УДК 531. 381

В. Н. Кошляков, акад. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА В КВАТЕРНИОННЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

The quaternion analog of the Euler dynamic equations, which was obtained in [1 – 3], is generalized to the case of an arbitrary trihedron connected with a body.

Узагальнюється одержаний у роботах [1 – 3] кватерніонний аналог динамічних рівнянь Ейлера на випадок зв'язаного з тілом довільного тригранника.

Пусть Ox, Oy, Oz — оси некоторого ортогонального трехгранника произвольной ориентации, связанного с телом и имеющего начало в какой-либо неподвижной точке тела. Динамические уравнения Эйлера получаются проектированием на указанные оси векторного уравнения

$$(d\overline{K}/dt)_{xyz} + \overline{\omega} \times \overline{K} = \overline{M}, \tag{1}$$

где $\overline{K}$, $\overline{\omega}$ и $\overline{M}$ — соответственно векторы кинетического момента, угловой скорости тела и главного момента действующих на тело сил. Символом $(d\overline{K}/dt)_{xyz}$ обозначена относительная производная вектора $\overline{K}$ в системе $Oxyz$. Вводя столбцевые матрицы $K = (K_x, K_y, K_z)$ и $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, по определению вектора $\overline{K}$ имеем

$$K = I\omega, \tag{2}$$

где I — симметрическая матрица тензора инерции тела для точки O,

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Здесь I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} — осевые моменты инерции; I_{xy}, I_{yz} и I_{zx} — центробежные моменты инерции, отнесенные к осям Ox, Oy и Oz.

Кватернионное представление вектора $\overline{\omega}$ применительно к осям Ox, Oy и Oz имеет вид [4]

$$\overline{\omega} = 2\overline{\Lambda}^* \circ \frac{d\overline{\Lambda}}{dt}, \tag{4}$$

где $\overline{\Lambda}$ — нормированный собственный кватернион, составляющими которого являются параметры Родрига — Гамильтона λ_s, $s = 0, 1, 2, 3$, $\overline{\Lambda}^*$ — кватернион, сопряженный $\overline{\Lambda}$. Проектируя уравнение (1) на оси Ox, Oy и Oz и учитывая (2) – (4), получаем матричное уравнение вида

$$\begin{bmatrix} 1 & -I_{xy}/I_{xx} & -I_{zx}/I_{xx} \\ -I_{xy}/I_{yy} & 1 & -I_{yz}/I_{yy} \\ -I_{zx}/I_{zz} & -I_{yz}/I_{zz} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \lambda_0\ddot{\lambda}_1 - \lambda_1\ddot{\lambda}_0 + \lambda_3\ddot{\lambda}_2 - \lambda_2\ddot{\lambda}_3, \quad X_1 = m_x/2I_{xx}, \\
S_2 &= \lambda_0\ddot{\lambda}_2 - \lambda_2\ddot{\lambda}_0 + \lambda_1\ddot{\lambda}_3 - \lambda_3\ddot{\lambda}_1, \quad X_2 = m_y/2I_{yy}, \\
S_3 &= \lambda_0\ddot{\lambda}_3 - \lambda_3\ddot{\lambda}_0 + \lambda_2\ddot{\lambda}_1 - \lambda_1\ddot{\lambda}_2, \quad X_3 = m_z/2I_{zz},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
m_x &= M_x - (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z - (I_{xy}\omega_z - I_{zx}\omega_y)\omega_x - I_{yz}(\omega_z^2 - \omega_y^2), \\
m_y &= M_y - (I_{xx} - I_{zz})\omega_z\omega_x - (I_{yz}\omega_x - I_{xy}\omega_z)\omega_y - I_{zx}(\omega_x^2 - \omega_z^2), \\
m_z &= M_z - (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y - (I_{xz}\omega_y - I_{yz}\omega_x)\omega_z - I_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2).
\end{aligned}
$$

Разрешая уравнение (5) относительно дифференциальных комбинаций S_1, S_2, S_3 и вводя для удобства столбцевые матрицы $S = (S_1, S_2, S_3)$ и $m = (m_x, m_y, m_z)$, имеем

$$
S = \frac{1}{2} I^{-1} m, \tag{7}
$$

где I^{-1} — матрица, обратная (3),

$$
I^{-1} = \frac{1}{\mu I_{xx} I_{yy} I_{zz}} \begin{bmatrix} I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2 & I_{xy}I_{zz} + I_{zx}I_{yz} & I_{xy}I_{yz} + I_{yy}I_{zx} \\ I_{xy}I_{zz} + I_{yz}I_{zx} & I_{zz}I_{xx} - I_{zx}^2 & I_{xx}I_{yz} + I_{zx}I_{xy} \\ I_{xy}I_{yz} + I_{yy}I_{zx} & I_{xx}I_{yz} + I_{zx}I_{xy} & I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2 \end{bmatrix}, \tag{8}
$$

$$
\mu = 1 - (I_{yz}^2 I_{xx} + I_{zx}^2 I_{yy} + I_{xy}^2 I_{zz} + 2I_{xy}I_{yz}I_{zx})(I_{xx}I_{yy}I_{zz})^{-1}.
$$

