УДК 517.5

А. В. Бондарь, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ЛОКАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ И ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

We prove theorems of the type of local principle of maximum and theorems on relation between limit sets, useful for studying singular sets.

Доводяться теореми типу локального принципу максимума, а також теореми про співвідношення між граничними множинами, які можуть бути використані при дослідженні особливих множин.

Пусть G — открытое подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для любого $r > 0$ и точки $a \in \mathbb{C}$ обозначим через $m(\partial G, a, r)$ линейную меру множества $e(\partial G, a, r)$, состоящую из тех $t \in (0, r)$, для которых окружность $S_t(a) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = t\}$ пересекает границу ∂G множества G. Для вещественнозначной функции u, определенной в G, и точки $\zeta \in \partial G$ обозначим

$$b(u, \zeta) = \overline{\lim}\, u(z), \quad z \to \zeta, \quad z \in G;$$

$$M(u, r) = \sup\{u(z) : z \in G, \ |z| = r\};$$

$$M(u, a, r) = \sup\{u(z) : z \in G, \ |z-a| = r\}.$$

Теорема 1. *Пусть G — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, E — подмножество ∂G, имеющее логарифмическую емкость нуль и u — субгармоническая в G функция, ограниченная сверху на каждой ограниченной части G и удовлетворяющая условиям:*

а) $b(u, \zeta) \le M = \mathrm{const} \quad \forall\, \zeta \in \partial G \setminus E$;

б) *либо* $\lim\limits_{r \to \infty} m(\partial G, 0, r) r^{-1} = 1$ *и* $\underline{\lim}\limits_{r \to \infty} M(u, r) r^{-1} = 0$,

либо $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}}\, m(\partial G, 0, r) r^{-1} = 1$ *и* $\overline{\lim\limits_{r \to \infty}}\, M(u, r) r^{-1} = 0$.

Тогда $u(z) \le M \quad \forall\, z \in G$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 1, напомним определение предельной компоненты [1, с. 197]. Пусть u — субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{C}$ и $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность компактов, что $K_n \subset \subset \operatorname{int} K_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = D$. Пусть $a \in D$; тогда найдется такое n_0, что $a \in \in K_n \ \forall\, n > n_0$. Если $u(a) \ge M = \mathrm{const} > -\infty$, то для $n > n_0$ через $\mathbb{C}_n(a, M)$ обозначим компоненту множества $\{z \in K_n : u(z) \ge M\}$, содержащую точку a. Множество

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}(a, M, D) = \bigcup_{n = n_0} \mathbb{C}_n(a, M)$$

называется предельной компонентой множества $\{z : u(z) \ge M\}$ в D.

***Доказательство теоремы* 1.** Предположим, что теорема 1 не верна. Тогда найдется такая точка $a \in G$, в которой $u(a) > M$. Пусть D — компонента открытого множества G, содержащая точку a и $\mathbb{C} = \mathbb{C}(a, M, D)$ — предельная компонента множества $\{z : u(z) \ge M\}$ в D. Тогда согласно теореме 4.13 [1, с. 197] функция

$$u_1(z) = \begin{cases} u(z), & z \in \mathbb{C}; \\ M, & z \in D \setminus \mathbb{C}, \end{cases} \tag{1}$$

субгармонична в области D. Продолжим теперь u_1 на всю плоскость $\mathbb{C}$, положив

$$v(z) = \begin{cases} u_1(z), & z \in D; \\ M, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}; \\ \overline{\lim\limits_{\zeta \to z,\ \zeta \in D}}\, u_1(\zeta), & z \in \partial D. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку $\partial D \subset \partial G$, то из условия а) и определения функции v следует, что для любой точки $z \in \partial D \setminus (E \cap \partial D)$ выполняется неравенство $\overline{\lim\limits_{\zeta \to z,\ \zeta \in D}}\, v(z) \le$ $\le M$. Поэтому, применяя лемму 1 [2, с. 19], заключаем, что функция v субгармонична на всей плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть B_r — открытый круг радиуса r с центром в нуле и для $r > |a|$ G_r — компонента открытого множества $B_r \setminus \partial D$, содержащая фиксированную ранее точку $a \in D$, в которой $u(a) > M$. Обозначим через $\omega_r(z)$ гармоническую меру множества $\Gamma_r = \partial G_r \cap B_r$ в точке z относительно области G_r.

