УДК 517.948.34

В. П. Желтиков, В. В. Эфендиев, кандидаты физ.-мат. наук (Одес. ун-т)

ПОГРАНСЛОЙНОЕ УСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМ СТАНДАРТНОГО ВИДА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

A k-order asymptotic solution of a standard system with delay is constructed along trajectories calculated by using A. N. Filatov's averaging scheme. If the perturbation parameter $\varepsilon << 1$, then, in the case where the solution is calculated by using the step method, one needs a large amount of calculations because the number of steps required is reciprocal to ε. We suggest a different approach, in which the step method is used only k times for $t \in [0, k]$. This asymptotical method is also justified.

Вздовж траєкторій, які вирахувані за схемами усереднення О. М. Філатова, побудовано асимптотичний розв'язок порядку k системи стандартного вигляду із запізненням. Якщо параметр збурення $\varepsilon << 1$, то розв'язування методом кроків вимагає великого об'єму обчислень, оскільки кількість кроків обернено пропорціональна ε. Запропоновано інший підхід, який використовує метод кроків тільки k разів для $t \in [0, k]$.

Построим асимптотическое решение порядка k для задачи с запаздыванием [1 – 4]

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x, x(t-1, \varepsilon)), \tag{1}$$

$$x\big|_{t\in[-1,0]} = \varphi(t), \tag{2}$$

где запаздывание равно единице, $x \in G$ — n-мерный вектор, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $t \in T \equiv [0, \varepsilon^{-1}]$, f, φ — n-мерные вектор-функции. Если $\varepsilon << 1$, то такое решение методом шагов [2] требует большого объема вычислений, так как число шагов обратно пропорционально ε. Рассмотрим иной подход [3, 5], использующий метод шагов только k раз, для $t \in [0, k]$.

Пусть существует предел

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t, x, x)dt = f_2(x) \tag{3}$$

для любого вектора x из G.

Введем систему, усредненную по второй схеме усреднения [1]:

$$\dot{\kappa}_2 = \varepsilon f_2(\kappa_2), \quad \kappa_2\big|_{t=0} = \varphi(0). \tag{4}$$

В (4) сделаем замену переменной $t \in \varepsilon t$, $\tau \in [0, 1] \equiv T_1$:

$$\frac{d\kappa_2}{d\tau} = f_2(\kappa_2), \quad \kappa_2\big|_{\tau=0} = \varphi(0). \tag{5}$$

Решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$x_k = x_{2k}(\tau, \varepsilon) + Z_2 x_k(t, \varepsilon), \tag{6}$$

где

$$x_{2k} = \kappa_2(\tau) + \varepsilon\,\bar{x}_1(\tau, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^k\,\bar{x}_k(\tau, \varepsilon), \tag{7}$$

$$Z_2 x_k(t, \varepsilon) = Z_0 x(t) + \varepsilon Z_1 x(t, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^k Z_k x(t, \varepsilon). \tag{8}$$

Подставим (6) в (1) и запишем полученное равенство в виде

$$\varepsilon\,\frac{dx_{2k}}{d\tau} + \frac{dZ_2 x_k}{dt} = \varepsilon\,\bar{f} + \varepsilon Zf, \tag{9}$$

где $\bar{f}$ и Zf определяются так:

$$\bar{f} = \bar{f}(\tau, \varepsilon) = f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{2k}(\tau, \varepsilon), x_{2k}(\tau - \varepsilon, \varepsilon)\right), \tag{10}$$

$$Zf = Zf(t, \varepsilon) = f(t, x_{2k}(\varepsilon t, \varepsilon) + Z_2 x_k(t, \varepsilon),$$
$$x_{2k}(\varepsilon t - \varepsilon, \varepsilon) + Z_2 x_k(t-1, \varepsilon)) - f(t, x_{2k}(\varepsilon t, \varepsilon), x_{2k}(\varepsilon t - \varepsilon, \varepsilon)). \tag{11}$$

Положим

$$\frac{dx_{2k}}{d\tau} = \bar{f} \tag{12}$$

и

$$\frac{dZ_2 x_k}{dt} = \varepsilon Zf, \tag{13}$$

так что равенство (9) будет выполняться, если выполняются равенства (12), (13).

