УДК 517.9

Г. П. Пелюх, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИСКРЕТНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВАХ*

Conditions of existence of periodic solutions of a broad class of nonlinear difference equations with a discrete argument are obtained.

Одержані умови існування періодичних розв'язків широкого класу нелінійних дискретних різницевих рівнянь.

Системы разностных уравнений вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)), \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ — множество целых чисел), $f\colon \mathbb{Z} \times R^m \to R^m$, $x(n)$ — неизвестная вектор-функция размерности m, были объектом исследования многих математиков (достаточно полная библиография содержится в [1, 2]). Поскольку решения таких уравнений (особенно нелинейных) в явном виде удается получать лишь в исключительных случаях, то особое внимание уделялось установлению условий существования различного рода решений и разработке методов их построения. Однако для дальнейшего развития теории разностных уравнений требовалась более широкая информация об их решениях. Поэтому в последние десятилетия особенно активно развиваются методы, позволяющие не только строить частные решения, но и получать представление общего решения широких классов разностных уравнений в виде формулы, из которой можно извлекать достаточно полную информацию об их решениях [3–5]. В настоящей работе продолжается изучение разностных уравнений вида (1) в указанном направлении.

1. Существование решений. Необходимые и достаточные условия существования периодических решений. Рассмотрим систему разностных уравнений (1) в предположении, что $n \in \mathbb{Z}^+$ ($\mathbb{Z}^+$ — множество целых неотрицательных чисел) и $f(n, x)$ — однозначно определенная вектор-функция, конечная при любых $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R^m$.

Введем обозначения

$$\begin{gathered} f^0(0, x) = x, \\ f^n(n, x) = f\left(n-1, f^{n-1}(n-1, x)\right), \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{2}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $f^n(n, x)$ — однозначно определенная вектор-функция, конечная при любых $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R^m$.

Теорема 1. *Существует m-параметрическое семейство решений системы уравнений* (1) *вида*

$$x(n) = f^n(n, c), \tag{3}$$

где c — произвольный постоянный вектор размерности m.

Доказательство. Поскольку

$$x(n+1) = f^{n+1}(n+1, c),$$

* Выполнена при финансовой поддержке Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий.

$$f^n(n, x(n)) = f(n, f^n(n, c)) = f^{n+1}(n+1, c),$$

то вектор-функция $f^n(n, c)$, является решением системы уравнений (1) при любом $c \in R^m$. Теорема 1 доказана.

***Пример* 1.** Пусть имеется линейная система

$$x(n+1) = A(n)x(n), \tag{4}$$

где $A(n)$ — матрица размерности $m \times m$, $x(n)$ — неизвестный вектор размерности m. Так как в этом случае $f(n, x) = A(n)x$ и, следовательно,

$$f^n(n, x) = A(n-1) \ \ldots \ A(0)x,$$

то в силу (3) получаем m-параметрическое семейство решений системы (4) $x(n) = A(n-1) \ldots A(0)\,c$. В случае, когда матрица $A(n)$ является невырожденной, последнее соотношение представляет собой общее решение системы (4).

***Пример* 2.** Рассмотрим систему нелинейных уравнений вида

$$x(n+1) = \varphi(x(n)), \tag{5}$$

где $\varphi(x)$ — однозначно определенная вектор-функция, конечная при любом $x \in R^m$.

Поскольку в этом случае $f(n, x) = \varphi(x)$ и, следовательно, $f^n(n, x) = \varphi^n(x)$, где $\varphi^n(x)$ — n-я итерация функции $\varphi(x)$, то $x(n) = \varphi^n(c)$ — m-параметрическое семейство решений системы (5).

