УДК 519.65

Н. П. Корнейчук, чл.-корр. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНФОРМАТИВНОСТЬ ФУНКЦИОНАЛОВ

We introduce the concept of informativeness of a continuous functional given on a metric space X with respect to a set $\mathfrak{M} \subset X$ and a metric ρ_X. The problem of finding a functional with the greatest informaiveness is stated. For some sets of continuous functions, this problem is solved by reducing to a subset of functional given by a value of a function at a point.

Вводиться поняття інформативності заданого на метричному просторі X неперервного функціоналу відносно множини $\mathfrak{M} \subset X$ і метрики ρ_X; ставиться задача знаходження функціоналу з найбільшою інформативністю. Для деяких множин неперервних функцій задача розв'язана зведенням до підмножини функціоналів, які задаються значеннями функції у точці.

1. Задача об аппроксимационном поперечнике (в смысле Колмогорова, линейном, проекционном) множества $\mathfrak{M}$ в пространстве X (метрическом или нормированном) включает как вычисление величины поперечника, так и предъявление наилучшего метода приближения. В тех конкретных ситуациях, в которых такой метод указан, он, как правило, имеет вид

$$\mu_1(x)x_1 + \mu_2(x)x_2 + \ldots + \mu_N(x)x_N, \tag{1}$$

где $x \in \mathfrak{M}$, $\{x_k\}_1^N \subset X$, а μ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, — заданные на X функционалы. Таким образом, для построения наилучшего метода (1) необходимо располагать дискретной информацией об элементе $x \in \mathfrak{M}$ в виде вектора

$$M_N(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\} \tag{2}$$

значений функционалов из некоторого набора $M_N = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N\}$. Множество $\mathfrak{M}$ обычно задается некоторой априорной информацией, обеспечивающей корректность постановки задачи об оценке погрешности приближения.

Отображение

$$x \to M_N(x) \tag{3}$$

можно интерпретировать как кодирование элемента x с помощью набора функционалов M_N, а отображение

$$M_N(x) \to \sum_{k=1}^{N} \mu_k(x)x_k$$

— как восстановление (приближенное) элемента x в виде линейной комбинации базисных элементов x_k. Ясно, что погрешность восстановления зависит не только от выбора базиса $\{x_k\}_1^N$, но и от выбора кодирующих функционалов $\{\mu_k\}_1^N$. Естественно допустить, что возможности уменьшения этой погрешности связаны с информативностью выбираемых функционалов, под которой понимается, говоря упрощенно, количество (или объем) информации об элементе x, содержащееся в векторе (2). Точное определение будет дано ниже.

Теперь заметим, что отображение (3) можно осуществить двумя принципиально разными способами. Можно сразу предъявить весь набор функционалов $\{\mu_k\}_1^N$, а можно выбирать их последовательно, учитывая при выборе функционала μ_k значения $\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_{k-1}(x)$ ранее выбранных функционалов. При втором варианте говорят об адаптивном методе (активной стратегии) кодирования, при первом варианте — о неадаптивном методе (пассивной стратегии). Отметим, что в задачах о поперечниках речь идет именно о неадаптивном случае, а разработанные способы получения точных оценок для поперечников (см., например, [1 – 5]) не позволяют получить соответствующие результаты при адаптивном методе кодирования.

Дело в том, что в адаптивном случае информация об элементе x накапливается постепенно, и с каждым шагом множество неопределенности для x сужается, так что уже после первого шага вместо множества $\mathfrak{M}$ надо рассматривать некоторое его подмножество. Таким образом, возникает необходимость в оценке информативности и в сравнении ее для отдельных функционалов. Но сначала надо определить количественную характеристику информативности функционала. Это можно сделать через понятие неопределенности (см. также [6, 7]).