Согласно теореме 2.4.7 [3, с. 129] для $\omega_r(z)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\omega_r(z) \ge \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(r - |z|)\, m(r)}{(r + |z|)(2r - m(r))}, \tag{3}$$

где $m(r) = m(\Gamma_r, 0, r)$.

Рассмотрим функцию

$$w_r(z) = v(z) - \omega_r(z) M - (1 - \omega_r(z))\, M(r, v).$$

Эта функция субгармонична и ограничена в области G_r, а при приближении z изнутри G_r к любой точке $\zeta \in \partial G_r$, не принадлежащей множеству $J_r \cup (E \cap \cap \partial G_r)$, где J_r — множество иррегулярных граничных точек области G_r, имеющему нулевую емкость, значения этой функции неположительны. Поэтому согласно принципу максимума $w_r(z) \le 0 \ \ \forall z \in G_r$. В частности, при $z = a$ имеем

$$u(a) = v(a) \le \omega_r(a) M + (1 - \omega_r(a))\, M(r, v). \tag{4}$$

Условие б) доказываемой теоремы содержит два альтернативных условия. Рассмотрим сначала первое из них. А именно, пусть

$$\lim_{r \to \infty} m(\partial G, 0, r) r^{-1} = 1 \quad \text{и} \quad \varliminf_{r \to \infty} M(u, r) r^{-1} = 0. \tag{5}$$

Докажем, что в этом случае

$$\lim_{r \to \infty} m(\Gamma_r, 0, r) r^{-1} = 1. \tag{6}$$

Отметим прежде всего, что область D, содержащая точку a и являющаяся компонентой открытого множества G, должна быть неограниченной, так как в противном случае субгармоническая в D функция u была бы ограниченной в D, и из условия а) и принципа максимума следовало бы, что $u(z) \le M$ $\forall z \in D$, что противоречит сделанному предположению $u(a) > M$, $a \in D$.

Поскольку D — неограниченная область, то найдется такое r_0, что окружность $S_t = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = t \}$, пересекает D при любом $t > r_0$. Пусть теперь $t \in e(\partial G, 0; r)$ и $t > r_0$. Тогда окружность S_t пересекает ∂G и эта же окружность пересекает область D. Но в этом случае окружность S_t обязана пересекать границу области D, ибо в противном случае S_t содержалась бы в $D \subset G$, следовательно, не пересекала ∂G. Так как S_t пересекает ∂D, то $t \in$ $\in e(\partial D, 0, r)$. Из этих рассуждений следует, что $(r_0, r) \bigcap e(\partial G, 0, r) \subset$ $\subset e(\partial D, 0, r)$ и поэтому из (5) следует

$$\lim_{r \to \infty} m(\partial D, 0, r) r^{-1} = 1. \tag{7}$$

Поскольку G_r — компонента открытого множества $B_r \setminus \partial D$, содержащая точку $a \in D$, то $G_r \subset D$ и любая окружность S_t, $t < r$, пересекающая одновременно ∂D и G_r, пересекает также и ∂G_r. Но легко видеть, что $S_t \bigcap G_r \neq \varnothing$ $\forall\, t \in (|a|, r)$. Действительно, если бы это было не так, то тогда замыкание области G_r полностью содержалось бы в открытом шаре B_r, а ее граница ∂G_r содержалась бы в $\partial D \subset \partial G$. В этом случае из условия а) и принципа максимума следовало бы, что $u(z) \leq M$ $\forall\, z \in G_r$, и, в частности, $u(a) \leq M$, что противоречит предположению $u(a) > M$. Тем самым доказано, что $S_t \bigcap G_r \neq \varnothing$ $\forall\, t \in (|a|, r)$, а отсюда следует, что $(|a|, r) \bigcap e(\partial D, 0, r) \subset e(\Gamma_r, 0, r)$. Поэтому равенство (6) вытекает из равенства (7).