Поскольку $\bar{f}$ зависит от малого запаздывания, исключим такую зависимость, разложив $x_{2k}(\tau - \Delta, \varepsilon)$ по степеням Δ и положив затем $\Delta = \varepsilon$:

$$\bar{x}_i(\tau - \Delta, \varepsilon)\big|_{\Delta = \varepsilon} = \bar{x}_i(\tau, \varepsilon) - \varepsilon\dot{\bar{x}}_i(\tau, \varepsilon) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^{k-i}(-1)^{k-i}\,\frac{\bar{x}_i^{(k-i)}(\tau, \varepsilon)}{(k-i)!} + O(\varepsilon^{k+1-i}), \tag{14}$$

где $O(s)$ имеет такой же смысл, как и в [3].

Подставим (14) в $x_{2k}(s, \varepsilon)$, представленное по формуле (7) при $s = \tau - \varepsilon$:

$$x_{2k}(\tau - \varepsilon, \varepsilon) = \kappa_2(\tau) + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i \sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\,\bar{x}_{i-j}^{(j)}(\tau, \varepsilon) + O(\varepsilon^{k+1}), \tag{15}$$

где $\bar{x}_0^{(s)}$ означает s-ю производную от κ_2.

Далее, разложим $\bar{f} = \bar{f}(t, u, v) \equiv \bar{f}(t, z)$ $\left(z = (u^{\mathrm{T}}, v^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\right.$, знак „T“ означает транспонирование$\left.\right)$ по явно входящим степеням ε, обозначив центр разложения через $(\cdot)$: $(\cdot) \equiv (t, \kappa_2(\tau), \kappa_2(\tau))$:

$$\bar{f} = \bar{f}(\tau, \varepsilon) = f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{2k}(\tau, \varepsilon), x_{2k}(\tau - \varepsilon, \varepsilon)\right) =$$

$$= f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \bar{x}_0(\tau) + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i\,\bar{x}_i(\tau, \varepsilon), \bar{x}_0(\tau) + \sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i \sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\,\bar{x}_{i-j}^{(j)}(\tau, \varepsilon)\right) + O(\varepsilon^{k+1}) =$$

$$= f(\cdot) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i\,\bar{x}_i(\tau, \varepsilon) + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i \sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\,\bar{x}_{i-j}^{(j)}(\tau, \varepsilon) +$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial z^2}\left[\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i z_i(\tau, \varepsilon)\right]^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{k!}\frac{\partial^k f(\cdot)}{\partial z^k}\left[\sum_{i=1}^{k}\varepsilon^i z_i(\tau,\varepsilon)\right]^k + O(\varepsilon^{k+1}), \tag{16}$$

где вектор z_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, имеет $2n$ компонент, причем $z_{is} = \bar{x}_{is}(\tau, \varepsilon)$, $z_{i,n+s} = \sum_{j=0}^{i}\frac{(-1)^j}{j!}\bar{x}^{(j)}_{i-j,s}(\tau,\varepsilon)$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Формулы (16) упорядочим по явно входящим степеням ε:

$$\bar{f} = \bar{f}\left(\frac{\tau}{\varepsilon}, x_{2k}(\tau,\varepsilon), x_{2k}(\tau,\varepsilon)\right) =$$

$$= f(\cdot) + \varepsilon\left\{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial z}\bar{z}_1 - \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\dot{\kappa}_2\right\} +$$

$$+ \varepsilon^2\left\{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial z}\bar{z}_2(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial z^2}\bar{z}_1^2 + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\left(-\dot{\bar{x}}_1 - \frac{\kappa_2^{(2)}}{2!}\right)\right\} +$$

$$+ \varepsilon^3\left\{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial z}\bar{z}_3(\tau,\varepsilon) + F_3(\tau,\varepsilon)\right\} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^k\left\{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial z}\bar{z}_k(\tau,\varepsilon) + F_k(\tau,\varepsilon)\right\} + O(\varepsilon^{k+1}), \tag{17}$$

