УДК 517.919

М. М. Іванюк, канд. фіз.-мат. наук (Хмельниц. технол. ін-т побут. обслуг.)

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗКІВ КЛАСУ $\mathcal{L}_\rho^\tau$ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ МАТРИЦІ-ФУНКЦІЇ

For solutions of a system of q-linear n-order differential equations with singularity rank p/r, $p, r \in \mathbb{N}$, the asymptotic representations are constructed in a sector of the complex plane with a central angle that does not exceed $\pi r/p$ by using the method of characteristic matrix functions.

За допомогою методу характеристичних матриць-функцій для системи q-лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з рангом особливості p/r, $p, r \in \mathbb{N}$, будуються асимптотичні зображення розв'язків в деякому секторі комплексної площини з центральним кутом, що не перевищує $\pi r/p$.

1. Постановка задачі. Розглянемо систему

$$\mathcal{L}[w] \equiv \sum_{j=0}^{n} z^{\pi_j} A_j(z) \frac{d^{n-j}w}{dz^{n-j}} = 0, \tag{1}$$

де

$$A_j(z) = \| a_{j_{ki}}(z) \|, \quad k, i = \overline{1, q}, \qquad w = \operatorname{colon}(w_1, \dots, w_q),$$

$$\pi_0 = 0, \quad A_0(z) = E, \quad \pi_j \in \mathbb{Z},$$

причому матриці $A_j(z)$ голоморфні при $z = \infty$, тобто для достатньо великих $|z|$, скажімо $|z| \ge R$, вони зображаються збіжними рядами

$$A_j(z) = \sum_{s=0}^{\infty} A_{js} z^{-s}, \quad |z| \ge R. \tag{2}$$

Використовуючи термінологію аналітичної теорії диференціальних рівнянь, назвемо число $\max_j (\pi_j - \pi_0)/j + 1$ рангом особливості на нескінченності. Будемо говорити, що система (1) має на нескінченності регулярну особливість, коли ранг недодатній, і іррегулярну особливість, коли ранг додатній. Наприклад, система

$$w'' + z^{\pi_1} A_1 w' + z^{\pi_2} A_2 w = 0 \tag{3}$$

при $\pi_1 = -1$, $\pi_2 = -2$ має на нескінченності регулярну особливість, а при $\pi_1 = -1$, $\pi_2 = -1$ — іррегулярну особливість, оскільки в першому випадку ранг дорівнює 0, а в другому — $1/2$.

Із загальної теорії [1] системи q лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку відомо, що в околі особливої точки $z = \infty$ система (1) має розв'язки вигляду

$$w = z^\rho \varphi(z), \tag{4}$$

де z^ρ, — взагалі кажучи, багатозначна функція, $\varphi(z)$ — однозначна в околі $z = \infty$ деяка вектор-функція. Важливою характеристикою регулярно особливої точки є те, що в околі такої точки система (1) з голоморфними матрицями-коефіцієнтами має nq розв'язків вигляду (4), причому вектор-функція $\varphi(z)$ в таких зображеннях виявляється голоморфною при $|z| > R$. Що ж стосується іррегулярно особливої точки, то в околі такої точки система (1) може мати розв'язки вигляду (4), і не мати їх. В зв'язку з цим актуальною є задача про конструювання розв'язків системи (1) в останньому випадку.

***Означення* 1.** *Матриця вигляду*

$$\mathcal{L}[z^\rho] \equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} A_{js} z^{\pi_j - s} \prod_{k=0}^{n-j-1} (\rho - k) z^{\rho - n + j}, \tag{5}$$

де прийнято $\prod_{k=0}^{-1} (\rho - k) = 1$, *або вигляду*

$$\mathcal{L}[z^\rho] = z^{\rho+\pi} \sum_{s=0}^{\infty} F_s z^{-s}, \tag{6}$$

в якому $\pi = \max\limits_j (\pi_j - n + j)$, F_s *— лінійні комбінації матриць* A_{js}, *називається характеристичною матрицею-функцією системи* (1).

