УДК 517.92

В. Г. Будник, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О КОПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛЫХ НА КРУГЕ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

An estimate is obtained for the approximation by algebraic polynomials of convex functions of two variables with second derivatives bounded on a circle.

Одержана оцінка наближення випуклими алгебраїчними многочленами випуклих функцій двох змінних, які мають на крузі обмежені другі похідні.

В последнее время появилось много работ (см., например, [1 – 3]), посвященных вопросам коприближения функций. Вопросам приближения выпуклых функций выпуклыми многочленами посвящены работы [4 – 6]. Следует отметить, что наибольшие достижения в этом направлении получены для функций одной переменной. Многомерный случай исследован значительно меньше. В данной работе рассматривается вопрос о приближении одного класса выпуклых функций двух переменных алгебраическими многочленами с сохранением выпуклости.

Пусть $\mathbb{B}^2 := \{x\colon x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x| \le 1\}$ — круг в $\mathbb{R}^2$ единичного радиуса, где $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{1/2}$ — длина вектора x в евклидовой метрике, $W_\infty^2(\mathbb{B}^2)$ — класс функций $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ таких, что для каждого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$ существует производная $f_e'(x)$ по направлению $e = (b-a)/|b-a|$ в каждой точке $x \in [a, b]$, являющаяся абсолютно непрерывной функцией на $[a, b]$ и при этом $\operatorname{ess\,sup}\limits_{x\in[a,b]} |f_e''(x)| \le 1$, где $f_e''(x)$ — вторая производная функции f по направлению e. Полагаем

$$\mathbb{V}_\infty^2(\mathbb{B}^2) := \Bigg\{ f\colon f \in W_\infty^2(\mathbb{B}^2),$$

$$\sup_{[a,b]\subset\mathbb{B}^2} \operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} f_e''(x) \ge M_0 > 0, \quad e = \frac{b-a}{|b-a|} \Bigg\}.$$

Для каждой функции f, ограниченной и выпуклой на произвольном выпуклом компакте $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, А. С. Шведов [6] построил последовательность выпуклых на $\mathfrak{D}_1 \supset \mathfrak{D}$ многочленов $p_N(f) \in \mathcal{P}_N$, $N \in \mathbb{N}$, таких, что $\|f - p_N(f)\|_{C(\mathfrak{D})} \le A\omega(f, 1/(N+1))$, где $\|\cdot\|_{C(\mathfrak{D})}$ — равномерная норма на компакте $\mathfrak{D}$, A — константа, зависящая лишь от m, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_1$, ω — модуль непрерывности, а $\mathcal{P}_N$ — пространство алгебраических многочленов порядка не выше N.

В данной статье результат А. С. Шведова [6] усиливается для случая, когда $\mathfrak{D} = \mathbb{B}^2$ и $f \in \mathbb{V}_\infty^2(\mathbb{B}^2)$. Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема. *Если* $f \in \mathbb{V}_\infty^2(\mathbb{B}^2)$, *то существует последовательность выпуклых на* $2\mathbb{B}^2$ *многочленов* $p_{N+2} \in \mathcal{P}_{N+2}$, $N \in \mathbb{N}$, *таких, что*

$$\|f - p_{N+2}\|_{C(\mathbb{B}^2)} \le M/N^2, \tag{1}$$

где M *— постоянная, не зависящая от* N.

При доказательстве теоремы используется следующая лемма.

Лемма. *Пусть* $f \in \mathbb{V}_\infty^2(\mathbb{B}^2)$, *тогда существует функция* g, *равномерно непрерывная и выпуклая на* $\mathbb{R}^2$, *такая, что* $g(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{B}^2$, *и* $M > 0$ *такое, что для произвольного* $x \in \mathbb{B}^2$, *произвольного единичного вектора* e *и произвольного* $\lambda > 0$

$$|g(x-\lambda e) - 2g(x) + g(x+\lambda e)| \leq M\lambda^2. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть O — центр круга $\mathbb{B}^2$, точка C лежит на окружности $\partial\mathbb{B}^2$, точка B — вне круга $\mathbb{B}^2$. Пусть A — точка пересечения отрезка $[OB]$ с окружностью $\partial\mathbb{B}^2$, E — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую OC, CD — касательная к кругу $\mathbb{B}^2$ в точке C.

