УДК 517.956.2

Г. П. Лопушанська, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

ОДИН НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ

The approximation method for solving classical boundary value problems for the Laplace equation, which was suggested in [1–3], is extended to the case of the Poisson equation when the right-hand side of the equation and the functions given on a boundary are generalized functions.

Один наближений метод розв'язування класичних граничних задач для рівняння Лапласа, запропонований у [1–3], поширюється на випадок рівняння Пуассона, коли права частина рівняння і задані на межі області функції є узагальненими.

Нехай Ω — область в R^n, $n \geq 3$, обмежена замкненою $(n-1)$-вимірною поверхнею S класу C^∞, $\Omega_e = R^n \setminus \overline{\Omega}$, $S_{\pm\varepsilon} = \{x_{\pm\varepsilon} = x \pm \varepsilon \nu(x),\ x \in S\}$, $\nu(x)$ — орт внутрішньої нормалі до S у точці x, $D(S) = C^\infty(S)$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$, $D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, $D'(S)$, $D'(\overline{\Omega})$, $D_0'(\overline{\Omega})$ — простори лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) на $D(S)$, $D(\overline{\Omega})$, $D_0(\overline{\Omega})$ відповідно. Через $\langle \varphi, F \rangle$ позначимо дію $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$, через (φ, F) — дію $F \in D'(\overline{\Omega})$ на $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, а також $F \in D_0'(\overline{\Omega})$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Розглянемо узагальнену задачу Діріхле

$$\Delta u(x) = F(x),\ x \in \Omega, \quad F \in D_0'(\overline{\Omega}), \quad u|_S = F_1, \quad F_1 \in D'(S), \tag{1}$$

в одному з формулювань [4].

Нехай $F \in D_0'(\overline{\Omega})$, $F_1 \in D'(S)$. Тоді узагальнену функцію F_1 можна розглядати як узагальнену функцію в $E'(R^n) = \left(C^\infty(R^n)\right)'$ з носієм на S, вважаючи $(\varphi, F_1) = \langle \varphi, F_1 \rangle$, і можна визначити $\frac{\partial F_1}{\partial \nu} \in E'(R^n)$: $\left(\varphi, \frac{\partial F_1}{\partial \nu}\right) = -\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}, F_1 \right\rangle$. Розв'язком задачі (1) назвемо таку узагальнену функцію $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega; \\ 0, & x \overline{\in} \overline{\Omega}, \end{cases}$ задовольняє у просторі $E'(R^n)$ рівняння $\Delta \tilde{u} = \tilde{F} + F_0 + \frac{\partial F_1}{\partial \nu}$, де F_0 — невідома узагальнена функція з носієм на S, яка знаходиться з умови

$$\tilde{u}(x) = 0,\ x \in \Omega_e. \tag{2}$$

Згідно з [4], існує єдиний розв'язок задачі (1)

$$(\varphi, u) = \left(\int_\Omega \varphi(x)\omega(x,y)\,dx, F(y) \right) + \left\langle \int_\Omega \varphi(x)\omega(x,y)\,dx, F_0 \right\rangle -$$

$$- \left\langle \int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x,y)\,dx, F_1 \right\rangle \quad \forall\, \varphi \in D(\overline{\Omega}), \tag{3}$$

де $\omega(x, y)$ — фундаментальна функція оператора Лапласа,

$$\langle g, F_0 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \nu_y} \int\limits_S \varphi_g(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x,y) dS, F_1 \right\rangle -$$

$$- \left(\int\limits_S \varphi_g(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x,y) dS, F \right), \quad g \in D(S),$$

$\varphi_g(x)$ — розв'язок інтегрального рівняння

$$\frac{1}{2} \varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \omega(x,y) dS = g(y), \quad g \in S,$$

яке, як відомо, однозначно розв'язуване у $D(S)$.

Розвиваючи ідеї [1, 3], розглянемо один наближений метод знаходження невідомої узагальненої функції $F_0 \in D'(S)$. У роботі [4] показано, що умова (2) еквівалентна такій:

$$\langle \omega(x, y), F_0(y) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial \nu_y} \omega(x,y), F_1 \right\rangle - (\omega(x, y), F(y)), \quad x \in \Omega_e. \qquad (4)$$

Зауважимо, що $(\omega(x, y), F(y)) = f(x) \in C^\infty(\Omega_e)$.

