УДК 512.546

В. М. Полецких, канд.физ.-мат.наук,
С. С. Шестаков, асист. (Киев. ун-т)

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ СО СЛАБЫМ УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ (МАКСИМАЛЬНОСТИ) ДЛЯ НЕКОМПАКТНЫХ ПОДГРУПП

The structure of a locally compact solvable p-group satisfying the weak minimality (maximality) condition for noncompact subgroups is presented. As a consequence, the structure of a locally compact prosolvable p-group satisfying the minimality (maximality) condition for noncompact subgroups is obtained. An example is constructed that shows that results obtained cannot be applied to arbitrary inductively compact locally compact totally disconnected solvable groups.

Наведено будову локально компактної розв'язуваної p-групи, що задовольняє слабку умову мінімальності (максимальності) для некомпактних підгруп. Як наслідок одержано будову локально компактної пророзв'язуваної p-групи з умовою мінімальності (максимальності) для некомпактних підгруп. Побудовано приклад, який показує, що одержані результати не переносяться на довільні індуктивно компактні локально компактні розв'язувані групи.

Условимся под топологической группой G понимать локально компактную группу, под подгруппой — замкнутую подгруппу. Примем следующие обозначения: $\langle \overline{X} \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством X, C_{p^∞} — квазициклическая группа, Q_p — аддитивная группа поля p-адических чисел, $nK(G)$ — множество некомпактных подгрупп группы G.

Определение. *Будем говорить, что подмножество подгрупп A удовлетворяет слабому условию минимальности для подгрупп (условие* $\mathrm{Min}-\infty$*), если для любой бесконечной убывающей цепочки подгрупп $N_1 > N_2 > \ldots > N_i > \ldots$, где $N_i \in A$, все индексы $[N_i : N_{i+1}]$, за исключением конечного числа, конечны.*

Если в этом определении убывающую цепочку подгрупп заменить на возрастающую, то получим слабое условие максимальности. Обозначение: $\mathrm{Max}-\infty$.

Условия $\mathrm{Min}-\infty$, $\mathrm{Max}-\infty$ в классе дискретных групп введены Д. И. Зайцевым [1]. В этой же работе получено строение дискретных локально разрешимых групп с условием $\mathrm{Min}-\infty$ $(\mathrm{Max}-\infty)$ для подгрупп.

***Замечание* 1.** В работе используются следующие результаты из [2]. Напомним, что топологическая группа G называется слойно компактной, если при любом отображении $f_n\colon x \to x^n$, $x \in G$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, полный прообраз компакта есть компакт.

Подгруппа слойно компактной группы слойно компактна.

Расширение компактной подгруппы с помощью слойно компактной есть слойно компактная группа.

Некомпактная слойно компактная p-группа G содержит подгруппу типа C_{p^∞} или Q_p.

Топологическая нильпотентная p-группа G слойно компактна тогда и только тогда, когда G — расширение подгруппы D с помощью компактной, причем подгруппа D содержит центральный относительно G ряд $1 = D_0 < D_1 < D_2 < \ldots < D_k < \ldots < D_m = D$, факторы которого D_{j+1}/D_j при $j \le k$ типа C_{p^∞}, а все остальные типа Q_p.

Лемма 1. *Пусть p-группа $G = AN$, где $A \cap N = 1$, $A \cong C_{p^\infty}$, N — компактная абелева периодическая нормальная подгруппа. Множество $nK(G)$ удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}-\infty$ *(соответственно* $\mathrm{Max}-\infty$*) тогда и только тогда, когда G удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}-\infty$ *(соответственно* $\mathrm{Max}-\infty$*) для нормальных подгрупп, принадлежащих N.*

Доказательство для случая Min $-\infty$ (для случая Max $-\infty$ аналогично).