Будем пользоваться следующими обозначениями: $t := \angle AOC$, x_0 — координаты точки A, x_t — координаты точки C, $e_\alpha(t) := \vec{CO}/|CO|$, $e_\beta(t) := \vec{DC}/|DC|$, $e_t := \vec{CB}/|CB|$, $e_{0,t} := \vec{AC}/|AC|$.

Определим функцию g следующим образом: $g(x) = f(x)$, если $x \in \mathbb{B}^2$, где $g(x) := \max\limits_{y \in \mathbb{B}^2} (f(y) + f'_{e(x,y)}(y)|x-y|)$, где $e(x,y) = (x-y)/|x-y|$ и $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}^2$. В дальнейшем для сокращения записей будем использовать обозначение $k_y(x) = f(y) + f'_{e(x,y)}(y)|x-y|$. Нетрудно проверить, что

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{B}^2, \\ \max\limits_{y \in \partial\mathbb{B}^2} k_y(x), & x \in \mathbb{R}^2/\mathbb{B}^2. \end{cases}$$

В принятых обозначениях, очевидно, значение функции g в точке B можно записать так: $g(x_t + e_t|BC|) = \max\limits_t \{k_{x_t}(x_t + e_t|BC|)\}$, где

$$t \in [-\arccos(1/(1+|AB|)),\ \arccos(1/(1+|AB|))].$$

Не ограничивая общности, будем считать $t \in [0, \arccos(1/(1+|AB|))]$. Функция $g(x)$, очевидно, будет выпуклой и равномерно непрерывной на $\mathbb{R}^2$.

Докажем соотношения (2). Если $\{x - e\lambda,\ x + e\lambda\} \subset \mathbb{B}^2$, то

$$|g(x-e\lambda) - 2g(x) + g(x+e\lambda)| = |f(x-e\lambda) - 2f(x) + f(x+e\lambda)| \leq M\lambda^2. \tag{3}$$

Пусть $x \in \partial\mathbb{B}^2$ и $e = e_0 := \vec{AB}/|AB|$, $|AB| = \lambda$. Покажем, что

$$g(x_0 + e_0\lambda) - k_{x_0}(x_0 + e_0\lambda) \leq M\lambda^2. \tag{4}$$

Здесь и дальше M — константы, вообще говоря, разные, не зависящие от λ, x, e. Используя формулу Тейлора, имеем

$$k_{x_t}(x_t + e_t|BC|) = k_{x_t}(x_0 + e_0\lambda) = f(x_t) + f'_{e_t}(x_t)|BC| =$$

$$= f(x_t) + [f'_{e_\alpha(t)}(x_t)(e_t, e_\alpha(t)) + f'_{e_\beta(t)}(x_t)(e_t, e_\beta(t))]|BC| =$$

$$= f(x_t) + f'_{e_\alpha(t)}(x_t)(e_t, e_\alpha(t))|BC| + f'_{e_\beta(t)}(x_t)(e_t, e_\beta(t))|BC| =$$

$$= f(x_t) - f'_{e_\alpha(t)}(x_t)|CE| - f'_{e_\beta(t)}(x_t)|BE|,$$

где (e', e'') — скалярное произведение векторов e' и e''. Учитывая, что

$|OA| = |OC| = 1$, $|AB| = \lambda$, получаем

$$|BE| = (1+\lambda)\sin t,$$

$$|CE| = |OE| - |OC| = (1+\lambda)\cos t - 1 = \lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Отсюда имеем

$$k_{x_t}(x_0 + e_0\lambda) = f(x_t) - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}\right) - f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)(1+\lambda)\sin t,$$