Из (3) следует, что свойства таким образом построенных решений системы (1) зависят от свойств вектор-функции $f(n, x)$ и постоянного вектора c. В частности, если вектор-функция $f(n, x)$ является N-периодической по n, т. е.

$$f(n+N, x) = f(n, x), \tag{6}$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R^m$, N — целое положительное число, то вектор-функция $x(n)$, определяемая соотношением (3), не является N-периодической при любом $c \in R^m$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция* $f(n, x)$ *удовлетворяет условию* (6). *Тогда для существования* N*-периодического решения системы уравнений* (1), *удовлетворяющего начальному условию*

$$x(0) = x_0, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы x_0 *было решением системы уравнений*

$$f^N(N, x_0) = x_0. \tag{8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\gamma(n)$ — некоторое N-периодическое решение системы (1), удовлетворяющее условию (7) и, таким образом, при всех $n \in \mathbb{Z}^+$ выполняются соотношения

$$\gamma(n+1) = f(n, \gamma(n)),$$
$$\gamma(0) = x_0,$$
$$\gamma(n+N) = \gamma(n).$$

Отсюда следует

$$\gamma(1) = f(0, x_0) = f^1(1, x_0),$$

$$\gamma(2) = f(1, f^1(1, x_0)) = f^2(2, x_0),$$

....

$$\gamma(N) = f(N-1, f^{N-1}(N-1, x_0)) = f^N(N, x_0).$$

Так как $\gamma(N) = \gamma(0) = x_0$, то из последнего соотношения получаем $x_0 = f^N(N, x_0)$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Предположим, что выполняется условие (8) и покажем, что вектор-функция

$$x(n) = f^n(n, x_0) \tag{9}$$

является N-периодическим решением системы уравнений (1), удовлетворяющим условию (7).

Поскольку вектор-функция $f^n(n, x_0)$ удовлетворяет системе (1) (теорема 1) и $f^0(0, x_0) = x_0$, то остается показать, что $x(n+N) = x(n)$. В самом деле, в силу (8), (6), (9) имеем

$$x(N) = f^N(N, x_0) = x_0,$$

$$x(N+1) = f^{N+1}(N+1, x_0) = f(N, f^N(N, x_0)) = f(0, x_0) = f^1(1, x_0),$$

$$x(N+2) = f^{N+2}(N+2, x_0) = f(N+1, f^{N+1}(N+1, x_0)) =$$
$$= f(1, f^1(1, x_0)) = f^2(2, x_0),$$

....

$$x(N+n) = f^{N+n}(N+n, x_0) = f(N+n-1, f^{N+n-1}(N+n-1, x_0)) =$$
$$= f(n-1, f^{n-1}(n-1, x_0)) = f^n(n, x_0) = x(n).$$

Теорема 2 доказана.

***Пример* 3.** Рассмотрим систему линейных разностных уравнений вида

$$x(n+1) = A(n)x(n) + B(n), \tag{10}$$

где $A(n)$ — N-периодическая матрица размерности $m \times m$, удовлетворяющая условию $\det\left(E - \prod_{i=1}^{N} A(N-i)\right) \neq 0$, и $B(n)$ — N-периодический вектор размерности m. Будем искать N-периодическое решение, удовлетворяющее условию (7).

Так как в этом случае имеем $f(n, x) = A(n)x + B(n)$, то в силу (2), (8) получаем

$$f^n(n, x) = \prod_{i=1}^{n} A(n-i)x + \prod_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n-j} A(n-i)B(j-1),$$

$$x_0 = \left(E - \prod_{i=1}^{N} A(N-i)\right)^{-1} \prod_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{N-j} A(N-i)B(j-1).$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$x(n) = \prod_{i=1}^{n} A(n-i) \left(E - \prod_{j=1}^{N} A(N-j)\right)^{-1} \prod_{j=1}^{N} \prod_{i=1}^{N-j} A(N-i)B(j-1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{n-j} A(n-i)B(j-1).$$

2. Достаточные условия существования и единственности периодического решения одного класса нелинейных разностных уравнений. Рассмотрим уравнение (1) (случай $m = 1$) в предположении, что:

1) функция $f(n, x)$ однозначно определена при $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R$ и $|f(n, 0)| \leq q$ при всех $n \in \mathbb{Z}^+$;

