots, g_n \in G$, $U_1, \ldots, U_n \in \mathfrak{A}$. Подберем такую открытую подгруппу $V \in \mathfrak{A}$, что $g_1^{-1}Vg_1 \subseteq U_1, \ldots, g_n^{-1}Vg_n \subseteq U_n$. Если теперь $g \in V$, то $\hat{g}(g_1U_1) = gg_1U_1 = g_1U_1, \ldots, \hat{g}(g_nU_n) = gg_nU_n = g_nU_n$. Значит, $l(V) \subseteq \mathrm{St}(K)$ и отображение l непрерывно.

Убедимся в том, что отображение l открыто. Пусть V — произвольная открытая подгруппа из $\mathfrak{A}$, $K = \{V\}$. Если $g \in V$, то $\hat{g}(V) = gV = V$. Значит, $l(V) = \mathrm{St}(K)$. Поскольку $\mathrm{St}(K)$ — открытое подмножество из $S(X)$, то отображение l открыто. Итак, l — вложение группы G в группу $S(X)$.

Покажем, что вес τ группы G равен $|X|$ и, значит, группу $S(X)$ можно отождествить с группой $S(\tau)$. Поскольку левые смежные классы группы G по всем открытым подгруппам из $\mathfrak{A}$ образуют базу топологии группы G, то $\tau \leq |X|$. Пусть $|\mathfrak{A}| = \alpha$, γ — наименьший кардинал со свойством $\gamma \geq |G/U|$, где U пробегает все подгруппы из $\mathfrak{A}$, G/U — фактор-пространство левых смежных классов группы G по подгруппе U. Так как $X = \bigcup\{G/U: U \in \mathfrak{A}\}$, то $|X| = \alpha\gamma$. Поскольку $\alpha \leq \tau$, $\gamma \leq \tau$, то $|X| \leq \tau$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что вес группы $S(\tau)$ равен τ.

***Замечание* 1.** Универсальная группа $A(\tau)$ в классе всех 0-мерных абелевых групп веса τ строится столь же просто. Зафиксируем универсальную дискретную абелеву группу мощности τ. В качестве $D(\tau)$ можно взять подходящую делимую группу [4]. Искомая группа $A(\tau)$ — это тихоновское произведение τ экземпляров группы $D(\tau)$.

2. Вложение 0-мерной группы в кольцо эндоморфизмов. Пусть A — дискретная абелева группа, $\mathrm{End}(A)$ — кольцо всех эндоморфизмов группы A с топологией поточечной сходимости. Для подмножества $K \subseteq A$ обозначим $\mathrm{Ann}(K) = \{\varphi \in \mathrm{End}(A) : \varphi(a) = 0$ для всех $a \in K\}$. Базу окрестностей нуля кольца $\mathrm{End}(A)$ образуют левые идеалы $\mathrm{Ann}(K)$, где K пробегает все конечные подмножества группы A. Как известно [5], в этой топологии $\mathrm{End}(A)$ — топологическое кольцо.

Теорема 2. *Любая 0-мерная группа G вложима в мультикативную полугруппу кольца эндоморфизмов $\mathrm{End}(A)$ подходящей дискретной абелевой группы A.*

Доказательство. Пусть X — множество всех левых смежных классов группы G по открытым подгруппам, R — дискретное ассоциативное кольцо с единицей. Носителем функции $f: X \to R$ называется множество $\mathrm{supp}\, f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Рассмотрим множество A всех функций $f: X \to R$ с конечными носителями. Формула $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ вводит на A структуру абелевой группы. Топологизируем группу A дискретно. Положим $f_g(x) = f(gx)$ для $f \in A$, $g \in G$. Каждому элементу $g \in G$ сопоставим эндоморфизм $\overline{g} \in \mathrm{End}(A)$, где $\overline{g}(f) = f_g$. Отображение $L: G \to \mathrm{End}(A)$ определим правилом $L(g) = \overline{g}$. Просто проверить, что L — изоморфизм группы G на подгруппу мультипликативной полугруппы кольца $\mathrm{End}(A)$.