а также $k_{x_0}(x_0 + e_0\lambda) = f(x_0) - f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\lambda$. Очевидно,

$$g(x_0 + e_0\lambda) - k_{x_0}(x_0 + e_0\lambda) = \max_t\,[k_{x_t}(x_0 + e_0\lambda) - k_{x_0}(x_0 + e_0\lambda)].$$

Преобразуем функцию

$$\kappa(t) := k_{x_t}(x_0 + e_0\lambda) - k_{x_0}(x_0 + e_0\lambda) = f(x_t) - f(x_0) -$$

$$- f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}\right) + f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\lambda - f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)(1+\lambda)\sin t.$$

Учитывая, что $|AC| = 2\sin(t/2)$, имеем

$$\kappa(t) = f(x_t) - f(x_0) - f'_{e_{0,t}}(x_t)2\sin\frac{t}{2} + f'_{e_{0,t}}(x_t)2\sin\frac{t}{2} -$$

$$- f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)(1+\lambda)\sin t + f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\lambda - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\sin(t/2)} [f'_{e_{0,t}}(x_0 + ue_{0,t}) - f'_{e_{0,t}}(x_t)]\,du\,+$$

$$+ \left[f'_{e_{\beta,t}}(x_t)\cos\frac{t}{2} - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\sin\frac{t}{2}\right]2\sin\frac{t}{2} -$$

$$- f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)(1+\lambda)\sin t + f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\lambda - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\sin(t/2)}\int\limits_0^{2\sin(t/2)-u} f''_{e_{0,t}}(x_0 + ue_{0,t} + se_{0,t})\,ds\,du - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)2\sin^2\frac{t}{2} -$$

$$- f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\lambda\sin(t) + f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\lambda - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\lambda - (1+\lambda)\,2\sin^2\frac{t}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_0^{2\sin(t/2)}\int\limits_0^{2\sin(t/2)-u} f''_{e_{0,t}}(x_0 + ue_{0,t} + se_{0,t})\,ds\,du + [f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0) - f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)]\,\lambda -$$

$$- f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\lambda\sin t + f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\lambda\,2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Так как при $t \in [0, \pi/2]$

$$\frac{2t}{\pi} \le \sin t \le t, \qquad (5$$

то, учитывая то, что $f \in \mathbb{W}^2_\infty(\mathbb{B}^2)$, получаем

$$\kappa(t) \le -M_0 4\sin^2\frac{t}{2} + M_1 t\lambda + M_2 t\lambda + M_3\lambda\,2\sin^2\frac{t}{2} \le -\frac{4M_0}{\pi^2}t^2 +$$

$$+ M_1 t\lambda + M_2 t\lambda + M_3 t\lambda \le -\frac{4M_0}{\pi^2}t^2 + M^0\lambda t,$$

где $M_0 > 0$ и $M^0 > 0$ — некоторые постоянные, $M_1 > 0$ такое, что

$$| f'_{e_\alpha(0)}(x_0) - f'_{e_\alpha(t)}(x_t)| \le M_1 t,$$

$$M_2 := \max_t | f'_{e_\beta(t)}(x_t)|, \quad M_3 := \max_t | f'_{e_{\alpha'}(t)}(x_t)|.$$

Исследуя выражение $-4M_0/\pi^2 t^2 + M^0 t\lambda$ на экстремум, легко видеть, что $\max \kappa(t) \le M\lambda^2$. Соотношение (4) доказано.

Пусть $|BC| = \lambda$. Покажем, что

$$| k_{x_0}(x_0 + e_0|AB|) - k_{x_t}(x_t + e_t|BC|)| \le M\lambda^2. \tag{6}$$

Если $k_{x_0}(x_0 + e_0|AB|) \le k_{x_t}(x_t + e_t|BC|)$, то (6) следует из (4) с учетом того, что $|AB| \le \lambda$. Поэтому достаточно показать, что $k_{x_0}(x_0 + e_0|AB|) - k_{x_t}(x_t + e_t\lambda) \le M\lambda^2$. Нетрудно видеть, что в этом случае

$$t \le \frac{\pi}{2}\sin t \le \frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{1+|AB|} \le \frac{\pi}{2}\lambda. \tag{7}$$

Учитывая, что $|BC| = \lambda$, $|OA| = |OC| = 1$, получаем

$$|AB| = |FB| - |FA| = \sqrt{|BC|^2 - |FC|^2} - (1 - |OF|) =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - (1 - \cos t) = \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$|CE| = |OE| - 1 = |OB|\cos t - 1 =$$

$$= \left(1 + \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)\cos t - 1 = \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t}\,\cos t - \sin^2 t,$$

$$|BE| = (1 + |AB|)\sin t = \left(1 + \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t,$$

где F — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую OB.