Необходимость. Пусть $N_1 > N_2 > \ldots > N_k > \ldots$ — цепочка нормальных подгрупп, принадлежащих N. По условию для цепочки $AN_1 > AN_2 > \ldots$ $\ldots > AN_k > \ldots$ выполнено $[AN_j : AN_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$. Значит, $AN_j = \bigcup_{t=1}^{s} y_t AN_{j+1}$, где $y_t = a_t z_t$, $a_t \in A$, $z_t \in N_j$. Отсюда $AN_j = \bigcup_{t=1}^{s} a_t z_t A \times N_{j+1} = \bigcup_{t=1}^{s} a_t A z_t' N_{j+1} = \bigcup_{t=1}^{s} A z_t' N_{j+1}$, где $z_t' \in N_j$. Но $A \cap N = 1$, следовательно, $N_j = \bigcup_{t=1}^{s} z_t' N_{j+1}$. Таким образом, $[N_j : N_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$.

Достаточность. Пусть $M_1 > M_2 > \ldots > M_k > \ldots$ — цепочка из $nK(G)$. В силу $C_{p^\infty} \cong G/N > M_i N/N$ и некомпактности M_i имеем $G = M_i N$. Следовательно, $M_i \cap N = N_i \lhd G$. По условию $[N_j : N_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$. Пусть $N_j = \bigcup_{t=1}^{s} y_t N_{j+1}$. Так как $M_i N/N \cong M_i/M_i \cap N$, то M_i — расширение компактной подгруппы с помощью C_{p^∞}. А это означает, что $M_i > A \cong C_{p^\infty}$ (замечание 1). Следовательно, $M_j > M_{j+1} > A \cong C_{p^\infty}$ и $M_j = N_j A$, $M_{j+1} = N_{j+1} A$. Отсюда $M_j = N_j A = \left(\bigcup_{t=1}^{s} y_t N_{j+1}\right) A \subset \bigcup_{t=1}^{s} y_t M_{j+1}$. Таким образом, $[M_j : M_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$.

Лемма 2. *Пусть дискретная разрешимая p-группа* $G = AS$, *где* $A \cong C_{p^\infty}$, $S \lhd G$, $A \cap S = 1$. *Если цепочка нормальных подгрупп* $L_1 > L_2 > \ldots$ $\ldots > L_k > \ldots$ *не удовлетворяет условию* Min $-\infty$ (*соответственно* Max $-\infty$), *то цепочка* $S_1 > S_2 > \ldots > S_k > \ldots$, *где* $S_k = S \cap L_k$, *также не удовлетворяет условию* Min $-\infty$ (*соответственно* Max $-\infty$).

Доказательство. Допустим противное, пусть $[S_j : S_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$. В силу $L_j/S_j \cong L_j S/S$ фактор-группа L_j/S_j либо конечна, либо типа C_{p^∞}.

Пусть существует m такое, что $[L_m : S_m] < \infty$. Тогда $L_m/S_m \supset$ $\supset L_{m+n} S_m/S_m \cong L_{m+n}/S_{m+n}$ при $n > 0$. Значит, $[L_{m+n} : S_{m+n}] < \infty$. Но $L_j/S_{j+1} \cong (L_j/S_j)/(S_j/S_{j+1})$ и $L_j/L_{j+1} \cong (L_j/S_{j+1})/(L_{j+1}/S_{j+1})$. Следовательно, при $j \geq \max(k, m)$ $[L_j : L_{j+1}] < \infty$.

Итак, можно считать, что все факторы $L_j/S_j \cong A \cong C_{p^\infty}$ при $j \geq k$. Так как $V = L_j/S_{j+1} = (L_j/S_j)/(S_j/S_{j+1})$, то V черниковская и, значит, $V = F \leftthreetimes A$, где F — конечная подгруппа. Далее, $L_j/L_{j+1} \cong (L_j/S_{j+1})/(L_{j+1}/S_{j+1})$. Так как $L_j/S_{j+1} = F \leftthreetimes A$ и $L_{j+1}/S_{j+1} \cong A$, то $[L_j : L_{j+1}] < \infty$ при $j \geq k$.

Замечание 2. Пусть G — топологическая абелева группа, Γ — ее группа характеров. Если $\mathrm{Aut}(G)$ — некоторая группа топологических автоморфизмов, то $\mathrm{Aut}(G)$ задает некоторую группу топологических автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ группы Γ.