Проверим непрерывность отображения L в единице e группы G. Пусть $K = \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq A$, $Y = \mathrm{supp}\, f_1 \cup \ldots \cup \mathrm{supp}\, f_n = \{x_1, \ldots, x_m\}$. По определению множества X $x_1 = g_1U_1, \ldots, x_m = g_mU_m$, где $g_1, \ldots, g_m \in G$, $U_1, \ldots, U_m$ — открытые подгруппы группы G. Подберем открытую подгруппу V группы G так, чтобы $g_1^{-1}Vg_1 \subseteq U_1, \ldots, g_m^{-1}Vg_m \subseteq U_m$. Такой выбор подгруппы V обеспечивает выполнение соотношений $gx_1 = x_1, \ldots, gx_m = x_m$ для всех $g \in V$. Очевидно также, что $gx \notin Y$, если $x \notin Y$, $g \in V$. Возьмем произвольные элементы $g \in V$, $f \in K$ и рассмотрим эндоморфизм $\bar{g} - \bar{e}$. Положим $h = (\bar{g} - \bar{e})(f)$. Если $x \in Y$, то $h(x) = f_g(x) - f(x) = 0$ по выбору подгруппы V. Если же $x \notin Y$, то $gx \notin Y$ и $f_g(x) = f(x) = 0$. Поэтому функция h тождественно равна нулю. Следовательно, $\bar{g} - \bar{e} \in \mathrm{Ann}(K)$ и $\bar{g} \in \bar{e} + \mathrm{Ann}(K)$. Осталось заметить, что множества $\bar{e} + \mathrm{Ann}(K)$, где K пробегает все конечные подмножества из A, образуют базу окрестностей единицы в кольце $\mathrm{End}(A)$. Убедимся в том, что для любой открытой подгруппы $V \subseteq G$ подгруппа $L(V)$ открыта в $L(G)$. Определим функцию $f\colon X \to R$, полагая $f(x) = 1$, если $x = V$, и $f(x) = 0$, если $x \neq V$. Если $\bar{g} \in \bar{e} + \mathrm{Ann}(\{f\})$, то $g \in V$. Значит, $((\bar{e} + \mathrm{Ann}(\{f\})) \cap L(G)) \subseteq L(V)$ и теорема доказана.

Пусть G — топологическая группа, R — ассоциативное топологическое кольцо с единицей. По определению из работы [3] кольцевая топология группового кольца $R[G]$ продолжает топологии группы G и кольца R, если эта топология индуцирует на канонических образах G и R в $R[G]$ образы их исходных топологий.

Следствие. *Топологии 0-мерной группы G и дискретного ассоциативного кольца с единицей R можно продолжить до кольцевой топологии группового кольца $R[G]$.*

Доказательство. Рассмотрим вложение $L\colon G \to \mathrm{End}(A)$, построенное при доказательстве теоремы 2. Обозначим через S совокупность всех элементов из $\mathrm{End}(A)$ вида $r_1\bar{g}_1 + \ldots + r_k\bar{g}_k$, где $r_1, \ldots, r_k \in R$, $g_1, \ldots, g_k$ — различные элементы группы G. Достаточно показать, что кольцо S изоморфно $R[G]$. Поскольку кольцо S — естественный гомоморфный образ кольца $R[G]$, достаточно убедиться в том, что эндоморфизм $r_1\bar{g}_1 + \ldots + r_k\bar{g}_k$ ненулевой, если $r_1 \neq 0$. Подберем такую открытую подгруппу V из G, чтобы $g_1V \neq g_2V, \ldots, g_1V \neq g_kV$. Определим функцию $f\colon X \to R$, полагая $f(x) = 1$, если $x = g_1V$, и $f(x) = 0$, если $x \neq g_1V$. Вычислим значение функции $h = (r_1\bar{g}_1 + \ldots + r_k\bar{g}_k)(f)$ в точке $x = V$. Ясно, что $h(x) = r_1f(g_1x) + \ldots + r_kf(g_kx)$. Так как $f(g_1x) = 1$, $f(g_2x) = \ldots = f(g_kx) = 0$, $r_1 \neq 0$, то $h(x) \neq 0$. Следствие доказано.

Замечание 2. Опишем еще один способ вложения 0-мерных групп в топологические кольца. Из этого вложения, в частности, следует, что группа гомеоморфизмов канторова куба веса τ универсальна в классе всех 0-мерных групп веса τ. Пусть G — 0-мерная группа веса τ, $\mathfrak{A}$ — база окрестностей единицы группы G из открытых подгрупп, $|\mathfrak{A}| \leq \tau$. Зафиксируем дискретную группу D порядка 2 и рассмотрим группу A всех функций $f\colon X \to D$ с тихоновской топологией. Кольцо $\mathrm{End}(A)$ всех непрерывных эндоморфизмов компактной группы A снабдим равномерной топологией. Базу окрестностей нуля в этой топологии образуют множества $\{\varphi \in \mathrm{End}(A)\colon \varphi(a) \in U$ для всех $a \in A\}$, где U пробегает все окрестности нуля группы A. Искомым вложением является отображение $L\colon G \to \mathrm{End}(A)$, построенное при доказательстве теоремы 2.

1. *Нерешенные* задачи топологической алгебры: Сб. ст. – Кишинев: Штиинца, 1985. – 38 с.
2. *Успенский В. В.* Универсальная топологическая группа со счетной базой // Функцион. анализ и его прил. – 1986. – **20**, № 2. – С. 86 – 87.
3. *Арнаутов В. И., Михалев А. В.* О продолжении топологий групп и кольца на их групповое кольцо // Мат. исследования. – 1985. – Вып. 85. – С. 8 – 20.
4. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. ч. I. – М.: Мир, 1974. – 335 с.
5. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. ч. II. – М.: Мир, 1977. – 416 с.

Получено 27.01.93