Используя формулу Тейлора, записываем

$$k_{x_0}(x_0 + e_0|AB|) = f(x_0) - f'_{e_\alpha(0)}(x_0)\left(\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2}\right),$$

$$k_{x_t}(x_t + \lambda e_t) = f(x_t) + f'_{e_t}(x_t)\lambda = f(x_t) - f'_{e_\alpha(t)}(x_t)|CE| - f'_{e_\beta(t)}(x_t)|BE| =$$

$$= f(x_t) - f'_{e_\alpha(t)}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t}\,\cos t - \sin^2\frac{t}{2}\right) -$$

$$- f'_{e_\beta(t)}(x_t)\left(1 + \sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t.$$

Отсюда, учитывая приведенные выше преобразования, получаем

$$k_{x_0}(x_0 + e_0|AB|) - k_{x_t}(x_t + \lambda e_t) = f(x_0) - f(x_t) -$$

$$- f'_{e_\alpha(0)}(x_0)\left(\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t} - 2\sin^2\frac{t}{2}\right) + f'_{e_\alpha(t)}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2 - \sin^2 t}\,\cos t - \sin^2 t\right) +$$

$$+ f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\left(1+\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t =$$

$$= \int\limits_0^{2\sin(t/2)}\int\limits_0^{2\sin(t/2)-u} f''_{e_{0,t}}(x_0+ue_{0,t}+se_{0,t})\,ds\,du -$$

$$- f'_{e_{0,t}}(x_t)2\sin\frac{t}{2} - f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+$$

$$+ f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}\cos t-\sin^2 t\right)+$$

$$+ f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\left(1+\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t =$$

$$= \int\limits_0^{2\sin(t/2)}\int\limits_0^{2\sin(t/2)-u} f''_{e_{0,t}}(x_0+ue_{0,t}+se_{0,t})\,ds\,du + f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)2\sin^2\frac{t}{2} -$$

$$- f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\sin t - f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+$$

$$+ f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}\cos t-\sin^2 t\right)+$$

$$+ f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\left(1+\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t =$$

$$= \int\limits_0^{2\sin(t/2)}\int\limits_0^{2\sin(t/2)-u} f''_{e_{0,t}}(x_0+ue_{0,t}+se_{0,t})\,ds\,du +$$

$$+ f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)2\sin^2\frac{t}{2} - f'_{e_{\alpha(0)}}(x_0)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)+$$

$$+ f'_{e_{\alpha(t)}}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}\cos t-\sin^2 t\right) + f'_{e_{\beta(t)}}(x_t)\left(\sqrt{\lambda^2-\sin^2 t}-2\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin t.$$

Так как $f\in \mathbb{V}^2_\infty(\mathbb{B}^2)$, то для нее выполняется неравенство

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[x_0,x_t]} f''_{e_{0,t}}(x) \le 1. \tag{8}$$

Учитывая (5), (7), (8), получаем

$$k_{x_0}(x_0+e_0|AB|)-k_{x_t}(x_t+\lambda e_t)\le$$

$$\le 4\sin^2\frac{t}{2}+M_3\frac{t^2}{2}+M_1\lambda t+M_3t^2+M_2\lambda t+M_2\frac{t^2}{2}\le M\lambda^2.$$

Тем самым (6) доказано.