Пусть $A \in \mathrm{Aut}(G)$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$. Группа $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ строится так: для $A \in \mathrm{Aut}(G)$ ставится в соответствие B_A из $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ по правилу $B_A(\gamma) = \gamma(A^{-1}(g))$. При этом известно, что $\mathrm{Aut}(G)$ и $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ изоморфны в топологии Браконье [8]. Далее, W — допустимая подгруппа G относительно $\mathrm{Aut}(G)$ тогда и только тогда, когда аннулятор $\Phi(W)$ — допустимая подгруппа относительно $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

Замечание 3. Справедливо утверждение [3]. Топологическая индуктивно разрешимая p-группа G тогда и только тогда конечного ранга, когда $G \triangleright S$; G/S — компактная группа с условием максимальности для подгрупп; подгруппа S содержит центральный ряд

$$1 \triangleleft S_1 \triangleleft S_2 \triangleleft \ldots \triangleleft S_k = S, \tag{1}$$

где S_1 — черниковская группа типа $p^\infty \times \ldots \times p^\infty$, а остальные факторы типа Q_p.

Топологическая индуктивно разрешимая p-группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$), когда G — группа конечного ранга.

Определение. *Топологическая группа G называется квазиделимой, если она не имеет истинных подгрупп конечного индекса.*

Понятно, что квазиделимость наследуется расширениями, квазиделимые подгруппы порождают квазиделимую подгруппу. Если топологическая группа G имеет нетривиальную квазиделимую подгруппу, то она имеет единственную максимальную квазиделимую подгруппу D. Ясно, что $D \triangleleft G$.

Лемма 3. *Пусть G — топологическая некомпактная проразрешимая p-группа. Если $nK(G)$ удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$), то G имеет квазиделимую подгруппу S такую, что G/S — компактная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп.*

Доказательство. Пусть $H \triangleleft G$, H — компактная подгруппа, $G_1 = G/H$ разрешима, $1 < K_1 < K_2 < \ldots < K_t = G_1$ — нормальный ряд группы G_1, составленный из замыканий коммутантов, $B = K_i/K_{i-1}$ — первый некомпактный фактор, N — открытая компактная подгруппа B. Тогда $nK(B/N)$ удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$). А это означает, что группа B/N черниковская [1]. Пусть L — такая компактная подгруппа в G, что G/L типа C_{p^∞}. Но тогда согласно замечанию 1 G содержит подгруппу типа C_{p^∞} или типа Q_p. Следовательно, максимальная квазиделимая подгруппа $S \neq \neq 1$, причем в силу некомпактности S G/S — группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп. Группа G/S компактна. Действительно, если допустить противное, то, повторив предыдущие рассуждения, получим, что G/S содержит подгруппу типа C_{p^∞} или типа Q_p. А этого в силу максимальности S быть не может.

Лемма 4. *Пусть G — топологическая разрешимая p-группа, фактор-группа $G/N \cong C_{p^\infty}$, N — компактная подгруппа. Если $nK(G)$ удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$), то G — группа конечного ранга.*

Доказательство. Пусть сначала N — периодическая абелева группа. С учетом замечания 1 G имеет подгруппу $A \cong C_{p^\infty}$, причем $G = AN$. Так как $A \cap N$ — конечная подгруппа, то можно считать, что $A \cap N = 1$. Из замечания 2 следует, что можно построить подгруппу $V = A \curlywedge N^*$, где N^* — двойственная к N, $N^* \triangleleft V$. По лемме 1 N удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для нормальных подгрупп из G. Но тогда с учетом замечания 2 N^* удовлетворяет условию $\mathrm{Max}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Min}-\infty$) для нормальных подгрупп из V. С учетом леммы 2 дискретная группа $A \curlywedge N^*$ удовлетворяет условию $\mathrm{Max}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Min}-\infty$) для нормальных подгрупп. Но тогда N^* — конечная группа [4]. Отсюда G — группа конечного ранга.