Из (6) следует, что при фиксированном z и $r \to \infty$

$$\frac{(r - |z|)\, m(r)}{(r + |z|)(2r - m(r))} = \left[1 - \frac{2|z|}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \right] (1 + \varepsilon(r)), \tag{8}$$

где $\varepsilon(r) \to 0$ при $r \to \infty$, а так как

$$\operatorname{arctg}(1 - x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + o(x) \text{ при } x \to 0,$$

то из (3) и (7) имеем

$$\omega_r(z) \geq 1 - \frac{4|z|}{\pi r} + o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty.$$

Поэтому неравенство (4) можно записать следующим образом:

$$u(a) \leq \omega_r(a) M + \frac{4|a|}{\pi} \frac{M(r, v)}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right). \tag{9}$$

Из второй части условия (5) следует, что существует такая последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$, $r_k \to \infty$, что

$$\lim_{k \to \infty} M(r_k, v)\, r_k^{-1} = 0. \tag{10}$$

Полагая теперь в (9) $r = r_k$ и устремляя k к бесконечности, получаем $u(a) \leq$ $\leq M$, что противоречит сделанному в начале доказательства предположению $u(a) > M$. Тем самым первая часть теоремы 1, соответствующая случаю выполнения условий (5), доказана.

Пусть теперь выполнены условия

$$\overline{\lim_{r \to \infty}}\, m(\partial G, 0, r) r^{-1} = 1, \quad \overline{\lim_{r \to \infty}}\, M(u, r) r^{-1} = 0. \tag{11}$$

Тогда, как и выше, докажем справедливость равенства (8), но только лишь для некоторой последовательности r_k, стремящейся к бесконечности. Поэтому вместо (9) будем иметь

$$u(a) \le \omega_r(a)M + \frac{4|a|}{\pi}\frac{M(r_k, v)}{r_k} + o\left(\frac{1}{r_k}\right). \tag{12}$$

Но так как теперь на функцию u наложены более сильные условия роста, то из второй части (11) имеем

$$\lim_{k\to\infty} M(r_k, v)\, r_k^{-1} = 0,$$

и поэтому, устремляя k в (12) к бесконечности, снова получаем неравенство $u(a) \le M$, которое противоречит сделанному в начале доказательства предположению о том, что $u(a) > M$. Тем самым теорема 1 полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть D — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, $\Gamma = U \cap \partial D$ — открытая порция ∂D, E — подмножество Γ, имеющее нулевую емкость, и f — голоморфная и ограниченная в D функция, удовлетворяющая условию*

$$b(|f|, \zeta) \le M \quad \forall\, \zeta \in \Gamma \setminus E.$$

Тогда $b(|f|, \zeta) \le M \quad \forall\, \zeta \in \overline{\Gamma \setminus E} \cap \Gamma \equiv \Gamma'$.

Доказательство. Пусть сначала ζ — регулярная для задачи Дирихле граничная точка открытого множества D, принадлежащая Γ, и $\omega(z, \Gamma_1)$ — гармоническая мера множества $\Gamma_1 = \partial D \setminus \Gamma$ в точке $z \in D$. Тогда

$$\lim_{z\to\zeta} \omega(z, \Gamma_1) = 1 \quad \forall\, \zeta \in \Gamma_1 \setminus E_1; \quad \lim_{z\to\zeta} \omega(z, \Gamma_1) = 0 \quad \forall\, \zeta \in \Gamma \setminus E_1, \tag{13}$$

где E_1 — множество всех иррегулярных точек границы ∂D. По условию существует такая константа M_1, что $|f(z)| \le M_1 \quad \forall\, z \in D$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$u(z) = \ln|f(z)| - \ln\left(\frac{M_1}{M}\right)\omega(z, \Gamma_1).$$

Эта функция субгармонична и ограничена сверху в D и $b(u, \zeta) \le M \quad \forall\, \zeta \in \partial D \setminus (E_1 \cup E)$. Так как согласно лемме Келлога [1, с. 288] множество E_1 иррегулярных точек имеет емкость нуль, то по принципу максимума для субгармонических функций $u(z) \le M \quad \forall\, z \in D$. Поэтому из (13) следует, что $b(|f|, \zeta) \le M$ для любой регулярной точки $\zeta \in \Gamma$.