где $\bar{z}_i = \left(\bar{x}_i^{\mathrm{T}}, \bar{x}_i^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Подставим (7) и (17) в (12). Учитывая уравнение (5), которому удовлетворяет κ_2, определим $\bar{x}_1(\tau, \varepsilon)$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$\varepsilon\frac{d\bar{x}_1}{d\tau} = f(\cdot) - f_2(\kappa_2) + \varepsilon\left\{\left(\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\right)\bar{x}_1 + \dot{\kappa}_2(\tau)\right\}.$$

Положив $\tau = \varepsilon t$, получим следующее уравнение для определения $\bar{x}_1$:

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt} = \varepsilon\left\{\frac{\partial f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial u} + \frac{\partial f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial v}\right\}\bar{x}_1 +$$

$$+ f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t)) - f_2(\kappa_2(\varepsilon t)) - \varepsilon f_2(\kappa_2(\varepsilon t)). \tag{18}$$

Дальнейшие процедуры являются обычными в построении асимптотического решения: после подстановки (7) и (17) в (12) и вывода уравнения (18) приравняем в (12) коэффициенты при ε^i, $i = 2, \ldots, k$. При ε^2 имеем

$$\frac{d\bar{x}_2}{d\tau} = \left[\frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\right]\bar{x}_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial z^2}\bar{z}_1^2 + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v}\left(-\dot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{2}\kappa_2\right).$$

Чтобы исключить сингулярное вхождение ε, перейдем в последнем уравнении, по аналогии с (18), ко времени t:

$$\frac{d\bar{x}_2}{dt} = \varepsilon\left[\frac{\partial f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial z}\bar{z}_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial z^2}\bar{z}_1^2 +\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial v}\left(-\dot{\bar{x}}_1 + \frac{1}{2}\kappa_2^{(2)}\right)\right]. \tag{19}$$

Вообще, при ε^i, переходя ко времени $t = \tau\varepsilon^{-1}$, получаем

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \varepsilon\left[\frac{\partial f(t,\kappa_2(\varepsilon t),\kappa_2(\varepsilon t))}{\partial z}\bar{z}_i + \mathcal{F}_i(t,\varepsilon)\right], \tag{20}$$

$$i = 2, 3, \ldots, k,$$

где $\mathcal{F}_i(t,\varepsilon) = F_i(\varepsilon t, \varepsilon)$, $z^{\mathrm{T}} = (u^{\mathrm{T}}, v^{\mathrm{T}})$, $\bar{z}_i^{\mathrm{T}} = \left(\bar{x}_i^{\mathrm{T}}, \bar{x}_i^{\mathrm{T}}\right)$.

Для вычисления $Z_i x$, входящих в (8), разложим Zf вдоль траектории $\kappa_2(\varepsilon t) + Z_0 x(t,\varepsilon)$ по явно входящим степеням ε:

$$Zf = f\Bigg(t, \kappa_2(\varepsilon t) + Z_0 x(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ \bar{x}_i(t,\varepsilon) + Z_i x(t,\varepsilon) \right\},$$

$$\kappa_2(\varepsilon t) + Z_0 x(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ \frac{(-1)^j}{j!} \bar{x}_{i-j}^{(j)}(t,\varepsilon) + Z_i x(t-1,\varepsilon) \right\} \Bigg) -$$

$$- f\left(t, \kappa_2(\varepsilon t) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \bar{x}_i(t,\varepsilon), \kappa_2(\varepsilon t) + \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} \bar{x}_{i-j}^{(j)}(\varepsilon t) \right) =$$

$$= f(\cdot\cdot) - f(\cdot) + \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial u} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ Z_i x(t,\varepsilon) + \bar{x}_i(t,\varepsilon) \right\} -$$

$$- \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \bar{x}_i(t,\varepsilon) + \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial v} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} \bar{x}_{i-j}^{(j)}(t,\varepsilon) + Z_i x(t-1,\varepsilon) \right\} -$$