Пусть $M = \overline{\langle x^p, [N,N], x \in N \rangle}$. Факторизуя G по M, приходим к предыдущему случаю. Следовательно, по теореме Бернсайда $N = \overline{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle}$ [5]. Так как в N подгрупп данного индекса конечное число, то G имеет полную систему окрестностей единицы $\{W_n\}_{n=1,2,\dots}$, состоящую из нормальных подгрупп. Пусть S — подгруппа G из леммы 3. Тогда G/S как компактная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп есть группа конечного ранга (замечание 3). Пусть $V_n = S \cap W_n$. Тогда $S/W_n = p^\infty \times \dots \times p^\infty$ как дискретная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для бесконечных подгрупп [1]. Поскольку V_n — полная система окрестностей единицы группы S, то S — абелева подгруппа. Подгруппа S слойно компактна как расширение компактной с помощью черниковской типа $p^\infty \times \dots \times p^\infty$. Отсюда с учетом замечания 1 подгруппа S конечного ранга. В классе топологических разрешимых p-групп расширение группы конечного ранга с помощью группы конечного ранга есть группа конечного ранга [6]. Поэтому G — группа конечного ранга.

Лемма 5. *Пусть S — квазиделимая проразрешимая p-группа и $nK(S)$ удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}-\infty$ (*соответственно* $\mathrm{Max}-\infty$). *Тогда S содержит центральный ряд*

$$1 \lhd S_1 \lhd S_2 \lhd \dots \lhd S_k = S, \tag{2}$$

где S_1 — черниковская подгруппа типа $p^\infty \times \dots \times p^\infty$, а остальные факторы типа Q_p.

Доказательство. Пусть S — разрешимая группа, $1 \lhd K_1 \lhd K_2 \lhd \dots \lhd K_{i-1} \lhd K_i \lhd \dots \lhd K_t = S$ — нормальный ряд, составленный из замыканий коммутантов, K_i/K_{i-1} — первый некомпактный фактор, H — открытая компактная подгруппа в K_i такая, что $H > K_{i-1}$. Тогда K_i/H — дискретная черниковская абелева группа как дискретная группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп. Отсюда по лемме 4 подгруппа H и, значит, K_i — группы конечного ранга. В силу некомпактности K_i фактор-группа S/K_i — группа с условием $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп. По замечанию 3 фактор-группа S/K_i — группа конечного ранга. Но тогда S — группа конечного ранга (в классе разрешимых p-групп конечность ранга наследуется расширениями [6]). Применяя еще раз замечание 3, получаем, что S содержит ряд (2).

Общий случай. Пусть $H \lhd S$, H — компактная подгруппа, фактор-группа S/H разрешима. Рассмотрим разрешимую фактор-группу S/L, где $L = \overline{\langle h^p, [H,H] \rangle}$, $h \in H$. В силу предыдущего случая фактор-группа H/L конечна и, значит, $H = \overline{\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle}$. Поскольку H как конечнопорожденная подгруппа имеет конечное число подгрупп данного индекса, то $H > H_\alpha$, $[H:H_\alpha] < \infty$, $H_\alpha \lhd S$, $\bigcup_\alpha H_\alpha = 1$. Очевидно, что в силу конечности $[H:H_\alpha]$ фактор-группы S/H и S/H_α содержат ряды типа (2) одинаковой длины. Значит, S — нильпотентная группа и существование ряда (2) следует из предыдущего случая.

Теорема 1. *Пусть G — топологическая некомпактная разрешимая p-группа. $nK(G)$ тогда и только тогда удовлетворяет условию* $\mathrm{Min}-\infty$ (*соответственно* $\mathrm{Max}-\infty$), *когда G — группа конечного ранга (напомним, что* *строение топологических разрешимых p-групп конечного ранга вполне известно, замечание* 3).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть S — максимальная квазиделимая подгруппа, тогда S — группа конечного ранга. Фактор-группа G/S удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп. По замечанию 3 G/S и, значит, G — группы конечного ранга.

Достаточность. Если G — группа конечного ранга, то G удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) для подгрупп (замечание 3).

