УДК 517.929

А. М. Самойленко, чл.-корр. НАН Украины,
Г. П. Пелюх, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКИ ОГРАНИЧЕННЫЕ НА ВСЕЙ ОСИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА*

We study properties of solutions, asymptotically bounded on the entire axis, of a certain class of systems of differential-difference equations of neutral type.

Досліджені властивості обмежених на всій осі розв'язків одного класу систем диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу.

В [1] для системы нелинейных дифференциально-разностных уравнений вида

$$x'(t) = Ax(t) + Bx'(t+1) + Cx(t+1) + F(t, x(t), x(t+1), x'(t+1)), \quad (1)$$

где $t \in (-\infty, +\infty)$, A, B, C — постоянные вещественные $n \times n$-матрицы, $F: R \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$, доказана теорема о существовании и единственности ограниченного на всей оси решения $w(t)$. При этом предполагались выполненными следующие условия:

1) собственные значения λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы A удовлетворяют соотношениям $\operatorname{Re}\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $|B| + (2L/\alpha)|BA + C| < 1$, где L, α — некоторые положительные постоянные;

3) вектор-функция $F(t, x, y, z)$ непрерывна по всем переменным и удовлетворяет условию Липшица

$$|F(t, x_1, y_1, z_1) - F(t, x_2, y_2, z_2)| \leq l(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|),$$

где (t, x_1, y_1, z_1), $(t, x_2, y_2, z_2) \in R \times R^n \times R^n \times R^n$, $l = \mathrm{const} > 0$;

4)

$$\sup_{t \in R} |F(t, 0, 0, 0)| = N < \infty$$

В настоящей работе нас будут интересовать решения, ограниченные при $t \in [0, \infty)$ и находящиеся в достаточно малой окрестности решения $w(t)$.

Выполняя в (1) замену переменных

$$x(t) = y(t) + w(t), \quad (2)$$

получаем систему уравнений

$$y'(t) = Ay(t) + By'(t+1) + Cy(t+1) + \Phi(t, y(t), y(t+1), y'(t+1)), \quad (3)$$

где

$$\begin{gathered}\Phi(t, y(t), y(t+1), y'(t+1)) = \\ = F(t, y(t) + w(t), y(t+1) + w(t+1), y'(t+1) + w'(t+1)) - \\ - F(t, w(t), w(t+1), w'(t+1)).\end{gathered}$$

В силу 1 существует неособая постоянная $n \times n$-матрица $\bar{C}$, приводящая

* Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологии.

матрицу A к виду $A = \tilde{C}^{-1}\operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)\tilde{C}$, где Λ_1, Λ_2 — постоянные $p \times p$- и $n-p \times n-p$-матрицы, собственные значения которых удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_1) > 0, \ j = 1, 2, \ldots, p;$$

$$\operatorname{Re}\lambda_i(\Lambda_2) < 0, \ i = p+1, 2, \ldots, n.$$

Обозначим через $G(t)$ матричную функцию

$$G(t) = \begin{cases} -\tilde{C}^{-1}\operatorname{diag}\left(e^{\Lambda_1 t}, 0\right)\tilde{C} & \text{при} \quad t < 0; \\ \tilde{C}^{-1}\operatorname{diag}\left(0, e^{\Lambda_2 t}\right)\tilde{C} & \text{при} \quad t > 0, \end{cases}$$

которая удовлетворяет условиям:

а) $G(+0) - G(-0) = E$, где E — единичная $n \times n$-матрица;

б) $$|G(t)| \le \begin{cases} Le^{\alpha_1 t}, & t < 0; \\ Le^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}, & t > 0, \end{cases}$$

где L, α_1, α_2 — некоторые положительные постоянные;