2) $f(n, x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную по x, удовлетворяющую условию

$$1 < l \leq f'_x(n, x) \leq L, \quad n \in \mathbb{Z}^+, \ x \in R;$$

3) $f(n+N, x) = f(n, x)$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R$, N — целое положительное число.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $1-3$. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное* N*-периодическое, ограниченное при всех* $n \in \mathbb{Z}^+$ *решение.*

Доказательство. Сначала покажем, что система уравнений

$$\begin{gathered} x_1(n) = f(n, x_N(n)), \\ x_2(n) = f(n+1, x_1(n)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_N(n) = f(n+N-1, x_{N-1}(n)) \end{gathered} \tag{11}$$

имеет единственное N-периодическое решение $X(n) = (x_1(n), \dots, x_N(n))$, удовлетворяющее при всех $n \in \mathbb{Z}^+$ условию

$$|X(n)| \leq M, \tag{12}$$

где $|X| = \max\limits_{1 \leq i \leq N} |x_i|$, $M = \dfrac{q}{l-1}$. Для этого применим принцип сжатых отображений.

Пусть P — пространство вещественных, однозначно определенных и ограниченных при всех $n \in \mathbb{Z}^+$ N-периодических вектор-функций, расстояние между элементами $X(n)$, $Y(n)$ которого определяется с помощью равенства

$$\rho(X(n), Y(n)) = \max_{n \in \mathbb{Z}^+} |X(n) - Y(n)|.$$

Это пространство является полным. Обозначим через Q множество вектор-функций $X(n) \in P$, удовлетворяющих условию (12), и рассмотрим преобразование $TX(n) = \left(T_1 x_1(n), \dots, T_N x_N(n) \right)$:

$$\begin{gathered} T_1 x_1(n) = x_1(n) - K[f(n+1, x_1(n)) - x_2(n)], \\ T_2 x_2(n) = x_2(n) - K[f(n+2, x_2(n)) - x_3(n)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_{N-1} x_{N-1}(n) = x_{N-1}(n) - K[f(n+N-1, x_{N-1}(n)) - x_N(n)], \\ T_N x_N(n) = x_N(n) - K[f(n, x_N(n)) - x_1(n)], \end{gathered} \tag{13}$$

где $K = \dfrac{1}{l+L}$.

Докажем, что преобразование T сжимает Q. Действительно, если $X(n) = (x_1(n), \dots, x_N(n)) \in Q$, то

$$|T_i x_i(n)| = \Big| x_i(n) - K(f(n+i, x_i(n)) - f(n+i, 0)) +$$

$$+ Kx_{i+1}(n) - Kf(n+i,0) \Big| \le$$

$$\le \Big| x_i(n) - K f'_x(n+i,\theta_i)x_i(n) \Big| + K|x_{i+1}(n)| + K|f(n+i,0)| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{l}{l+L}\right)|x_i(n)| + \frac{1}{l+L}|x_{i+1}(n)| + \frac{1}{l+L}q,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$|T_N x_N(n)| = \Big| x_N(n) - K\left(f(n, x_N(n)) - f(n,0)\right) + Kx_1(n) - Kf(n,0) \Big| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{l}{l+L}\right)|x_N(n)| + \frac{1}{l+L}|x_1(n)| + \frac{1}{l+L}q.$$

Следовательно,

$$|T_i x_i(n)| \le \frac{1+L}{l+L}|X(n)| + \frac{1}{l-1}q \le$$

$$\le \frac{1+L}{l+L}\,\frac{q}{l-1} + \frac{q}{l+L} = \frac{q}{l+L}\left(1 + \frac{1+L}{l+L}\right) =$$

$$= \frac{q}{l+L}\,\frac{l+L}{l-1} = \frac{q}{l-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Из последних соотношений вытекает

$$|Tx(n)| \le \frac{q}{l-1},$$

т. е. $Tx(n) \in Q$.

Предположим теперь, что $X(n),\ Y(n)) \in Q$, и покажем, что выполняется оценка

$$\rho(TX(n), TY(n)) \le \lambda\, \rho(X(n), Y(n)), \tag{14}$$

где $0 < \lambda < 1$.