Пусть X — метрическое пространство с расстоянием $\rho_X(x, y)$. Под X' будем понимать множество всех заданных на X непрерывных функционалов. Пусть вначале нам известно, что $x \in \mathfrak{M} \subset X$. В качестве меры неопределенности такой информации естественно взять диаметр множества $\mathfrak{M}$, т. е. величину $D(\mathfrak{M}, \rho_X) = \sup\{\rho_X(y, z) : y, z \in \mathfrak{M}\}$. Если $\mu \in X'$ и известно значение $\mu(x)$, то неопределенность будет измеряться уже диаметром множества $\{y : y \in \mathfrak{M}, \mu(y) = \mu(x)\}$, который не превышает величины

$$D(\mu, \mathfrak{M}, \rho_X) = \sup\{\rho_X(y, z) : y, z \in \mathfrak{M}, \ \mu(y) = \mu(z)\}.$$

Разность

$$I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_X) = D(\mathfrak{M}, \rho_X) - D(\mu, \mathfrak{M}, \rho_X) \tag{4}$$

назовем информативностью функционала μ относительно множества $\mathfrak{M}$ и метрики ρ_X. Если $\mu_1, \mu_2 \in X'$ и $D(\mu_1, \mathfrak{M}, \rho_X) \le D(\mu_2, \mathfrak{M}, \rho_X)$, то $I(\mu_1, \mathfrak{M}, \rho_X) \ge I(\mu_2, \mathfrak{M}, \rho_X)$.

Возникает задача: пусть F — некоторое множество заданных на X непрерывных функционалов, $F \subset X'$; найти точную верхнюю грань:

$$\sup_{\mu \in X'} I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_X) \tag{5}$$

и указать функционал $\mu_0 \in F$, реализующий супремум, т. е. имеющий наибольшую информативность относительно $\mathfrak{M} \subset X$ и ρ_X среди всех функционалов $\mu \in F$.

2. Мы сможем привести решение задачи (5) в некоторых случаях, когда X — функциональное пространство. Будем рассматривать линейное пространство $C = C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций и множество C' заданных на C линейных непрерывных функционалов μ вида

$$\mu(x) = \int_a^b x(t)\,dg(t), \tag{6}$$

где $g(t)$ — некоторая функция, имеющая ограниченное изменение на $[a, b]$. Выделим в C' множество C'_τ функционалов μ_τ, определяемых равенством

$$\mu_\tau(x) = x(\tau), \quad \tau \in [a, b]. \tag{7}$$

Пусть $\rho(x, y)$ — некоторая метрика в C и $\mathfrak{M}$ — ограниченное замкнутое множество в C. Для каждой точки $\tau \in [a, b]$ существует по крайней мере одна пара функций $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющая условиям

$$\rho(x_\tau, y_\tau) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M}, \ x(\tau) = y(\tau)\}. \tag{8}$$

Обозначим через Q множество пар $\{x_\tau, y_\tau\}$ функций из $\mathfrak{M}$, которые удовлетворяют условию (8) хотя бы для одного значения $\tau \in [a, b]$. Будем полагать $\delta_\tau(t) = x_\tau(t) - y_\tau(t)$, $a \le t \le b$, $\tau \in [a, b]$.

Предложение 1. *Пусть* μ *— фиксированный функционал, задаваемый на* C *равенством* (6). *Если существуют точка* $\tau \in [a, b]$ *и во множестве* Q *соответствующая пара функций* (x_τ, y_τ), *для которой*

$$\int_a^b \delta_\tau(t) dg(t) = 0, \tag{9}$$

то для функционала μ_τ, *определяемого равенством* (7),

$$I(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho) \ge I(\mu, \mathfrak{M}, \rho).$$

Действительно, равенство (9) означает, что $\mu(x_\tau) = \mu(y_\tau)$, поэтому, с учетом (8) и (7),

$$D(\mu, \mathfrak{M}, \rho) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in \mathfrak{M},\ \mu(x) = \mu(y)\} \ge$$

$$\ge \rho(x_\tau, y_\tau) = D(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho),$$

и остается воспользоваться определением (4).