Докажем оценку (2). Пусть $x_t\in\partial\mathbb{B}^2$, $x_t+\lambda e_t \overline{\in} \mathbb{B}^2$, $x_t-\lambda e_t\in\mathbb{B}^2$ или наоборот. Имеем

$$|g(x_t-\lambda e_t)-2g(x_t)+g(x_t+\lambda e_t)| = |k_{x_t}(x_t+\lambda e_t)-k_{x_t}(x_t+\lambda e_t)+$$

$$+g(x_t+\lambda e_t)-2k_{x_t}(x_t)+g(x_t-\lambda e_t)-k_{x_t}(x_t-\lambda e_t)+k_{x_t}(x_t-\lambda e_t)|\le$$

$$\le |g(x_t+\lambda e_t)-k_{x_0}(x_0+|AB|e_0)|+|k_{x_t}(x_t+\lambda e_t)-2k_{x_t}(x_t)+k_{x_t}(x_t-\lambda e_t)|+$$

$$+|k_{x_t}(x_t+\lambda e_t)-k_{x_0}(x_0+|AB|e_0)|+|g(x_t-\lambda e_t)-k_{x_t}(x_t-\lambda e_t)|\le$$

$$\leq M|AB|^2 + M\lambda^2 \leq M\lambda^2.$$

В последнем неравенстве учтено, что $k_{x_t}(x)$ — касательная к графику функции $f(x)$, а $g(x) = f(x)$ при $x \in \mathbb{B}^2$. Поэтому $|g(x_t - \lambda e_t) - k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| \leq M\lambda^2$ и $|k_{x_t}(x_t + \lambda e_t) - 2k_{x_t}(x_t) + k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| = 0$. Пусть $x_t \in \partial\mathbb{B}^2$, $\{x_t + \lambda e_t, x_t - \lambda e_t\} \not\subset \mathbb{B}^2$. Тогда существует $x_t \in \partial\mathbb{B}^2$ такое, что $x_\tau = x_t - \mu e_t$, где $0 \leq \mu < \lambda$.

Для доказательства (2) в этом случае достаточно показать, что

$$|g(x_t - \lambda e_t) - k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| \leq M\lambda^2. \tag{9}$$

Действительно, по формуле Тейлора имеем

$$k_{x_t}(x_t - \lambda e_t) = f(x_t) - f'_{e_t}(x_t)\lambda,$$

$$k_{x_t}(x_t - \lambda e_t) = f(x_\tau) - f'_{e_t}(x_t)(\lambda - \mu).$$

Тогда

$$k_{x_t}(x_t - \lambda e_t) - k_{x_\tau}(x_t - \lambda e_t) = f(x_t) - f(x_\tau) - f'_{e_t}(x_\tau)\mu +$$

$$+ (f'_{e_t}(x_\tau) - f'_{e_t}(x_t))\lambda = \int_0^\mu (f'_{e_t}(x_\tau + ue_t) - f'_{e_t}(x_\tau))\,du + \lambda\int_0^\mu f''_{e_t}(x_t - ue_t)du =$$

$$= \int_0^\mu \int_0^{\mu - u} f''_{e_t}(x_\tau + ue_t + se_t)ds\,du + \lambda\int_0^\mu f''_{e_t}(x_t - ue_t)du.$$

Учитывая, что для произвольного $x \in [x_t, x_\tau]$ будет выполняться неравенство $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in [x_t, x_\tau]} f''_{e_t}(x) \leq 1$ и $\mu < \lambda$, имеем

$$|k_{x_t}(x_t - \lambda e_t) - k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| \leq M\lambda^2. \tag{10}$$

Тогда, учитывая приведенные выше рассуждения, получаем

$$|g(x_t - \lambda e_t) - k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| = |g(x_t - \lambda e_t) - k_{x_\tau}(x_t - \lambda e_t) + k_{x_\tau}(x_t - \lambda e_t) -$$

$$- k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| \leq |g(x_t - \lambda e_t) - k_{x_\tau}(x_t - \lambda e_t)| + |k_{x_\tau}(x_t - \lambda e_t) - k_{x_t}(x_t - \lambda e_t)| \leq$$

