УДК 517. 43

М. Н. Феллер, д-р физ.-мат. наук (УкрНПДО, Киев)

ЕЩЕ ОДНО УСЛОВИЕ ГАРМОНИЧНОСТИ ФУНКЦИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ (ТРАНСЛЯЦИОННО НЕПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ)

A criterion of harmonicity of functions on a Hilbert space is given in the case where second derivatives are nonnegative without using an assumption that they are mutually independent. This assumption is replaced by a weaker condition.

Наведено критерій гармонічності функцій на гільбертовому просторі у випадку, коли другі похідні невід'ємні. При цьому зовсім відсутнє припущення про їх взаємну незалежність, яке замінюється іншою, більш слабкою умовою.

Встречаются функции, для которых условия из [1 – 4] не выполняются, но которые, тем не менее, гармоничны. Тогда может оказаться полезным еще одно условие, которое приводится в этой статье — условие гармоничности для случая функций на гильбертовом пространстве, у которых матрица Грамма нормированной последовательности отклонений вторых производных от их средних значений является трансляционно неположительной матрицей.

Приведем пример функции, для которой условия гармоничности из [1 – 4] не выполняются, но гармоничность которой μ-почти всюду вытекает из теоремы этой статьи.

Рассмотрим функцию

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty}{}^{\bullet} \frac{1}{\ln 2k\lambda_{2k-1}\lambda_{4k-2}} \left(e^{y_{2k-1}+y_{4k-2}} + e^{-2y_{2k-1}} + e^{-2y_{4k-2}}\right)$$

на l_2, где $y_k = \lambda_k x_k$, $K^{-1/2} e_k = \lambda_k e_k$, K — корреляционный оператор гауссовой меры μ в l_2, $e_k = (\underbrace{0, \ldots, 1}_{k}, 0, \ldots)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Лапласиан Леви этой функции

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x),$$

где $\xi_k(x) = \partial^2 F(x)/\partial x_k^2$ и

$$\xi_{i_k}(x) = 0 \quad \text{для} \quad i_k \neq 2k-1,\ 4k-2,$$

$$\xi_{2k-1}(x) = \frac{\lambda_{2k-1}}{\ln 2k\lambda_{4k-2}} \left(e^{y_{2k-1}+y_{4k-2}} + 4e^{-2y_{2k-1}}\right), \tag{1}$$

$$\xi_{4k-2}(x) = \frac{\lambda_{4k-2}}{\ln 2k\lambda_{2k-1}} \left(e^{y_{2k-1}+y_{4k-2}} + 4e^{-2y_{4k-2}}\right), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Условие гармоничности из [1]

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{l_2} |\xi_k(x)| \mu(dx) = O\left(\frac{n}{\psi_\varepsilon(n)}\right),$$

где

$$\psi_\varepsilon(n) = \ln n \ldots \underbrace{\ln \ldots \ln}_{m-1} n \left(\underbrace{\ln \ldots \ln}_{m} n\right)^{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0,$$

не выполняется, поскольку

$$\int_{l_2} |\xi_{2k-1}(x)|\mu(dx) = \frac{c\lambda_{2k-1}}{\ln 2k\lambda_{4k-2}}, \quad \int_{l_2} |\xi_{4k-2}(x)|\mu(dx) = \frac{c\lambda_{4k-2}}{\ln 2k\lambda_{2k-1}}.$$

Условия из [2] $\Gamma_n/\Gamma_{n-1} = 1 - O(\ln^2 n/n\psi_\varepsilon(n))$ и из [3] $\lim\limits_{n\to\infty} \Gamma_n > 0$, где Γ_n — определитель Грамма функций

$$\{\hat{\eta}_k(x)\}_1^n, \quad \hat{\eta}_k(x) = \eta_k(x)/\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(l_2,\mu)}, \quad \eta_k(x) = \xi_k(x) - \int_{l_2} \xi_k(x)\mu(dx),$$

не выполняются, поскольку все элементы матрицы $\left\|(\hat{\eta}_j, \hat{\eta}_k)_{\mathfrak{L}_2(l_2,\mu)}\right\|_{j,k=1}^\infty$ равны нулю за исключением $(\hat{\eta}_k, \hat{\eta}_k)_{\mathfrak{L}_2(l_2,\mu)} = 1$, $(\hat{\eta}_{2k-1}, \hat{\eta}_{4k-2})_{\mathfrak{L}_2(l_2,\mu)} = -C$, $0 < C < 1$, и поэтому $\Gamma_{4n-6} = \ldots = \Gamma_{4n-3} = (1-C^2)^{n-1}$. Наконец, условие гармоничности из [4] также не выполняется, поскольку матрица Грамма последовательности $\{\hat{\eta}_k(x)\}_1^\infty$ не является якобиевой матрицей.