Пусть теперь ζ — иррегулярная точка ∂D, принадлежащая Γ'. Тогда согласно уточненному свойству Лебега–Берлинга [5, с. 97] найдется такая сходящаяся последовательность положительных чисел $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$, что окружности $S_{r_m}(\zeta)$ содержатся в D $\forall\, m = 1, 2, \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что круг B, ограниченный окружностью $S_{r_1}(\zeta)$, содержится в открытом множестве U, определяющем порцию Γ. Предположим теперь от противного, что $b(|f|, \zeta) = M' > M$ и обозначим $G = \{z \in B \cap D : |f(z)| > M + \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < M' - M$. Тогда из включения $B \cap \partial D \subset \Gamma$ и неравенства $b(|f|, \zeta) \le M \quad \forall\, \zeta \in \Gamma \setminus E$ вытекает, что $\partial G \subset D \cup E \cup \partial B$. Очевидно, что ζ должна быть иррегулярной граничной точкой открытого множества G, так как в противном случае, как и для D, было бы получено неравенство $b(|f|, \zeta) \le M + \varepsilon < M'$. Поэтому согласно свойству Лебега–Берлинга существуют окружности, которые снова обозначим через $S'_{r_m}(\zeta)$, содержащиеся в G. Определим в круге B вспомогательную функцию u по формуле

$$u(z) = \begin{cases} \ln|f(z)|, & z \in G; \\ M + \varepsilon, & z \in B \setminus \overline{G}; \\ \overline{\lim\limits_{w \to z,\ w \in G}} \ln|f(w)|, & z \in \partial G. \end{cases}$$

Согласно лемме 1 [2, с. 19] функция u субгармонична в круге B. Пусть μ — мера Риса функции u в B и $n(t)$ — μ-мера круга $|z - \zeta| < t$. Тогда для всех $r < r_0$ справедливо тождество, вытекающее из формулы Пуассона – Йенсена [1, с. 139, с. 145]

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta - \int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt.$$

Дифференцируя это тождество по r, получаем

$$n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r \frac{\partial}{\partial r} u(\zeta + re^{i\theta})\, d\theta. \tag{14}$$

А так как в окрестности окружностей $S_{r_m}(\zeta)$ $u(z) = \ln|f(z)|$, то из (14) имеем

$$n(r_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_m \left[\frac{\partial}{\partial r} \ln|f(\zeta + re^{i\theta})| \right]_{r = r_m} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \theta} \arg f\left(\zeta + r_m e^{i\theta} \right) d\theta,$$

и поэтому $n(r_m)$ — целое число для $m = 1, 2, \ldots$. Пусть $n_0 = \mu\{\zeta\}$. Тогда функция $n(r)$, монотонно не возрастая, стремится при $r \to 0$ к числу n_0 и при $r = r_m$ принимает целочисленные значения. Отсюда следует, что найдется такое $R > 0$, что $n(r) = n_0 \quad \forall\, r \in (0, R)$. Тогда в кольце $K = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < |z - \zeta| < R \}$ функция u не имеет массы Риса и поэтому гармонична в этом кольце.

По условию $\zeta \in \overline{\Gamma \setminus E} \cap \Gamma \cap U$. Следовательно, существует точка $\zeta_1 \in \Gamma \setminus E$, принадлежащая кольцу K, а так как $b(|f|, \zeta_1) \le M$, то множество $V = (D \cap K) \setminus \overline{G}$ не пусто. Согласно определению функция u принимает в каждой точке непустого открытого подмножества $V \subset K$ постоянное значение, равное $\ln(M + \varepsilon)$, а так как эта функция гармонична в кольце K, то $u(z) \equiv \ln(M + \varepsilon)$ в K. Отсюда следует, что $b(u, \zeta) = \ln(M + \varepsilon)$, и, следовательно, $b(|f|, \zeta) = M + \varepsilon$, что противоречит допущению $b(|f|, \zeta) = M' > M + \varepsilon$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть G — открытое подмножество в $\mathbb{C}$, E — подмножество ∂G, имеющее нулевую емкость, и f — голоморфная и ограниченная в G функция. Тогда для любой точки $\zeta_0 \in \partial G$, являющейся предельной точкой множества $\partial G \setminus E$, выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta_0, \\ z \in G}}} |f(z)| \le \overline{\lim_{\substack{\zeta \to \zeta_0, \\ \zeta \in \partial G \setminus E}}} \left(\overline{\lim_{\substack{z \to \zeta, \\ z \in G}}} |f(z)| \right). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть A — число, равное правой части неравенства (15). Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность u точки ζ_0, что $b(|f|, \zeta) < A + \varepsilon \ \ \forall\, \zeta \in (U \cap \partial G) \setminus E$. Поскольку ζ_0 — предельная точка множества $\partial G \setminus E$, то согласно теореме 2 $b(|f|, \zeta_0) \le A + \varepsilon$, и в силу произвольности ε $b(|f|, \zeta_0) \le M$, что и требовалось доказать.