***Означення* 2.** *Система* (1) *називається системою класу* $\mathcal{L}_\rho$, *якщо матриця-коефіцієнт* F_0 *із розкладу* (6) *характеристичної матриці-функції залежить від* ρ *таким чином, що* $\det F_0(\rho) \not\equiv 0$. *В супротивному випадку система* (1) *називається системою класу* $\mathcal{L}_\rho^\tau$.

Можна довести, що рівність степеня матриці-полінома $F_0(\rho)$ числу n є необхідною і достатньою умовою регулярної особливості на нескінченності. В даній статті ми не будемо аналітично обґрунтовувати цей факт. Порівнюючи наведену класифікацію з класичною класифікацією особливих точок, неважко помітити, що клас $\mathcal{L}_\rho$ охоплює клас систем з регулярною особливістю і деякий підклас класу систем з іррегулярною особливістю. Клас $\mathcal{L}_\rho^\tau$ являється, фактично, деяким іншим підкласом класу систем з іррегулярною особливістю. Для прикладу повернемось до системи (3). При $\pi_1 = -1$, $\pi_2 = -2$ ранг особливої точки $z = \infty$ дорівнює 0 і матриця F_0 із розкладу характеристичної матриці-функції залежить від ρ, при $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = -1$ ранг дорівнює 2 і матриця F_0 залежить від ρ; при $\pi_1 = -1$, $\pi_2 = -1$ ранг дорівнює $1/2$ і матриця F_0 не залежить від ρ. Таким чином, в першому і другому випадках система належить до класу $\mathcal{L}_\rho$, а в третьому — до класу $\mathcal{L}_\rho^\tau$.

Введемо позначення $\max\limits_j (\pi_j - \pi_0)/j + 1 = p/r$. Наша мета — розробка методу побудови зображень розв'язків класу $\mathcal{L}_\rho^\tau$ систем.

***Означення* 3.** *Матриця вигляду*

$$\mathcal{L}\left[\exp\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s} \left(z^{1/r}\right)^s + \rho \ln z\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{n} \sum_{s=0}^{\infty} A_{js} z^{\pi_j - s} \frac{d^{n-j}}{dz^{n-j}} \left[\exp\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s} \left(z^{1/r}\right)^s + \rho \ln z\right)\right] \tag{7}$$

або вигляду

$$\mathcal{L}\left[\exp\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s} \left(z^{1/r}\right)^s + \rho \ln z\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\left(\rho+n\left(\frac{p}{r}-1\right)\right)\ln z\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{p-1}F_k(\tau_k)\left(z^{1/r}\right)^{-k}+\sum_{k=p}^{\infty}F_k(\rho)\left(z^{1/r}\right)^{-k}\right\}, \tag{8}$$

де F_k *— лінійні комбінації матриць* A_{js}, *називається зведеною характеристичною матрицею-функцією класу* $\mathcal{L}_{\rho}^{\tau}$ *системи з рангом особливості* p/r, p, $r\in\mathbb{N}$.

Означення 4. *Рівняння*

$$\begin{gathered}\det F_0(\tau_0)=0,\ \det F_1(\tau_1)=0,\ \det F_2(\tau_2)=0,\ \ldots,\\ \det F_{p-1}(\tau_{p-1})=0,\ \det F_p(\rho)=0,\end{gathered} \tag{9}$$

де F_k *— матриці-коефіцієнти з розкладу зведеної характеристичної матриці-функції (8), називаються відповідно характеристичними, першим, другим, …, $(p-1)$-м, p-м визначальними рівняннями особливості на нескінченності.*

2. Побудова формальних розв'язків. Будемо шукати розв'язки класу $\mathcal{L}_{\rho}^{\tau}$ системи (1) у вигляді

$$\tilde{w}=\exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\rho\ln z\right)\sum_{m=0}^{\infty}a_m(z^{1/r})^{-m}. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в ліву частину (1) і допускаючи можливість почленного диференціювання, одержуємо

$$\mathcal{L}[\tilde{w}]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{L}\left[\exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\left(\rho-\frac{m}{r}\right)\ln z\right)\right]a_m. \tag{11}$$