В самом деле, в силу (13) имеем

$$|T_i x_i(n) - T_i y_i(n)| = \Big| x_i(n) - y_i(n) - K\left(f(n+i, x_i(n)) - f(n+i, y_i(n))\right) +$$

$$+ \left(Kx_{i+1}(n) - Ky_{i+1}(n)\right) \Big| \le$$

$$\le \Big| 1 - K f'_x(n+i,\theta_i) \Big| |x_i(n) - y_i(n)| + K|x_{i+1}(n) - y_{i+1}(n)| \le$$

$$\le \left(1 - \frac{l}{l+L} + \frac{1}{l+L}\right)\rho(X(n), Y(n)) = \frac{1+L}{l+L}\rho(X(n), Y(n)),$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$|T_N x_N(n) - T_N y_N(n)| = \Big| x_N(n) - y_N(n) - K\left(f(n, x_N(n)) - f(n, y_N(n))\right) +$$

$$+ \left(Kx_1(n) - Ky_1(n)\right) \Big| \le$$

$$\le \Big| 1 - K f'_x(n,\theta_N) \Big| |x_N(n) - y_N(n)| + K|x_1(n) - y_1(n)| \le$$

$$\le \frac{1+L}{l+L}\rho(X(n), Y(n)).$$

Отсюда следует (14), причем $\lambda = \dfrac{1+L}{l+L}$.

Таким образом, T является преобразованием сжатия и поэтому существует единственная вектор-функция $X_*(n) \in Q$, удовлетворяющая соотношению

$$TX_*(n) = X_*(n).$$

Это равносильно тому, что $X_*(n) = \left(x_1^*(n), \ldots, x_N^*(n) \right)$ — единственное N-периодическое решение системы (11), удовлетворяющее условию (12).

Покажем, что $x_1^*(n) = x_N^*(n+1)$. В самом деле, поскольку

$$x_1^*(n+1) = f\left(n+1,\, x_N^*(n+1) \right),$$

$$x_2^*(n+1) = f\left(n+2,\, x_1^*(n+1) \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_{N-1}^*(n+1) = f\left(n+N-1,\, x_{N-2}^*(n+1) \right),$$

$$x_N^*(n+1) = f\left(n+N,\, x_{N-1}^*(n+1) \right),$$

то в силу условия 3 получаем

$$\begin{aligned} y_N(n) &= f(n, y_{N-1}(n)), \\ y_1(n) &= f(n+1, y_N(n)), \\ y_2(n) &= f(n+2, y_1(n)), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{N-1}(n) &= f(n+N-1, y_{N-2}(n)), \end{aligned} \tag{15}$$

где $y_i(n) = x_i^*(n+1)$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Система уравнений (15) отличается от системы (11) лишь обозначениями зависимых переменных и, следовательно, имеет единственное N-периодическое решение $Y(n) = X^*(n)$, где $Y(n) = (y_N(n), y_1(n), \ldots, y_{N-1}(n))$, $X^*(n) = (x_1^*(n), \ldots, x_N^*(n))$. Тогда $x_N^*(n+1) = x_1^*(n)$, $x_1^*(n+1) = x_2^*(n)$, ... , $x_{N-1}^*(n+1) = x_N^*(n)$, и, таким образом, функция $\gamma(n) = x_N^*(n)$ является N-периодическим решением уравнения (1), удовлетворяющим условию (12).

Пусть имеется еще одно N-периодическое решение $w(n)$ уравнения (1), удовлетворяющее условию (12). Тогда в силу 2 имеем

$$|\gamma(n+1) - w(n+1)| = f_x'(n, \theta)\, |\gamma(n) - w(n)|$$

и

$$\|\gamma(n) - w(n)\| = \max_n |\gamma(n) - w(n)| \le 0$$

Последнее соотношение возможно лишь в случае, когда $\gamma(n) = w(n)$, что противоречит предположению. Теорема 3 доказана.

1. *Nörlund H. B.* Forlesungen über Differencenrechnung. – Berlin, 1924. – 551 S.
2. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 140 с.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук.думка, 1985. – 216 с.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
5. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.

Получено 17.06.93