Тем не менее, функция $F(x)$ гармонична μ-почти всюду. Она удовлетворяет условиям приведенной ниже теоремы, из которой и будет вытекать ее гармоничность.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Если функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству Y пространства H (т. е. оператор $F''(x) \in \{Y \to Y'\}$, Y' — сопряженное к Y пространство), то лапласиан Леви определяется, если он существует, формулой

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F''(x)f_k, f_k)_H, \tag{2}$$

где $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H, $f_k \in Y$ (см., например, [5]).

2. Пусть $\mathfrak{L}_2(H,\mu)$ — гильбертово пространство функций $F(x)$ на H, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором K и нулевым средним, K — ядерный положительный оператор такой, что $\|x\|_H \le \|\mathrm{K}^{-1/2}x\|_H$, $x \in D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$ ($D_{\mathrm{K}^{-1/2}}$ — область определения оператора $\mathrm{K}^{-1/2}$).

Предположим, что $H_\alpha \subset H_0 \subset H_{-\alpha}$, $H_0 \equiv H$, $\alpha > 0$, — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств H_β, $-\infty < \beta < \infty$, с порождающим оператором $\mathrm{K}^{-1/2}$ ($\mathrm{K}^{1/2}$ — оператор Гильберта – Шмидта).

Теорема. *Пусть функция $F(x)$ дважды дифференцируема по подпространству H_α и $\xi_k(x) = (F''(x)f_k, f_k)_H \in \mathfrak{L}_2(H,\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, где $\{f_k\}_1^\infty$ — некоторый ортонормированный базис в H, $f_k \in H_\alpha$. Если функции $\xi_k(x)$ удовлетворяют условиям $\xi_k(x) \ge 0$,*

$$\int_H \xi_j(x)\xi_k(x)\mu(dx) \le \int_H \xi_j(x)\mu(dx) \int_H \xi_k(x)\mu(dx)$$

$$\text{для } j \ne k, \quad \sup_{k\ge1} \int_H \xi_k(x)\mu(dx) \le \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|\eta_k\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}{k^2} < \infty,$$

где

$$\eta_k(x) = \xi_k(x) - \int_H \xi_k(x)\mu(dx),$$

и если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_H \xi_k(x)\mu(dx) = 0,$$

то $\Delta F(x) = 0$ *почти для всех* $x \in H$.

Доказательство. Вначале заметим, что матрица Грамма

$$\left\|(\hat\eta_j, \hat\eta_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}\right\|_{j,k=1}^{\infty}$$

функций $\{\hat\eta_k(x)\}_1^{\infty}$, где $\hat\eta_k(x) = \eta_k(x)/\|\eta_k\|_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$ является трансляционно неположительной матрицей*, поскольку $(\hat\eta_k, \hat\eta_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = 1$, а из условия теоремы

$$\int_H \xi_j(x)\xi_k(x)\mu(dx) \le \int_H \xi_j(x)\mu(dx) \int_H \xi_k(x)\mu(dx)$$

для $j \ne k$ следует, что $(\hat\eta_j, \hat\eta_k)_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} \le 0$ для $j \ne k$, $j, k = 1, 2, \ldots$.

Лапласиан Леви (2) функции $F(x)$ есть предел последовательности средних арифметических функций $\{\xi_k(x)\}_1^n$ — $(1/n)\sum_{k=1}^n \xi_k(x)$, где $\xi_k(x) = (F''(x)f_k, f_k)_H$. Всякая функция $\Phi(x)$ на H, измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, есть случайная величина на вероятностном пространстве $\{H, \mathfrak{A}, \mu\}$. При этом ее математическое ожидание $\mathrm{M}\Phi = \int_H \Phi(x)\mu(dx)$, дисперсия $\mathrm{D}\Phi = \|\Phi - \mathrm{M}\Phi\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}$, а сходимости последовательности случайных величин с вероятностью единица соответствует сходимость последовательности измеримых функций почти всюду на H относительно меры μ.