$$\leq M(\lambda - \mu)^2 + M\lambda^2 \leq M\lambda^2.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Используя лемму, построим равномерно непрерывную и выпуклую на $\mathbb{R}^2$ функцию g такую, что выполняется неравенство (2). Так как $g(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{B}^2$, и $f \in W^2_\infty(\mathbb{B}^2)$, то для произвольного $x \in \partial\mathbb{B}^2$ и произвольного вектора e существует $M > 0$ такое, что $|g'_e(x)| \leq M$, а также постоянная $L > 0$, при которых параболоид вращения $p_2(x) := Mx^2 - L$ пересекает график функции g вне круга $2\mathbb{B}^2$ по некоторой замкнутой кривой γ. Обозначим $h(x) := \max\{p_2(x), g(x)\}$. Очевидно, h равномерно непрерывна и выпукла на $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $\Pi^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_i| \leq a, a > 0, i = 1, 2\}$ квадрат такой, что для всех $x \overline{\in} \Pi^2$ $h(x) = p_2(x)$.

Для построения приближающего многочлена используем конструкцию, аналогичную используемой в [2]. Пусть $N \geq 1$, $K_{N-1}(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, — четный алгебраический полином степени не выше $N-1$ такой, что

$$K_{N-1}(\tau) \geq 0, \quad \tau \in [-2, 2], \tag{11}$$

$$\int_{-1}^{1} K_{N-1}(\tau) d\tau = 1, \tag{12}$$

$$\int_{-2}^{2} |\tau|^j K_{N-1}(\tau) d\tau \leq \frac{M}{N^j}, \quad j = 1, 2, 3 \tag{13}$$

[7, с.136 – 138]. Положим

$$K_{N-1}^{(i)}(\tau_i) = \frac{1}{2a} K_{N-1}\left(\frac{\tau_i}{2a}\right), \quad i = 1, 2, \quad J_{N-1}(\tau_1, \tau_2) = K_{N-1}^{(1)}(\tau_1) K_{N-1}^{(2)}(\tau_2).$$

Из (12) следует

$$\int_{2\Pi^2} J_{N-1}(\tau) d\tau = 1. \tag{14}$$

Положим

$$p_{N+2}(x) = \int_{2\Pi^2} \frac{h(x+t) + h(x-t)}{2} J_{N-1}(t) dt.$$

Покажем, что

$$p_{N+2}(x) \in \mathcal{P}_{N+2} \quad \text{при} \quad x \in 2\mathbb{B}^2. \tag{15}$$

$$\| f - p_{N+2} \|_{C(\mathbb{B}^2)} \leq M / N^2, \tag{16}$$

$$p_{N+2} \quad \text{выпуклый на} \quad \Pi^2. \tag{17}$$

Докажем (15). Для этого достаточно показать, что $\int_{2\Pi^2} h(x+t) J_{N-1}(t) dt$ — многочлен степени не выше $N+2$ при $x \in 2\mathbb{B}^2$. Имеем

$$\int_{2\Pi^2} h(x+t) J_{N-1}(t) dt = \int_{-2a}^{2a} \int_{-2a}^{2a} h(x_1 + t_1, x_2 + t_2) K_{N-1}^{(1)}(t_1) K_{N-1}^{(2)}(t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_{-2a}^{2a} K_{N-1}^{(1)}(t_1) \int_{-2a}^{2a} h(x_1 + t_1, x_2 + t_2) K_{N-1}^{(2)}(t_2) dt_2 dt_1.$$

Внутренний интеграл после замены $u_2 = x_2 + t_2$ принимает вид

$$\left(\int_{-2a+x_2}^{-a} + \int_{-a}^{a} + \int_{a}^{2a+x_2} \right) h(x_1 + t_1, u_2) K_{N-1}^{(2)}(u_2 - u_1) du_2.$$

Учитывая, что в крайних интегралах функция h — это многочлен не выше второго порядка по u_2, видим, что записанное выражение — многочлен порядка не выше $N+2$ по x_2. Аналогично можно показать, что данное выражение — многочлен порядка не выше $N+2$ по x_1. Тем самым (15) доказано.