$$- \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ \sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j}{j!} \bar{x}_{i-j}^{(j)}(t,\varepsilon) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\cdot\cdot)}{\partial z^2} \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i \left\{ Z_i z(t,\varepsilon) \right\} \right]^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial z^2} \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i z_i(t,\varepsilon) \right]^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} f(\cdot\cdot)}{\partial z^{k-1}} \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i Z_i z(t,\varepsilon) \right]^{k-1} -$$

$$- \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1} f(\cdot\cdot)}{\partial z^{k-1}} \left[\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i z_i(t,\varepsilon) \right]^{k-1} + O(\varepsilon^k), \qquad (21)$$

где $Z_i z$ определяется аналогично z_i в формуле (16), но для аргумента $\bar{x}_i + Z_i x$,

$$(\cdot\cdot) \equiv \left(t, \kappa_2(\varepsilon t) + Z_0 x(t,\varepsilon), \kappa_2(\varepsilon t) + Z_0 x(t-1,\varepsilon)\right).$$

Упорядочим формулу (21) по явно входящим степеням ε:

$$Zf = f(\cdot\cdot) - f(\cdot) +$$

$$+ \varepsilon \left[\frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial u} Z_1 x(t,\varepsilon) + \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial v} Z_1 x(t-1,\varepsilon) + G_1(t,\varepsilon) \right] + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^{k-1} \left[\frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial u} Z_{k-1} x(t,\varepsilon) + \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial v} Z_{k-1} x(t-1,\varepsilon) + G_{k-1}(t,\varepsilon) \right] + O(\varepsilon^k), \qquad (22)$$

где $G_i(t,\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$, очевидным образом определяются из (21), причем если функции $\bar{x}_j(t,\varepsilon)$, $Z_j x(t,\varepsilon)$, $j = 0, 1, \ldots, i-1$, известны, то $G_i(t,\varepsilon)$ будут известными функциями t, ε. Кроме того, всюду, где $Z_0(t,\varepsilon)$ равна нулю, функции $G_i(t,\varepsilon)$ будут составлены суммой, каждое слагаемое которой содержит множителем хотя бы одно $Z_j x$, так что если все $Z_j x$ окажутся равными нулю, то $G_i(t, \varepsilon)$ также будет равно нулю.

Дальнейшие формальные построения выполним так же, как и в работе [3].

Уравнения (18) и (20) доопределим начальными условиями, исходя из того, чтобы формула (6) распространялась на промежуток $t \in [-1, 0]$, откуда получим

$$[Z_0 x(t, \varepsilon) + \varepsilon Z_1 x(t, \varepsilon) + \ldots + \varepsilon^k Z_k x(t, \varepsilon)]\Big|_{-1 \le t \le 0} =$$

$$= \{\varphi(t) - \varphi(0)\} + \varepsilon\{-\dot{\kappa}_2(0)t - \bar{x}_1(0)\} + \ldots$$

$$\ldots + \varepsilon^k \left\{-\sum_{s=0}^{k-1} \frac{\bar{x}_s^{(k-s)}(0) t^{k-s}}{(k-s)!} - \bar{x}_k(0)\right\} + O(\varepsilon^{k+1}), \qquad (23)$$

где вместо $\kappa_2(0)$ записано $\varphi(0)$, что соответствует начальному условию в задаче (5).

Подставим (8) и (21) в (13). При ε^0 с учетом (23) получим

$$Z_0 x(t) = \begin{cases} \varphi(t) - \varphi(0), & -1 \le t \le 0; \\ 0, & t \ge 0, \end{cases} \qquad (24)$$

откуда следует, что для $t \ge 1$ траектории $(\cdot\cdot)$ и $(\cdot)$ совпадают.