Следствие 1. *Пусть G — проразрешимая некомпактная p-группа. $nK(G)$ удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда G содержит подгруппу S такую, что фактор-группа G/S конечна, а подгруппа S либо черниковская типа $p^{\infty}\times\ldots\times p^{\infty}$, либо типа Q_p.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть S — максимальная квазиделимая подгруппа. Тогда фактор-группа G/S компактна (лемма 3). Поскольку $nK(S)$ удовлетворяет условию минимальности, то из существования ряда (2) следует, что S либо черниковская типа $C_{p^\infty}\times\ldots\times C_{p^\infty}$, либо типа Q_p. G/S — группа с условием минимальности для подгрупп, поэтому G/S — конечная группа.

Достаточность. Если $S\cong C_{p^\infty}\times\ldots\times C_{p^\infty}$, то G — дискретная черниковская группа. Если $S\cong Q_p$, то любая некомпактная подгруппа N содержит S и, значит, $nK(G)$ удовлетворяет условию минимальности.

Следствие 2. *Пусть G — проразрешимая некомпактная p-группа. $nK(G)$ удовлетворяет условию максимальности тогда и только тогда, когда G содержит подгруппу S такую, что G/S — компактная группа с условием максимальности для подгрупп, а S — группа типа C_{p^∞} или типа Q_p.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть S — снова максимальная квазиделимая подгруппа, в силу некомпактности S компактная фактор-группа G/S удовлетворяет условию максимальности. Из существования ряда (2) следует, что S либо типа C_{p^∞}, либо типа Q_p.

Достаточность. Группа G содержит открытую компактную подгруппу H с условием максимальности для подгрупп. А это означает, что группа G удовлетворяет свойству: если $L<G$, $V\lhd G$, то LV — замкнутая подгруппа [7]. Пусть H — некомпактная подгруппа из G, тогда в силу σ-компактности NS получаем, что $NS/S\cong N/N\cap S$ — компактная группа. Следовательно, $N\supset S$. Поскольку все некомпактные подгруппы содержат S, то $nK(G)$ удовлетворяет условию максимальности для подгрупп.

Следующий пример показывает, что полученные результаты в полном объеме не переносятся на произвольные топологические индуктивно компактные вполне несвязные разрешимые группы.

Пример. В. С. Чариным построен пример дискретной группы $R=C_{q^\infty}\leftthreetimes G$, где G — абелева группа экспоненты p, $p\neq q$, имеющей свойство: $G\lhd R$ и для любой подгруппы $N\lhd R$ выполняется либо $N=1$, либо $N\geq G$.

С учетом замечания 2, считая C_{q^∞} дискретной группой автоморфизмов, можно построить группу $P=C_{q^\infty}\leftthreetimes\Gamma$, где Γ — двойственная к G. Ясно, что P удовлетворяет условию минимальности (максимальности) для нормальных подгрупп, принадлежащих Γ. Легко видеть, что лемма 1 остается верной, если $\mathrm{Min}-\infty$ для $nK(G)$ (соответственно $\mathrm{Max}-\infty$) заменить на условие минимальности (соответственно максимальности) для $nK(G)$. Отсюда группа P

удовлетворяет условию $\mathrm{Min}-\infty$ для $nK(G)$, условию $\mathrm{Max}-\infty$ для $nK(G)$, условию минимальности (максимальности) для подгрупп из $nK(G)$. Однако P — группа бесконечного ранга.

1. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – **20**, №4. – С. 472– 482.
2. *Полецких В. М.* Слойно компактные нильпотентные группы // Сиб. мат. журн. – 1975. – **16**, №4. – С. 801 – 809.
3. *Полецьких В. М., Чарін В. С.* Про один клас локально компактних розв'язних груп // Вісн. Київ. ун-ту. – 1978. – **20**. – С. 98 – 108.
4. *Курдаченко Л. А.* Группы, удовлетворяющие слабым условиям минимальности и максимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн. – 1979. – **20**, №5. – С. 1067 – 1076.
5. *Кох Х.* Теория Галуа p-расширений. – М.: Мир, 1973. – 194 с.
6. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга. II // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, №3. – С. 85 – 96.
7. *Полецьких В. М.* Про деякі властивості груп з умовою індуктивності для підгруп // Допов. АН УРСР. – 1976. – №12. – С. 261 – 360.
8. *Мухин Ю. Н.* Локально-компактные группы. – Свердловск: Изд-во Урал. ун-та. – 92 с.

Получено 27.11.92