в) $$G'(t) = AG(t), \ t \ne 0.$$

Теорема. *Пусть выполняются условия* 1 – 4. *Тогда при достаточно малом* l *система уравнений* (3) *имеет* $n-p$*-параметрическое семейство решений* $y(t) = y(t, c)$, $c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n)$, c_i, $i = p+1, \ldots, n$, — *произвольные постоянные, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t \to \infty} y(t, c) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} z(t, c) = {} & (BA + C)\Gamma(t+1)c + Bz(t+1, c) + \\ & + (BA + C)\int_0^\infty G(t+1-\tau)z(\tau, c)\,d\tau + \\ & + \Phi\Bigg(t, \Gamma(t)c + \int_0^\infty G(t-\tau)z(\tau, c)\,d\tau, \ \Gamma(t+1)c + \\ & + \int_0^\infty G(t+1-\tau)z(\tau, c)\,d\tau, \ A\Gamma(t+1)c + z(t+1, c) + \\ & + A\int_0^\infty G(t+1-\tau)z(\tau, c)\,d\tau\Bigg), \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\Gamma(t) = \tilde{C}^{-1}\operatorname{diag}\left(0, e^{\Lambda_2 t}\right)\tilde{C}$, и покажем, что она имеет $n-p$-параметрическое семейство решений $z(t, c)$, $c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n)$, c_i, $i = p+1, \ldots$ $\ldots, n$, — произвольные постоянные, удовлетворяющих условию

$$|z(t, c)| = M_* e^{-\alpha_1 t}, \tag{6}$$

M_* — некоторая положительная постоянная.

Для этого воспользуемся методом последовательных приближений, причем последовательные приближения определим формулами

$$z_0(t,c)=0,$$

$$z_m(t,c)=(BA+C)\Gamma(t+1)c+Bz_{m-1}(t+1,c)+$$

$$+(BA+C)\int\limits_0^\infty G(t+1-\tau)z_{m-1}(\tau,c)d\tau+ \tag{7}$$

$$+\Phi\Bigg(t,\,\Gamma(t)c+\int\limits_0^\infty G(t-\tau)z_{m-1}(\tau,c)d\tau,\ \Gamma(t+1)c+$$

$$+\int\limits_0^\infty G(t+1-\tau)z_{m-1}(\tau,c)d\tau,\ A\Gamma(t+1)c+z_{m-1}(t+1,c)+$$

$$+A\int\limits_0^\infty G(t+1-\tau)z_{m-1}(\tau,c)d\tau\Bigg),\quad t\ge 0,\quad m=1,2,\ldots$$

Докажем, что справедлива оценка

$$|z_m(t,c)-z_{m-1}(t,c)|\le M\Delta^{m-1}e^{-\alpha_1 t}|c|,\quad m\ge 1, \tag{8}$$

где M — некоторая положительная постоянная, $|B|+(2L/\alpha)|BA+C|<$ $<\Delta<1$.

Действительно, принимая во внимание условие 3, соотношение (7) и условие б), получаем

$$|z_1(t,c)-z_0(t,c)|=|(BA+C)\Gamma(t+1)c+$$

$$+\Phi(t,\Gamma(t)c,\Gamma(t+1)c,A\Gamma(t+1)c)|\le|BA+C||\Gamma(t+1)c|+$$

$$+l\Big(|\Gamma(t)c|+|\Gamma(t+1)c|+|A||\Gamma(t+1)c|\Big)\le Me^{-\alpha_1 t}|c|$$

и, следовательно, оценка (8) выполняется при $m=1$. Предположим теперь, что оценка (8) доказана для некоторого $m>1$. Тогда в силу (7), условия б) и (8) получаем

$$|z_{m+1}(t,c)-z_m(t,c)|\le|B||z_m(t+1,c)-z_{m-1}(t+1,c)|+$$

$$+|BA+C|\int\limits_0^\infty|G(t+1-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau+$$

$$+l\Bigg(\int\limits_0^\infty|G(t-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau+$$

$$+\int\limits_0^\infty|G(t+1-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau+$$

$$+|z_m(t+1,c)-z_{m-1}(t+1,c)|+$$

$$+|A|\int\limits_0^\infty|G(t+1-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau\Bigg)\le$$

$$\le (|B|+l)\,|z_m(t+1,c)-z_{m-1}(t+1,c)| +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)\int\limits_0^{t+1}|G(t+1-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)\int\limits_{t+1}^{\infty}|G(t+1-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau +$$

$$+ l\int\limits_0^{t}|G(t-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau +$$

$$+ l\int\limits_t^{\infty}|G(t-\tau)||z_m(\tau,c)-z_{m-1}(\tau,c)|d\tau \le$$

$$\le (|B|+l)\,M\Delta^{m-1}e^{-\alpha_1(t+1)}|c| +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)LM\Delta^{m-1}|c|\int\limits_0^{t+1} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(t+1-\tau)}e^{-\alpha_1\tau}d\tau +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)LM\Delta^{m-1}|c|\int\limits_{t+1}^{\infty} e^{\alpha_1(t+1-\tau)}e^{-\alpha_1\tau}d\tau +$$