При ε^1 в (13) с учетом (23) имеем

$$Z_1 x(t, \varepsilon) = \begin{cases} -f_2(\varphi(0)) \times t - \int\limits_0^1 [f(\cdot\cdot) - f(\cdot)]\, dt, & t \in [-1, 0]; \\ -\int\limits_0^1 [f(\cdot\cdot) - f(\cdot)]\, dt, & t \in [0, 1]; \\ 0, & t \ge 1, \end{cases} \qquad (25)$$

если начальное условие для уравнения (18) выбрать так:

$$\bar{x}_1(0) = \int\limits_0^1 [f(\cdot\cdot) - f(\cdot)]\, ds. \qquad (26)$$

Вообще, для уравнения (20) начальное условие введем формулой

$$\bar{x}_i(0) = \int\limits_0^i Z_{i-1} f(s, \varepsilon)\, ds, \qquad (27)$$

где $Z_{i-1} f(t, \varepsilon)$ — множитель при ε^{i-1} в (23).

Тогда из (13) и (23) получим

$$Z_i x(t, \varepsilon) = \begin{cases} -\sum\limits_{s=0}^{i-1} \frac{\bar{x}_s^{(i-s)}(0) t^{i-s}}{(i-s)!} - \int\limits_0^i Z_{i-1} f(s, \varepsilon)\, ds, & t \in [-1, 0]; \\ -\int\limits_t^i Z_{i-1} f(s, \varepsilon)\, ds, & t \in [0, i]; \\ 0, & t \ge i, \end{cases} \qquad (28)$$

где

$$Z_{i-1}x(t,\varepsilon) = \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial u} Z_{i-1}x(t,\varepsilon) + \frac{\partial f(\cdot\cdot)}{\partial v} Z_{i-1}x(t-1,\varepsilon) + G_{i-1}(t,\varepsilon),$$

причем $G_{i-1}x(t,\varepsilon) \equiv 0$ для $t \geq i-1$ и $Z_{i-1}f(t,\varepsilon) \equiv 0$ для $t \geq i$.

Таким образом, асимптотическое решение исходной задачи построено полностью.

Проведем его обоснование.

Теорема. *Пусть в области* $Q = \{(t,x)\colon t \geq 0,\ x \in G \subset \mathbb{R}_n\}$ *выполнены следующие условия*:

1) $f(t,x,y) \in C^{k+2}_{x,y}(t \geq 0, G, G)$;

2) *равномерно по* $x \in G$ *существует предел* (3), *причем*

$$\left\| \int_0^\tau \left[f(t,x,x) - f_2(x) \right] dt \right\| < \tau\alpha(\tau) < M,$$

где $\lim\limits_{\tau\to\infty} \alpha(\tau) = 0$, $M = \text{const}$;

3) *вектор-функция* $\varphi(t)$ *непрерывна для* $t \in [-1, 0]$;

4) *решение* $\kappa_2 = \kappa_2(\tau)$ *задачи* (5) *определено для* $\tau \in T_1$ *и лежит в области* G *вместе со своей* ρ*-окрестностью.*

Тогда найдутся постоянные $\varepsilon^0 > 0$, $C > 0$ *такие, что при* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon^0$ *решение* $x(t,\varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *существует на сегменте* T, *единственно и удовлетворяет неравенству*

$$\| x(t,\varepsilon) - x_k(t,\varepsilon) \| < C\varepsilon^{k+1}. \tag{29}$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (1), (2) следует из леммы II.1 [1, с. 40] и теоремы об усреднении [1, 4].

Покажем сначала, что решение задачи (18), (26) равномерно ограничено для $t \in T$. С учетом начального условия (26) запишем уравнение (18) в интегральной форме

$$\bar{x}_1 = \bar{x}_1(0) + \varepsilon \int_0^t \exp\left(\varepsilon \int_s^t \left\{ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial z} - \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \right\} d\tau \right) *$$

$$* \left[f(\cdot) - f_2(\kappa_2(\varepsilon s)) - \varepsilon f_2(\kappa_2(\varepsilon s)) \right] ds =$$

$$= \bar{x}_1(0) + \left[\exp\left(\varepsilon \int_s^t \left\{ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \right\} d\tau \right) * \int_0^s \left[f(\cdot) - f_2(\kappa_2(\varepsilon s)) \right] ds \right]_0^t +$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \exp\left(\varepsilon \int_s^t \left\{ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \right\} d\tau \right) \left[\left\{ \frac{\partial f(\cdot)}{\partial u} + \frac{\partial f(\cdot)}{\partial v} \right\} * \right.$$

$$\left. * \int_0^s \left[f(\cdot) - f_2(\kappa_2(\varepsilon\tau)) \right] d\tau - f_2(\kappa_2(\varepsilon s)) \right] ds, \tag{30}$$