Використовуючи розклад (8) зведеної характеристичної матриці-функції, записуємо

$$\mathcal{L}\left[\exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\left(\rho-\frac{m}{r}\right)\ln z\right)\right]\equiv$$

$$\equiv\exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\left(\rho+n\left(\frac{p}{r}-1\right)-\frac{m}{r}\right)\ln z\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{p-1}F_k(\tau_k)\left(z^{1/r}\right)^{-k}+\sum_{k=p}^{\infty}F_k\left(\rho-\frac{m}{r}\right)\left(z^{1/r}\right)^{-k}\right\}. \tag{12}$$

Виконуючи відповідну заміну в (11), маємо

$$\mathcal{L}[\tilde{w}]\equiv\sum_{m=0}^{\infty}\exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^{s}+\left(\rho+n\left(\frac{p}{r}-1\right)-\frac{m}{r}\right)\ln z\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=0}^{p-1}F_k(\tau_k)\left(z^{1/r}\right)^{-k}+\sum_{k=p}^{\infty}F_k\left(\rho-\frac{m}{r}\right)\left(z^{1/r}\right)^{-k}\right\}a_m. \tag{13}$$

Згруповуючи доданки в (13) і розміщуючи їх за спадаючими степенями функції

$z^{1/r}$, одержуємо

$$\mathcal{L}[\tilde{w}] \equiv \exp\left(\sum_{s=1}^{p}\frac{r}{s}\tau_{p-s}\left(z^{1/r}\right)^s + \left(\rho + n\left(\frac{p}{r}-1\right)\right)\ln z\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{m-k} + \sum_{k=0}^{m-p}F_{p+k}\left(\rho-\frac{m}{r}+\frac{p+k}{r}\right)a_{m-p-k}\right)\left(z^{1/r}\right)^m\right\}, \quad (14)$$

де прийнято для зручності

$$\sum_{k=1}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{-k} = \sum_{k=2}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{1-k} = \ldots = \sum_{k=p-1}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{-1} = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{-p}F_{p+k}\left(\rho+\frac{p}{r}+\frac{k}{r}\right)a_{-p-k} = \sum_{k=0}^{-p+1}F_{p+k}\left(\rho+\frac{p-1}{r}+\frac{k}{r}\right)a_{1-p-k} = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=0}^{-1}F_{p+k}\left(\rho+\frac{1}{r}+\frac{k}{r}\right)a_{-1-k} = 0.$$

Векторна функція $\tilde{w}(z)$, що визначається формулою (10), задовольнятиме векторне рівняння (1), якщо

$$\sum_{k=0}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{m-k} + \sum_{k=0}^{m-p}F_{p+k}\left(\rho-\frac{m}{r}+\frac{p+k}{r}\right)a_{m-p-k} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad (15)$$

де

$$\sum_{k=j}^{p-1}F_k(\tau_k)a_{j-k-1} = 0, \quad 1 \le j \le p-1,$$

$$\sum_{k=0}^{j-p-1}F_{p+k}\left(\rho-\frac{j-1}{r}+\frac{p+k}{r}\right)a_{j-1-p-k} = 0, \quad 1 \le j \le p. \quad (16)$$

Оскільки матриці $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}, F_p$ із розкладу зведеної характеристичної матриці-функції (8) залежать відповідно від $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{p-1}$ і ρ, то характеристичне, перше, друге, ... , $(p-1)$- і p-те визначальні рівняння мають розв'язки. З цих рівнянь ми, таким чином, знаходимо невідомі величини, що входять під знак експоненти шуканої вектор-функції (10).

Для визначення невідомих вектор-коефіцієнтів a_m із (10) розглянемо рекурентне співвідношення (15). Враховуючи зауваження (16), записуємо його у вигляді ряду векторних рівнянь

$$F_0(\tau_0)a_0 = 0,$$

$$F_0(\tau_0)a_1 + F_1(\tau_1)a_0 = 0,$$

$$F_0(\tau_0)a_2 + F_1(\tau_1)a_1 + F_2(\tau_2)a_0 = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F_0(\tau_0)a_p + F_1(\tau_1)a_{p-1} + \ldots + F_{p-2}(\tau_{p-2})a_2 +$$

$$+ F_{p-1}(\tau_{p-1})a_1 + F_p(\rho)a_0 = 0,$$

$$F_0(\tau_0)a_{p+1} + F_1(\tau_1)a_p + F_2(\tau_2)a_{p-1} + \ldots + F_{p-1}(\tau_{p-1})a_2 +$$
$$+ F_p(\rho - 1/r)a_1 + F_{p+1}(\rho)a_0 = 0, \tag{17}$$