Нехай S_1 — довільна замкнена поверхня C^∞, яка лежить в Ω_e $\operatorname{dist}(S, S_1) > 0$. Введемо функції $\omega_i(y) = \omega(x_i, y)$, $i = 1, 2, \ldots$, де $y \in S$, $x_i \in S_1$, розміщені всюди щільно на S_1. У роботах [1, 3] доведено, що ця система є лінійно незалежною і повною в $L_2(S)$. Побудуємо ортонормовану систему функцій

$$\psi_i(y) = \sum_{k=1}^{i} A_{ki} \omega_k(y) \in D(S), \quad \omega_i(y) = \sum_{k=1}^{i} B_{ki} \psi_k(y), \qquad (5)$$

де A_{ki}, B_{ki} — певні сталі.

Запишемо формальний розклад узагальненої функції F_1 в ряд Фур'є за функціями $\psi_i(y)$: $F_1 = \sum_{k=1}^{\infty} F_{1i} \psi_i(y)$, де $F_{1i} = \langle \psi_i, F_1 \rangle$, або, згідно з (5), $F_{1i} = \sum_{k=1}^{i} A_{ki} \langle \omega_k(y), F_1 \rangle$.

Теорема 1. *Довільна узагальнена функція $F_1 \in D'(S)$ розкладається у просторі $D'(S)$ в ряд Фур'є за системою $\{\psi_i(y)\}_{i=1}^{\infty}$.*

Нехай для довільної $\varphi \in D(S)$

$$\left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{N} F_{1k} \psi_k(y) \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} \int\limits_S \varphi \psi_k ds\, \psi_k(y), F_1 \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{N} \varphi_k \psi_k(y), F_1 \right\rangle.$$

Згідно з [4, 5], існує таке натуральне число m і така $f_1(y) \in L_2(S)$, що $\langle \varphi, F_1 \rangle = \int_S f_1(y) (1 - \Delta_S)^{m/2} \varphi(y) dS$, де Δ_s — оператор Лапласа – Бельтрамі на S. Тоді маємо вираз $\int_S f_1(y) \sum_{k=1}^{N} \varphi_k (1 - \Delta_S)^{m/2} \psi_k(y) dS$.

Нехай l, p — цілі невід'ємні, $l > \frac{n-1}{2}$, $m = 2p - l$. Оскільки

$$(1 - \Delta_S)^p \psi_k = \psi_k,$$

$$(1-\Delta_S)^{-l/2}\psi_k(y) = \int_S \omega_l(y,\eta,1)\,\psi_k(\eta)\,dS \in L_1(S) \subset L_2(S)$$

(тут $\omega_l(y,\eta,1)$ — фундаментальна функція оператора $(1-\Delta_S)^{l/2}$, $\omega_l(y,\eta,1) = O(|y-\eta|^{-n+l+1})$ [7]), то

$$\left\langle \varphi, \sum_{k=1}^{N} F_{1k}\psi_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{N}\varphi_k \int_S \left(\int_S f_1(y)\,\omega_l(y,\eta,1)\,dS_y \right) \psi_k(\eta)\,dS_\eta = \sum_{k=1}^{N}\varphi_k \tilde{f}_{1k},$$

де $\tilde{f}_{1k}$ — коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є функції $\tilde{f}_1(\eta) = \int_S f_1(y)\,\omega_l(y,\eta,1)\,dS_y \in L_2(S)$. Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{1k}\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_{1k}\varphi_k < \infty,$$

$$\langle \varphi, F_1 \rangle - \sum_{k=1}^{N} F_{1k}\varphi_k = \int_S f_1(y)(1-\Delta_S)^{m/2}\left(\varphi(y) - \sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k(y) \right) dS \le$$

$$\le \left(\int_S f_1^2\,dS \right)^{1/2} \left\{ \int_S \left[(1-\Delta_S)^{m/2}\left(\varphi(y) - \sum_{k=1}^{N}\varphi_k\psi_k(y) \right) \right]^2 dS \right\}^{1/2}.$$

Із попередніх міркувань і леми 1.5 з [6] випливає, що останній вираз можна зробити довільно малим, вибравши досить велике N.