$$+ lLM\Delta^{m-1}|c|\int\limits_0^{t} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)(t-\tau)}e^{-\alpha_1\tau}d\tau +$$

$$+ lLM\Delta^{m-1}|c|\int\limits_t^{\infty} e^{\alpha_1(t-\tau)}e^{-\alpha_1\tau}d\tau \le$$

$$\le (|B|+l)\,M\Delta^{m-1}e^{-\alpha_1(t+1)}|c| +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)LM\,\alpha_2^{-1}\Delta^{m-1}|c|e^{-\alpha_1(t+1)} +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)LM\Delta^{m-1}\frac{1}{2\alpha_1}|c|e^{-\alpha_1(t+1)} +$$

$$+ \frac{l}{\alpha_2}LM\Delta^{m-1}|c|e^{-\alpha_1 t} + \frac{l}{2\alpha_1}LM\Delta^{m-1}|c|e^{-\alpha_1 t} \le$$

$$\le M\Delta^{m-1}|c|e^{-\alpha_1 t}\Big[\,|B|+l +$$

$$+ (|BA+C|+l+l|A|)L\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{2\alpha_1}\right) + lL\left(\frac{l}{\alpha_2}+\frac{l}{2\alpha_1}\right)\Big] \le$$

$$\le M\Delta^{m-1}|c|e^{-\alpha_1 t}\left[\,|B|+l+\frac{2L}{\alpha}(|BA+C|+l+l|A|)+\frac{2L}{\alpha}\,l\,\right],$$

где $\alpha=\min\{\alpha_1,\alpha_2\}$. Так как при достаточно малом l в силу условия 2 имеем

$$|B|+l+\frac{2L}{\alpha}(|BA+C|+l+l|A|)+\frac{2L}{\alpha}\,l<\Delta,$$

то $|z_{m+1}(t,c)-z_m(t,c)| \leq M\Delta^m e^{-\alpha_1 t}|c|$.

Следовательно, все приближения $z_m(t,c)$, $m = 0, 1, \ldots$, имеют смысл и оценка (8) выполняется для всех $m \geq 0$.

Из (8) вытекает, что последовательность $\{z_m(t,c),\ m = 0, 1, \ldots\}$ равномерно сходится в области D: $0 \leq t < \infty$, $|c| \leq c_* < \infty$ к некоторой непрерывной вектор-функции $z(t,c)$, удовлетворяющей системе уравнений (5) (в этом легко убедиться, если перейти в (7) к пределу при $m \to \infty$).

Поскольку

$$z(t,c) = \sum_{m=1}^{\infty} (z_m(t,c) - z_{m-1}(t,c)),$$

то в силу (8) получаем

$$|z(t,c)| \leq \frac{M}{1-\Delta} c_* e^{-\alpha_1 t}$$

и, таким образом, вектор-функция $z(t,c)$ удовлетворяет условию (6).

Непосредственной подстановкой в (3) можно убедиться, что семейство вектор-функций

$$y(t,c) = \Gamma(t)c + \int_0^{\infty} G(t-\tau)z(\tau,c)d\tau, \tag{9}$$

представляет собой $n-p$-параметрическое семейство решений системы уравнений (3). Так как $\Gamma(t) = \tilde{C}^{-1}\operatorname{diag}\left(0, e^{\Lambda_2 t}\right)\tilde{C}$ и выполняется соотношение (6), то легко показать, что для любой вектор-функции $y(t,c)$, определяемой формулой (9), выполняется условие (4). Теорема доказана.

Из доказанной выше теоремы и равенства (2) вытекает, что при выполнении условий 1 – 4 система уравнений (1) имеет $n-p$-параметрическое семейство решений $x(t,c)$, где $c = (0, \ldots, 0, c_{p+1}, \ldots, c_n)$, определенных при $t \in [0, \infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to \infty} (x(t,c) - w(t)) = 0.$$

1. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* О существовании и единственности ограниченных на всей оси решений систем нелинейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 390 – 394.

Получено 17.06.93