Укажем достаточные условия, гарантирующие выполнение равенства (9) для некоторой пары $\{x_\tau, y_\tau\} \in Q$. Во множестве Q будем выделять подмножество Q_*, содержащее для каждого $\tau \in [a, b]$ ровно по одной паре функций $\{x_\tau, y_\tau\}$. С каждым функционалом $\mu \in C'$ и подмножеством Q_* будем связывать функцию

$$A(\tau) = \int_a^b \delta_\tau(t)\, dg(t) = \int_a^b [x_\tau(t) - y_\tau(t)]\, dg(t),$$

где $\{x_\tau, y_\tau\} \in Q_*$.

Предложение 2. *Если для функционала* $\mu \in C'$ *существует подмножество* $Q_* \subset Q$ *такое, что функция* $A(\tau)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и* $A(a) = -A(b)$, *то для некоторого* $\tau_* \in [a, b]$ *справедливо неравенство*

$$I(\mu_{\tau_*}, \mathfrak{M}, \rho) \ge I(\mu, \mathfrak{M}, \rho). \tag{10}$$

Предложение 3. *Если в* Q *существует подмножество* Q_* *пар функций* $\{x_\tau, y_\tau\}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \max_{a \le t \le b} |\delta_{\tau+\Delta\tau}(t) - \delta_\tau(t)| = 0 \quad \forall \tau \in [a, b], \tag{11}$$

$$\delta_a(t) = -\delta_b(t), \quad a \le t \le b, \tag{12}$$

то для любого функционала $\mu \in C'$ *существует точка* $\tau \in [a, b]$ *такая, что выполняется неравенство* (10).

В самом деле, так как

$$|A(\tau + \Delta\tau) - A(\tau)| \le \int_a^b |\delta_{\tau+\Delta\tau}(t) - \delta_\tau(t)|\, |dg(t)|,$$

то из (11) следует непрерывность функции $A(\tau)$ на $[a, b]$ для любой функции $g(t)$, имеющей ограниченное изменение на этом отрезке. А так как в силу (12)

$A(a) = -A(b)$, то можно воспользоваться предложением 2.

3. Для некоторых конкретных случаев задания множества $\mathfrak{M} \subset C$ мы можем доказать выполнение условий предложения 3 и, тем самым, неравенства (10) для некоторой точки $\tau \in [a, b]$. Введем в рассмотрение множество функций

$$KH_0^1 = \{x(t): |x(t') - x(t'')| \le K|t' - t''|,\ t', t'' \in [a, b],\ x(a) = x(b) = 0\}$$

и положим

$$\rho_C(x, y) = \max_{a \le x \le b} |x(t) - y(t)| =: \|x - y\|_C.$$

Теорема 1. *Пусть $\psi(t)$ — фиксированная неотрицательная функция из KH_0^1 и*

$$\mathfrak{M} = \{x(t): x(t) \in KH_0^1,\ |x(t)| \le \psi(t),\ a \le t \le b\}.$$

Для любого функционала $\mu \in C'$ существуют точка $\tau_* \in [a, b]$ и соответственно функционал $\mu_{\tau_*} \in C'_\tau$ такие, что

$$I(\mu_{\tau_*}, \mathfrak{M}, \rho_C) \ge I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_C) \tag{13}$$

и, следовательно,

$$\sup_{\mu \in C'} I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_C) = \sup_{\mu_\tau \in C'_\tau} I(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho_C). \tag{14}$$

Доказательство. Зафиксируем точку $\tau \in [a, b]$ и определим функции

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \max\{-\psi(t),\ K(t-\tau)\}, & a \le t \le \tau, \\ \min\{\psi(t),\ K(t-\tau)\}, & \tau \le t \le b; \end{cases} \tag{15}$$

$$y_\tau(t) = \begin{cases} \min\{\psi(t),\ K(\tau-t)\}, & a \le t \le \tau, \\ \max\{-\psi(t),\ K(\tau-t)\}, & \tau \le t \le b. \end{cases} \tag{16}$$