Таким образом, $\{\xi_k(x)\}_1^{\infty}$ — последовательность стохастически зависимых случайных величин, причем по условиям теоремы

$$\xi_k(x) \ge 0, \quad \mathrm{M}\xi_j\xi_k \le \mathrm{M}\xi_j \mathrm{M}\xi_k \quad \text{для} \quad j \ne k,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{D}\xi_k}{k^2} < \infty, \quad \sup_{k\ge1} \int_H \xi_k(x)\mu(dx) < \infty.$$

Согласно теореме Н. Этемади [6]

$$(1/n)\sum_{k=1}^n (\xi_k(x) - \mathrm{M}\xi_k) \to 0$$

почти наверное. Но по условую теоремы $(1/n)\sum_{k=1}^n \mathrm{M}\xi_k \to 0$, поэтому

* Матрица $\|a_{jk}\|_{j,k=1}^{\infty}$ называется трансляционно неположительной, если при некотором $\nu > 0$ $a_{jk} - \nu\delta_{jk} \le 0$ (δ_{jk} — символ Кронекера), $j, k = 1, 2, \ldots$.

$(1/n)\sum_{k=1}^{n}\xi_k(x)\to 0$ почти наверное, т. е.

$$\Delta F(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F''(x)f_k, f_k)_H = 0$$

почти для всех $x\in H$.

3. Продолжим рассмотрение примера. Функции $\xi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, задаваемые выражением (1), удовлетворяют условиям теоремы: $\xi_{2k-1}(x) > 0$, $\xi_{4k-2}(x) > 0$, $\xi_{i_k}(x) = 0$ для $i_k \neq 2k-1,\ 4k-2$, поэтому $\xi_k(x)\geq 0$;

$$\int_{l_2}\xi_{2k-1}(x)\xi_{4k-2}(x)\mu(dx) = \frac{5e^4+8e}{\ln^2 2k} <$$

$$< \int_{l_2}\xi_{2k-1}(x)\mu(dx)\int_{l_2}\xi_{4k-2}(x)\mu(dx) = \frac{(4e^2+e)^2}{\ln^2 2k},$$

$$\int_{l_2}\xi_{2i-1}(x)\xi_{4l-2}(x)\mu(dx) = \int_{l_2}\xi_{2i-1}(x)\mu(dx)\int_{l_2}\xi_{4l-2}(x)\mu(dx)$$

для $i\neq l$, поэтому

$$\int_{l_2}\xi_j(x)\xi_k(x)\mu(dx) \leq \int_{l_2}\xi_j(x)\mu(dx)\int_{l_2}\xi_k(x)\mu(dx);$$

$$\|\eta_{2k-1}\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \frac{b\lambda^2_{2k-1}}{\ln^2 2k\,\lambda^2_{4k-2}},\quad \|\eta_{4k-2}\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)} = \frac{b\lambda^2_{4k-2}}{\ln^2 2k\,\lambda^2_{2k-1}},$$

а значит,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|\eta_k\|^2_{\mathfrak{L}_2(H,\mu)}}{k^2} < \infty;$$

$$\int_{l_2}\xi_{2k-1}(x)\mu(dx) = \frac{c\lambda_{2k-1}}{\ln 2k\,\lambda_{4k-2}},\quad \int_{l_2}\xi_{4k-2}(x)\mu(dx) = \frac{c\lambda_{4k-2}}{\ln 2k\,\lambda_{2k-1}}.$$

Отсюда вытекает

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{l_2}\xi_k(x)\mu(dx) = 0$$

(b, c — постоянные). Согласно теореме $\Delta F(x) = 0$ почти для всех $x\in l_2$.

1. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1576 – 1579.
2. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. II // Там же. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1687 – 1693.
3. *Феллер М. Н.* Запас гармонических функций бесконечного числа переменных. III // Там же. – 1992. – **44**, № 3. – С. 417 – 423.
4. *Феллер М. Н.* Необходимое и достаточное условие гармоничности функций бесконечного числа переменных (якобиевый случай) // Там же. – 1994. – **46**, № 6. – С. 785 – 788.
5. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 97 – 140.
6. *Etemadi N.* On the laws of large numbers for nonnegative random variables // J. Multivar. Anal. – 1983. – **13**, № 1. – P. 187 – 193.

Получено 13.08.93