....

$$F_0(\tau_0)a_{m-1} + \ldots + F_{m-p+1}(\rho - p/r)a_p + F_{m-p}(\rho - (p-1)/r)a_{p-1} + \ldots$$
$$\ldots + F_{m-3}(\rho - 2/r)a_2 + F_{m-2}(\rho - 1/r)a_1 + F_{m-1}(\rho)a_0 = 0,$$
$$F_0(\tau_0)a_m + F_1(\tau_1)a_{m-1} + \ldots + F_{m-p}(\rho - p/r)a_p +$$
$$+ F_{m-p+1}(\rho - (p-1)/r)a_{p-1} + \ldots$$
$$\ldots + F_{m-2}(\rho - 2/r)a_2 + F_{m-1}(\rho - 1/r)a_1 + F_m(\rho)a_0 = 0,$$

....

Розглянемо $(m+1)$ перших векторних рівностей із (17), де m фіксовано довільним способом, як систему $(m+1)q$ алгебраїчних рівнянь з невідомими a_{m_1}, $a_{m_2}, \ldots, a_{m_q}, a_{m-1_1}, a_{m-1_2}, \ldots, a_{m-1_q}, \ldots, a_{1_1}, a_{1_2}, \ldots\ a_{1_q}, a_{0_1}, a_{0_2}, \ldots, a_{0_q}$. Ми стверджуємо, що система має ненульовий розв'язок. Справді, із наведених вище суджень відомо, що $\det F_0(\tau_0) = 0$. Отже, ранг матриці коефіцієнтів при невідомих $a_{m_1}, a_{m_2}, \ldots, a_{m_q}, a_{m-1_1}, a_{m-1_2}, \ldots, a_{m-1_q}, \ldots, a_{0_1}, a_{0_2}, \ldots, a_{0_q}$ менший числа $(m+1)q$, тобто менший числа невідомих системи. Це забезпечує існування не рівних одночасно нуль-вектору вектор-коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots$ $\ldots, a_m$. І оскільки m фіксовано довільним чином, то з системи (17) можна визначити скільки завгодно коефіцієнтів ряду (9). Отже, нами доведено таке твердження.

Теорема 1. *Якщо ранг особливості класу* $\mathcal{L}_\rho^\tau$ *системи* (1) *дорівнює* p/r, *то система формально задовольняється вектор-функцією* $\tilde{w}(z)$, *що визначається формулою* (10), *в якій величини* $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{p-1}$ *і* ρ *являються коренями відповідно характеристичного, першого, другого,* $\ldots$, $(p-1)$*-го і* p*-го визначальних рівнянь, а вектор-коефіцієнти* a_m, $m = 0, 1, 2, \ldots$, *задовольняють співвідношення* (15).

Припустимо, що корені τ_{0j}, $j = \overline{1, nq}$, характеристичного рівняння різні. Зафіксуємо сукупність $\tau_{1j}, \tau_{2j}, \ldots, \tau_{p-1,j}$ і ρ_j коренів відповідно першого, другого, $\ldots$, $(p-1)$-го і p-го визначальних рівнянь (9), що відповідає кореню τ_{0j} характеристичного рівняння. Цій сукупності поставимо у відповідність вектори a_{mj}, що знаходяться з системи (17). Тим самим побудуємо nq лінійно незалежних формальних розв'язків системи (1)

$$\tilde{w}_j(z) = \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s}\tau_{p-s,j}\left(z^{1/r}\right)^s + \rho_j \ln z\right)\sum_{m=0}^{\infty} a_{mj}\left(z^{1/r}\right)^{-m},\ \ j = \overline{1, nq}. \tag{18}$$

3. Про асимптотичний характер формальних розв'язків. Покажемо, що кожному формальному розв'язку сімейства (18) відповідає справжній розв'язок, який має цей формальний розв'язок своїм асимптотичним зображенням.