Шукаємо невідому узагальнену функцію у вигляді ряду Фур'є $F_0 = \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i}\psi_i(y)$. Покладаючи у (4) $x = x_k$, знаходимо $\langle \omega_k(y), F_0 \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega_k(y), F_1 \right\rangle - f(x_k)$, а тоді

$$F_{0i} = \left\langle \sum_{k=1}^{i} A_{ki}\frac{\partial}{\partial\nu_y}\omega_k(y), F_1 \right\rangle - \sum_{k=1}^{i} A_{ki}\,f(x_k) = \left\langle \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu}, F_1 \right\rangle - (\psi_i, F). \quad (6)$$

Тепер розглянемо узагальнені функції $u^N(x) \in D'(\overline{\Omega})$:

$$(\varphi, u^N) = \left(\int_\Omega \varphi(x)\,\omega(x,y)\,dx, F(y) \right) +$$

$$+ \int_\Omega \varphi(x)\,dx \int_S \sum_{i=1}^{N} \left(F_{0i}\,\omega(x,y) - F_{1i}\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial\nu_y} \right) \psi_i(y)\,dS, \quad (7)$$

$$\varphi \in D(\overline{\Omega}), \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Із теореми 1 і (3) випливає така теорема.

Теорема 2. *Узагальнені функції* $u^N(x)$, *визначені формулою* (7), *де* F_{0i} *знаходяться згідно з* (6), *наближають у просторі* $D'(\overline{\Omega})$ *розв'язок* (3) *задачі* (1).

Теорема 3. *Нехай* $F = 0$, *функції*

$$u^N(x) = \int_S \sum_{i=1}^{N} \left(F_{0i}\,\psi_i(y)\omega(x,y) - F_{1i}\,\psi_i(y)\frac{\partial\omega(x,y)}{\partial\nu_y} \right) dS, \; N = 1, 2, \ldots, \quad (8)$$

наближають розв'язок задачі (1) *у кожній точці* x *області* Ω.

Як і в [4, 6], можна показати, що при $F = 0$ задача (1) еквівалентна знаходженню гармонійної функції всередині Ω, яка на S набуває узагальнених граничних значень F_1 [5], тобто задовольняє умову

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) u(x_\varepsilon) dS_\varepsilon = \langle \varphi, F_1 \rangle \quad \forall\, \varphi \in D(S).$$

Проводячи далі міркування, як при доведенні теореми 7.8. з [6], можна показати, що

$$\lim_{N \to \infty} u^N(x) = u(x) = \langle \omega(x, y), F_0 \rangle - \left\langle \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial \nu_y}, F_1 \right\rangle, \ x \in \Omega,$$

де $F_0 = \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i}\, \psi_i \in D'(S)$, $u(x)$ гармонійна в Ω, набуває на S узагальнених значень F_1, а $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ — узагальнених значень F_0.

Аналогічно можна будувати наближені розв'язки інших основних граничних задач для рівняння Лапласа, внутрішніх і зовнішніх. Використовуючи [8 – – 12], одержані результати можна узагальнити на випадок загальних еліптичних граничних задач.

1. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. – М.: Наука, 1991. – 351 с.
2. *Алексидзе М. А., Арвеладзе Н. М., Лекашвили Н. Л.* Численная реализация одного нового приближенного метода решения граничных задач. – Тбилиси: Мецниереба, 1969. – 145 с.
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. – М.: Физматгиз, 1963. – 472 с.
4. *Лопушанська Г. П.* Про один метод розв'язування крайових задач у просторах розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 28–33.
5. *Гупало Г. С.* Про узагальнену задачу Діріхле // Доп. АН УРСР. – 1966. – № 7. – С. 843–846.
6. *Гупало Г.-В. С., Лопушанська Г. П.* Еліптичні й параболічні узагальнені крайові задачі. – К.: НМК ВО, 1992. – 124 с.
7. *Гупало Г. С.* Оцінки фундаментального розв'язку рівняння $(1 - \Delta_s)^{k/2} u = f$ // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз., хім., мех.-мат. – 1968. – С. 178–182.
8. *Ройтберг И. Я., Ройтберг Я. А.* Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями фундаментальных решений // Докл. АН Украины. – 1992. – № 12. – С. 15–20.
9. *Мех И. Я.* О фундаментальных решениях эллиптических операторов // Докл. АН УССР. – 1991. – № 5. – С. 14–18.
10. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной граничной задачи для эллиптической по Петровскому системы дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 1985. – **37**, № 1. – С. 116–119.
11. *Hamann U.* Approximation nuttels incarkombinationen von Fundamentallosungen elliptischer Differentialoperatoren // Math. Nachr. – 1991. – **154**. – S. 265–284.
12. *Hamann U.* Approximation by linear combinations of fundamental solutions of elliptic differential operators // Abstr. Conf. "Elliptic boundary value problems". – 1992. – V. 20.

Одержано 09.07.93