Прежде чем доказать (16), покажем, что для произвольного $x \in \mathbb{B}^2$, произвольного единичного вектора e и произвольного $\lambda > 0$ существует $M > 0$ такое, что

$$|h(x+\lambda e) - 2h(x) + h(x-\lambda e)| \le M\lambda^2. \tag{18}$$

Действительно, если $h(x+\lambda e) = g(x+\lambda e)$, $h(x-\lambda e) = g(x-\lambda e)$, то по лемме получаем

$$|h(x+\lambda e) - 2h(x) + h(x-\lambda e)| = |g(x+\lambda e) - 2g(x) + g(x-\lambda e)| \le M\lambda^2.$$

Если $h(x+\lambda e) = p_2(x+\lambda e)$, $h(x-\lambda e) = p_2(x-\lambda e)$, то, учитывая, что для $x \in \mathbb{B}^2$ $g(x) \ge p_2(x)$, имеем

$$|h(x+\lambda e) - 2h(x) + h(x-\lambda e)| \le |p_2(x+\lambda e) - 2p_2(x) + p_2(x-\lambda e)| \le M\lambda^2.$$

Если $h(x+\lambda e) = p_2(x+\lambda e)$, $h(x-\lambda e) = g(x-\lambda e)$ (или наоборот), то, учитывая (2) и то, что в этом случае $|x| \le \lambda$, получаем

$$|h(x+\lambda e) - 2h(x) + h(x-\lambda e)| = |p_2(x+\lambda e) - 2g(x) + g(x-\lambda e)| =$$

$$= |p_2(x+\lambda e) - g(x+\lambda e) + g(x+\lambda e) - 2g(x) + g(x-\lambda e)| \le$$

$$\le |p_2(x+\lambda e) - g(x+\lambda e)| + |g(x+\lambda e) - 2g(x) + g(x-\lambda e)| \le$$

$$\le |p_2(x+\lambda e) - p_2(x)| + M\lambda^2 \le M\lambda^2,$$

что и доказывает (18). Поэтому справедливы соотношения

$$\|f - p_{N+2}\|_{C(\mathbb{B}^2)} \le \int\limits_{2\Pi^2} \frac{|h(x+t) - 2h(x) + h(x-t)|}{2} J_{N-1}(t)\,dt \le$$

$$\le M \int\limits_{2\Pi^2} |t|^2 J_{N-1}(t)\,dt \le \frac{M}{N^2}.$$

Докажем (17). Так как h выпукла на $\mathbb{R}^2$, то для произвольного $x \in \Pi^2$, произвольного вектора e и произвольного $\lambda > 0$ будет выполняться неравенство $\Delta^2_\lambda(h, x, e) \ge 0$, где $\Delta^2_\lambda(h, x, e)$ — вторая конечная разность функции h по направлению e с шагом λ. Поэтому, учитывая неравенство (11), получаем

$$\Delta^2_\lambda(p_{N+2}, x, e) = \int\limits_{2\Pi^2} \frac{\Delta^2_\lambda(h, x+t, e) + \Delta^2_\lambda(h, x-t, e)}{2} J_{N-1}(t)\,dt \le 0.$$

Теорема доказана.

1. *Шведов А. С.* Порядки коприближения функций алгебраическими многочленами // Мат. заметки. – 1981. – **29**, № 1. – С. 117–130.
2. *Шведов А. С.* Комонотонное приближение функций многочленами // Докл. АН СССР. – 1980. – **250**, № 1. – С. 39–42.
3. *De Vore R. A., Yu X. M.* Pointwise estimates fore monotone polynomial approximation // Constr. Approx. – 1985. – **1**, № 4. – P. 323–331.
4. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**, № 3. – P. 471–474.
5. *Yu X. M.* Convex approximation of differentiable function // Approx. Theory Appl. – 1988. – **4**, № 4. – P. 29–33.
6. *Шведов А. С.* Ковыпуклое приближение функций многих переменных многочленами // Мат. сб. – 1981. – **115** (157), № 4 (8). – С. 577–589.
7. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.

Получено 01.09.92