В случаях $\tau = a$ и $\tau = b$ в определениях (15) и (16) остается по одному равенству. Ясно, что функции $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$ принадлежат множеству $\mathfrak{M}$. Докажем, что для любых двух функций $x(t), y(t) \in \mathfrak{M}$ таких, что $x(\tau) = y(\tau)$, выполняется неравенство

$$|x(t) - y(t)| \le |x_\tau(t) - y_\tau(t)|, \quad a \le t \le b. \tag{17}$$

Пусть $a < \tau < b$, $\psi(\tau) > 0$ и точка $t_0 > \tau$ определена равенством $K(t_0 - \tau) = \psi(t_0)$. Из определения функций (15) и (16) следует

$$|x_\tau(t) - y_\tau(t)| = \begin{cases} 2K(t-\tau), & \tau \le t \le \tau + t_0, \\ 2\psi(t), & \tau + t_0 \le t \le b. \end{cases}$$

Для каждого $\gamma \in [-\psi(\tau), \psi(\tau)]$ определим точки t' и t'' равенствами соответственно

$$K(t' - \tau) + \gamma = \psi(t'), \quad -K(t'' - \tau) + \gamma = -\psi(t'').$$

Пусть, далее, $x(t), y(t) \in \mathfrak{M}$ и $x(\tau) = y(\tau) = \gamma$, причем для определенности считаем, что $\gamma > 0$; тогда, очевидно, $t' \le t_0 \le t''$. Для $t \in [\tau, t']$ имеем

$$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - x(\tau)| + |y(t) - y(\tau)| \le 2K(t - \tau) = |x_\tau(t) - y_\tau(t)|.$$

Если же $t' \le t \le t_0$, то значения $x(t)$, $y(t)$ заключены между $\gamma - K(t-\tau)$ и $\psi(t)$, а так как на этом промежутке $\psi(t) \le K(t-\tau)+\gamma$, то и здесь

$$|x(t)-y(t)| \le 2K(t-\tau) = |x_\tau(t)-y_\tau(t)|.$$

Наконец, если $t_0 \le t \le b$, то

$$-\psi(t) \le \gamma - K(t-\tau) \le x(t), y(t) \le \psi(t),$$

так что $|x(t)-y(t)| \le 2\psi(t) = |x_\tau(t)-y_\tau(t)|$.

Этим доказано, что неравенство (17) справедливо для $\tau \le t \le b$. Доказательство неравенства (17) для $a \le t \le \tau$ (если $\tau > a$) проводится аналогично. Итак, установлено, что

$$\|x_\tau - y_\tau\|_C = \sup\{\|x-y\|_C \colon x, y \in \mathfrak{M},\ x(\tau) = y(\tau)\} = D(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho_C), \tag{18}$$

где μ_τ — функционал, определяемый равенством (7).

Из определения функций $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$ следует, что для разности $\delta_\tau(t) = x_\tau(t)-y_\tau(t)$ справедливы равенства $\delta_a(t) = 2\psi(t) = -\delta_b(t)$, $a \le t \le b$, и кроме того, $\|\delta_{\tau+\Delta\tau}(\cdot) - \delta_\tau(\cdot)\|_C \le 2K|\Delta\tau|$. Теперь справедливость неравенства (13) для некоторого $\tau \in [a, b]$ следует из предложения 3.

Таким образом, для любого функционала $\mu \in C'$ найдется функционал $\mu_\tau \in C'_\tau$, имеющий не меньшую информативность относительно множества $\mathfrak{M}$ и метрики ρ_C. А это значит, что при отыскании наиболее информативного функционала вомножестве C' можно ограничиться рассмотрением лишь подмножества C'_τ функционалов вида (7), т. е. справед. и.во соотношение (14).