Будемо виходити з того, що p/r не є цілим числом. Поставимо у відповідність векторному рівнянню (1) матричне рівняння

$$\sum_{j=0}^{n} z^{\pi_j} A_j(z)\, W^{(n-j)} = 0, \quad \pi_0 = 0,\ A_0(z) = E, \tag{19}$$

що задовольняється матрицею фундаментального сімейства формальних розв'язків системи (1)

$$\tilde{W}(z) = \tilde{\Phi}(z)z^{R}e^{Q(z)}, \tag{20}$$

де

$$\tilde{\Phi}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \| a_{m1}a_{m2} \dots a_{m,nq} \| (z^{1/r})^{-m}, \tag{21}$$

$$Q(z) = \operatorname{diag}\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s,1}\left(z^{1/r}\right)^{s}, \; \dots, \; \sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s,nq}\left(z^{1/r}\right)^{s} \right), \tag{22}$$

$$R = \operatorname{diag}(\rho_1, \; \rho_2, \dots, \; \rho_{nq}). \tag{23}$$

Заміною $t = z^{1/r}$ матричне рівняння (19) зводиться до рівняння, яке запишемо у вигляді

$$\sum_{j=0}^{n} t^{j(p-1)} B_j(t) W^{(n-j)} = 0, \quad B_0(t) = E, \tag{24}$$

де матриці $B_j(t)$ голоморфні при $|t| \geq \sqrt[r]{R}$, тобто зображаються в цій області збіжними рядами

$$B_j(t) = \sum_{s=0}^{\infty} B_{js} t^{-s}, \tag{25}$$

в яких $B_{j0} = 0$ не при всіх $j = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, матричне рівняння (24) формально задовольняється матрицею

$$\tilde{W}^{*} = \tilde{\Phi}^{*}(t)t^{R^{*}}e^{Q^{*}(t)}, \tag{26}$$

де

$$\tilde{\Phi}^{*}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \| a_{m1}a_{m2} \dots a_{m,nq} \| t^{-m}, \tag{27}$$

$$Q^{*}(t) = \operatorname{diag}\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s,1} t^{s}, \; \dots, \; \sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s} \tau_{p-s,nq} t^{s} \right), \tag{28}$$

$$R^{*} = \operatorname{diag}(r\rho_1, \; r\rho_2, \dots, \; r\rho_{nq}). \tag{29}$$

Перейдемо від матричної форми (24) системи q диференціальних рівнянь n-го порядку до матричної форми системи nq диференціальних рівнянь 1-го порядку перетворенням

$$Y_{n-j+1} = t^{(j-1)(p-1)} W^{(n-j)}, \quad j = n, n-1, \dots, 1. \tag{30}$$

Маємо

$$Y'_{n-j+1} = (j-1)(p-1)t^{-1}Y_{n-j+1} + t^{p-1}Y_{n-j+2}, \quad j = n, \; n-1, \dots, 2,$$

$$Y'_{n} = -t^{p-1}B_n(t)Y_1 - t^{p-1}B_{n-1}(t)Y_2 - \dots - t^{p-1}B_2(t)Y_{n-1} - t^{p-1}B_1(t)Y_n.$$

Тобто шукана матрична форма має вигляд

$$Y' = t^{p-1}B(t)Y, \tag{31}$$

$$B(t) = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{(n-1)(p-1)}{t^p} & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(n-2)(p-1)}{t^p} & E & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(n-3)(p-1)}{t^p} & \dots & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{(p-1)}{t^p} & E \\ -B_n(t) & -B_{n-1}(t) & -B_{n-2}(t) & \dots & -B_2(t) & -B_1(t) \end{array} \right\|, \quad Y = \left\| \begin{array}{c} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{array} \right\|. \tag{32}$$