В силу матричного представления (7) получаем и уравнения относительно S_k:

$$
S_k = \Phi_k, \quad k = 1, 2, 3, \tag{9}
$$

правые части которых имеют вид

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= \frac{1}{2\mu I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \left\{ \left(I_{yy}I_{zz} - I_{yz}^2\right)m_x + \left(I_{xy}I_{zz} + I_{zx}I_{yz}\right)m_y + \left(I_{xy}I_{yz} + I_{yy}I_{zx}\right)m_z \right\}, \\
\Phi_2 &= \frac{1}{2\mu I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \left\{ \left(I_{xy}I_{zz} + I_{yz}I_{zx}\right)m_x + \left(I_{zz}I_{xx} - I_{zx}^2\right)m_y + \left(I_{xx}I_{yz} + I_{zx}I_{xy}\right)m_z \right\}, \\
\Phi_3 &= \frac{1}{2\mu I_{xx}I_{yy}I_{zz}} \left\{ \left(I_{xy}I_{yz} + I_{yy}I_{zx}\right)m_x + \left(I_{xx}I_{yz} + I_{zx}I_{xy}\right)m_y + \left(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2\right)m_z \right\}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

К уравнениям (9), в которых значения S_k определяются согласно выражениям (6), добавляем еще одно, получаемое двукратным дифференцированием условия $\sum_{s=0}^{3} \lambda_s^2 = 1$ нормировки параметров λ_s. Имеем

$$
\lambda_0\ddot{\lambda}_0 + \lambda_1\ddot{\lambda}_1 + \lambda_2\ddot{\lambda}_2 + \lambda_3\ddot{\lambda}_3 = \Phi_4, \quad \left(\Phi_4 = -\sum_{s=0}^{3} \dot{\lambda}_s^2\right). \tag{11}
$$

Уравнения (9) и (11) образуют, в своей совокупности, систему нелинейных дифференциальных уравнений, которая с учетом условия нормировки легко разрешается относительно производных $\ddot{\lambda}_s$.

В результате получаем матричное уравнение вида

$$2I_{xx}I_{yy}I_{zz}d^2\lambda / dt^2 + Q\lambda = 0. \tag{12}$$

Его можно рассматривать как обобщение аналогичного ему матричного уравнения, полученного в работах [2,3] применительно к главным осям эллипсоида инерции для точки O. Матрицу Q, имеющую существенно нелинейную структуру своих составляющих, можно представить в блочной форме

$$Q = \begin{bmatrix} P & L \\ -L^T & P^T \end{bmatrix},$$

где, в свою очередь, матричные составляющие P и L (P^T и L^T— транспонированные матрицы P и L) имеют структуру введенных Кэли кватернионных матриц и в рассматриваемом случае представимы в виде

$$P = -2I_{xx}I_{yy}I_{zz}\begin{bmatrix} \Phi_4 & -\Phi_1 \\ \Phi_1 & \Phi_4 \end{bmatrix}, \quad L = 2I_{xx}I_{yy}I_{zz}\begin{bmatrix} \Phi_2 & \Phi_3 \\ -\Phi_3 & \Phi_2 \end{bmatrix}.$$

Действительно, при осуществлении произведения матриц P и L получается матрица той же структуры, что и каждая из них. Это свойство характерно для матриц Кэли [5].

Отметим, что в частном случае, когда оси Ox, Oy и Oz являются главными осями инерции тела в точке O, структура уравнения (12), а также матриц Q, P и L сохраняется [2, 3]. Упрощаются лишь выражения для составляющих Φ_1, Φ_2 и Φ_3. При этом в (6), (8) и (10) следует положить $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$. Обозначая далее $I_{xx} = A$, $I_{yy} = B$, $I_{zz} = C$, где A, B и C — главные моменты инерции тела в точке O, будем иметь

$$\Phi_1 = \frac{1}{2A}\left[M_x - (C - B)\omega_y\omega_z\right], \quad \Phi_2 = \frac{1}{2B}\left[M_y - (A - C)\omega_z\omega_x\right],$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2C}\left[M_z - (B - A)\omega_x\omega_y\right],$$

что с точностью до обозначений согласуется с результатами, полученными в работах [1 – 3].

1. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки// Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 5. – С. 677-691.
2. *Кошляков В. Н.* Об уравнениях тяжелого твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, в параметрах Родрига – Гамильтона// Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 4. – С. 16-25.
3. *Кошляков В. Н* Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. – М.: Наука, 1985. – 286 с.
4. *Бранец В.Н., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
5. *Булгаков Б.В.* Колебания. – М.: Гостехиздат, 1954. – 891 с.

Получено 11.02.94