откуда в силу условия 2 для любого $t \in T$ следует $\|\bar{x}_1\| < C$, $C = \text{const}$. Далее, из (20), (27), (24), (28) и условия 1 для любого $t \in T$ получим

$$\|\bar{x}_i\| < C, \quad \|Z_j x\| < C, \quad i = 2, \ldots, k, \quad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому согласно условию 4 в ρ-окрестности решения задачи (5) для достаточно малого $\varepsilon^0 > 0$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$ величины $O(s)$ в формулах (15) – (17), (21) – (23) и следующих ниже являются величинами с порядком малости s, как это обычно и принято. Следовательно, x_k будет решением задачи

$$\frac{dx_k(t,\varepsilon)}{dt} = \varepsilon f(t, x_k(t,\varepsilon), x_k(t-1,\varepsilon)) - O(\varepsilon^{k+1}), \tag{31}$$

$$x_k(t,\varepsilon)\big|_{t\in[-1,0]} = \varphi(t) - O(\varepsilon^{k+1}). \tag{32}$$

Запишем в интегральной форме разность уравнений (1) и (31):

$$r_k(t,\varepsilon) = r_k(0,\varepsilon) + \int_0^t \big[\, \varepsilon f(t, x(t,\varepsilon), x(t-1,\varepsilon)) - \varepsilon f\big(t, x_k(t,\varepsilon), x_k(t-1,\varepsilon)\big) + O\big(\varepsilon^{k+1}\big) \,\big]\, dt, \tag{33}$$

где $r_k(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon) - x_k(t,\varepsilon)$, $r_k(0,\varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1})$, так что

$$\| r_k(t,\varepsilon)\| < O(\varepsilon^k) + 2\varepsilon\lambda \int_0^t \big\| r_k(t,\varepsilon)\big\|\, dt\,; \ \ \lambda = \text{const}.$$

Применив неравенство Гронуолла – Беллмана, получим

$$\| r_k(t,\varepsilon)\| < O(\varepsilon^k) \exp(2\lambda\varepsilon t) = O(\varepsilon^k). \tag{34}$$

Так как для оценки (34) достаточно, чтобы $f(t,x,x) \in C^{k+1}_{x,y}(t \geq 0, G, G)$, то условие 1 позволяет вычислить $r_{k+1}(t,\varepsilon)$, причем в соответствии с (34) имеем $\| r_{k+1}(t,\varepsilon)\| = O(\varepsilon^{k+1})$. Но $\| x_{k+1} - x_k\| = O(\varepsilon^{k+1})$. Поэтому $\| r_k(t,\varepsilon)\| \leq \leq \| r_{k+1}(t,\varepsilon)\| + \| x_{k+1} - x_k\| = O(\varepsilon^{k+1})$, что соответствует неравенству (29). Теорема доказана.

1. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: Фан, 1974. – 216 с.
2. *Желтиков В. П., Эфендиев В. В.* Асимптотическое усреднение стандартных систем с запаздыванием. – Одесса, 1991. – 14 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, № 28-Ук92.
3. *Желтиков В. П., Эфендиев В. В.* Усредненные задачи для стандартных систем с запаздыванием. – Одесса, 1992. – 19 с. – Деп. в УкрИНТЭИ, № 1328-Ук92.
4. *Плотников В. А.* Метод усреднения в задачах управления. – Киев: Лыбидь, 1992. – 188 с.
5. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 125 с.

Получено 21.10.92