Пусть G — открытое подмножество в $\mathbb{C}$ и $f\colon G \to \mathbb{C}$ — комплекснозначная функция. Для каждой точки $\zeta \in \partial G$ предельное множество $\mathfrak{C}\,(f, \zeta)$ функции f в точке ζ определяется как множество всех таких точек $w \in \overline{\mathbb{C}}$, что существует последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset G$, сходящаяся к ζ, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = w$. Для подмножества $F \subset \partial G$, точки $\zeta \in \overline{F}$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$\mathfrak{C}_F(f, \zeta, \varepsilon) = \bigcup \mathfrak{C}\,(f, \eta), \quad \eta \in \partial G, \quad 0 < |\eta - \zeta| < \varepsilon$$

и

$$\mathfrak{C}_F(f, \zeta) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\mathfrak{C}(f, \zeta, \varepsilon)}.$$

Теоремы 2 и 3 позволяют распространить на более общий случай результат Иверсена, Зейделя, Дуба [6, с. 127] о соотношении между предельными множествами.

Теорема 4. *Пусть f — мероморфная функция в открытом множестве $G \subset \mathbb{C}$ и $E \subset \partial G$ — такое подмножество емкости нуль, что $\partial G \setminus E$ всюду плотно на ∂G. Тогда для каждой точки $\zeta \in \partial G$ имеем*

$$\partial \mathfrak{C}\,(f, \zeta) \subset \mathfrak{C}_{\partial G \setminus E}(f, \zeta).$$

Доказательство. Допустим, что теорема не верна. Тогда для некоторой точки $\zeta_0 \in \partial G$ найдется точка $w_0 \in \partial \mathfrak{C}\,(f, \zeta_0)$, не принадлежащая множеству $\mathfrak{C}_{\partial G \setminus E}(f, \zeta_0)$, и в этом случае расстояние ε от точки w_0 до множества $\mathfrak{C}_{\partial G \setminus E}(f, \zeta_0)$ положительно. Поскольку w_0 — граничная точка множества $\mathfrak{C}\,(f, \zeta_0)$, то можно найти точку $w_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathfrak{C}\,(f, \zeta_0)$ такую, что $|w_1 - w_0| < \varepsilon/2$. Тогда расстояние между w_1 и любой точкой множества $\mathfrak{C}_{\partial G \setminus E}(f, \zeta_0)$ больше $\varepsilon/2$. Функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w_1}$$

ограничена в некоторой окрестности u точки ζ_0, и согласно теореме 3 имеем

$$\varlimsup_{\substack{z \to \zeta_0,\\ z \in G}} |g(z)| \le \varlimsup_{\substack{\zeta \to \zeta_0,\\ \zeta \in \partial G \setminus E}} \left(\varlimsup_{\substack{z \to \zeta,\\ z \in G}} |g(z)| \right). \tag{16}$$

Так как расстояние между w_1 и любой точкой множества $\mathfrak{C}_{\partial G \setminus E}(f, \zeta_0)$ больше $\varepsilon/2$, то правая часть неравенства (16) не превышает $2/\varepsilon$, и поскольку $w_0 \in \mathfrak{C}\,(f, \zeta_0)$, то из этого неравенства следует

$$\frac{1}{|w_0 - w_1|} \le \frac{2}{\varepsilon},$$

а это противоречит тому, что $|w_0 - w_1| < \varepsilon/2$. Теорема 4 доказана.

1. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
2. *Тамразов П. М.* Контурно-телесные задачи для голоморфных функций и отображений. – Киев, 1983. – 50 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.65).
3. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
5. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. – М.: Мир, 1974. – 224 с.
4. *Коллингвуд Э., Ловаттер А.* Теория предельных множеств. – М.: Мир, 1971. – 312 с.

Получено 21.01.93