Очевидно, матричне рівняння (31) формально задовольняється матрицею-функцією

$$\tilde{Y} = \tilde{F}^*(t) t^{R_1^*} e^{Q^*(t)}, \tag{33}$$

де через $\tilde{F}^*(t)$ позначено матрицю

$$\tilde{F}^*(t) = \left\| \begin{array}{c} \tilde{\Phi}^*(t) \\ t^{-(p-1)}\left(\tilde{\Phi}^{*\prime}(t) + \tilde{\Phi}^*(t)\left(R^* t^{-E} + Q^{*\prime}\right)\right) \\ \hdashline t^{(1-n)(p-1)}\left(\tilde{\Phi}^{*(n-1)}(t) + \ldots + \tilde{\Phi}^*(t)\left(R^* t^{-E} + Q^{*\prime}\right)^{n-1}\right) \end{array} \right\|, \tag{34}$$

в якій $\tilde{\Phi}^*(t)$ зображається рядом (27), $Q^*(t)$ і R^* мають відповідно вигляд (28) і (29), $R_1^* = \operatorname{diag}(r\rho_1 + (n-1)(p-1), \ldots, r\rho_{nq} + (n-1)(p-1))$.

Аналізуючи структуру матриці $B(t)$ із (32), неважко переконатись у тому, що: 1) ця матриця являється голоморфною при $t = \infty$; 2) старший коефіцієнт із її розкладу за спадаючими степенями незалежної змінної має різні власні значення. Це означає, що диференціальне рівняння (31) задовольняє умови теореми 12.3 з [2], точніше наслідок до неї. Згідно з цією теоремою і наслідком до неї диференціальне рівняння (31) має фундаментальний матричний розв'язок вигляду

$$Y = F^*(t) t^{R_1^*} e^{Q^*(t)}, \tag{35}$$

де R_1^* і $Q^*(t)$ такі ж, як і в (33), а матриця $F^*(t)$ має в будь-якому секторі S^* з кутом розхилу, що не перевищує π/p, асимптотичне зображення

$$F^*(t) \sim \tilde{F}^*(t), \tag{36}$$

в якому $\tilde{F}^*(t)$ знаходиться за формулою (34). Цим самим ми показали, що формальний розв'язок (26) матричного рівняння (24) являється асимтотичним зображенням точного розв'язку цього рівняння в будь-якому секторі S^* з кутом розхилу, що не перевищує π/p. Зауваживши, що при заміні $z^{1/r} = t$ будь-який сектор S комплексної площини z з кутом розхилу $r\pi/p$ відображається на сектор S^* комплексної площини t з кутом розхилу π/p, і, згадуючи, що матричне рівняння (24) ми одержали з рівняння (19) перетворенням $z^{1/r} = t$, переконуємось, таким чином, у тому, що формальна матриця (20) являється асимптотичним зображенням фундаментальної матриці рівняння (19) в будь-якому секторі S з кутом розхилу, що не перевищує $r\pi/p$. Іншими словами, ми довели, що кожному формальному вектор-розв'язку з (18) векторного рівняння (1) відповідає точний розв'язок, для якого цей формальний ровз'язок є асимптотичним зображенням в будь-якому секторі комплексної площини z з кутом розхилу, меньшим за $r\pi/p$.

Підсумовуючи, сформулюємо такий результат.

Теорема 2. *Нехай* S *— будь-який відкритий сектор комплексної площини* z *з вершиною в початку координат і додатнім центральним кутом, що не перевищує* $r\pi/p$. *Припустимо, що корені* τ_{0j} *характеристичного рівняння системи диферецніальних рівнянь* (1) *різні.*

Тоді система (1) *має в* S nq *лінійно незалежних вектор-розв'язків вигляду*

$$w_j(z) = \exp\left(\sum_{s=1}^{p} \frac{r}{s}\tau_{p-s,j}\left(z^{1/r}\right)^s + \rho_j \ln z\right)\varphi_j(z^{1/r}),$$

де вектор-функції $\varphi(z^{1/r})$ *мать в* S *асимптотичне зображення*

$$\varphi_j(z^{1/r}) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_{mj}(z^{1/r})^{-m}.$$

1. *Иванюк Н. Н.* Об исследовании решений линейной системы дифференциальных уравнений n-го порядка вблизи особых точек: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Хмельницкий, 1989. – 132 с.
2. *Вазов А.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высш. шк., 1962. – 314 с.

Одержано 12.04.93