4. Рассмотрим некоторые ситуации с интегральной метрикой

$$\rho_L(x, y) = \|x-y\|_L = \int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt.$$

Из неравенства (17) следует, что соотношение (18) будет выполняться и при замене ρ_C на ρ_L. Поэтому справедливо утверждение, аналогичное теореме 1 и для метрики ρ_L. В условиях этой теоремы для некоторого $\tau_* \in [a, b]$ $I(\mu_{\tau_*}, \mathfrak{M}, \rho_L) \ge I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_L)$ и, следовательно,

$$\sup_{\mu \in C'} I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_L) = \sup_{\mu_\tau \in C'_\tau} I(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho_L).$$

Это верно и для метрики L_p, $1 < p < \infty$. Заметим, что множество $\mathfrak{M}$ здесь и в теореме 1 является центрально-симметричным, и это существенно для равномерной метрики. В метрике L аналогичные факты мы можем доказать и для некоторых несимметричных множеств. Пусть

$$KH_h^1 = \{x(t)\colon |x(t')-x(t'')| \le K|t'-t''|,$$

$$t', t'' \in [a, b],\ x(a) = 0,\ x(b) = h\}, \tag{19}$$

где K и h — фиксированные числа, $K > 0$, $0 \le |h| < K(b-a)$. При $h \ne 0$ множество (19) не является симметричным. Не теряя общности, будем предполагать, что $0 < h < K(b-a)$. Если $x(t) \in KH_h^1$, то

$$\max\{-K(t-a),\ h-K(b-t)\} =: \psi(t) \le x(t) \le$$

$$\leq \Psi(t) := \min\{K(t-a),\ K(b-t)+h\}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Для любого функционала* $\mu \in C'$ *существует точка* $\tau_* \in [a, b]$ *и соответственно функционал* $\mu_{\tau_*} \in C'_\tau$ *такие, что*

$$I(\mu_{\tau_*}, KH^1_h, \rho_L) \geq I(\mu, KH^1_h, \rho_L)$$

и, следовательно,

$$\sup_{\mu \in C'} I(\mu, KH^1_h, \rho_L) = \sup_{\mu_\tau \in C'_\tau} I(\mu_\tau, KH^1_h, \rho_L). \tag{21}$$

Доказательство. Пусть

$$B(\gamma, \tau) = \sup\{\|x-y\|_L\colon x, y \in KH^1_h,\ x(\tau) = y(\tau) = \gamma,$$
$$\psi(\tau) \leq \gamma \leq \Psi(\tau)\}. \tag{22}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Для каждого* $\tau \in (a, b)$

$$\sup_{\psi(\tau) \leq \gamma \leq \Psi(\tau)} B(\gamma, \tau) = B(\gamma_\tau, \tau),$$

где

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \Psi(\tau) = K(\tau - a), & a < \tau \leq a + h/2K, \\ \dfrac{h}{2}, & a + h/2K \leq \tau \leq b - h/2K, \\ \psi(\tau) = h - K(b-\tau), & b - h/2K < \tau < b. \end{cases}$$

Доказательство леммы. Зафиксируем τ, причем с учетом (20) достаточно рассмотреть случай $a < \tau \leq (a+b)/2$. Положим $z = K(\tau - a) - \gamma$. Из определения множества KH^1_h и неравенства (20) нетрудно заключить, что

$$B(\gamma, \tau) = (\tau - a + z/2K)z +$$
$$+ (b - \tau - (b-a)/2 + (h+z)/2K)(K(b-a) - h - z) =: \varphi(z).$$

Если $a < \tau \leq a + h/2K$, то

$$\varphi(z) = \varphi(0) + [2(\tau - a) - h/K]z - z^2/K \leq \varphi(0),$$

т. е. $B(\gamma, \tau) \leq B(K(\tau - a), \tau) = B(\Psi(\tau), \tau)$. В случае же $a + h/2K \leq \tau \leq (a + b)/2$

$$\varphi'(z) = 2(\tau - a) - h/K - 2z/K,$$

так что $\varphi(z)$ имеет максимум при $z = K(\tau - a) - h/2$, а это означает, что $B(\gamma, \tau) \leq B(h/2, \tau)$. Лемма доказана.

Определим пару функций $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$, которые реализуют верхнюю грань (22) при $\gamma = \gamma_\tau$, дополнив по непрерывности определение в точках $\tau = a$ и $\tau = b$. Если $a \leq \tau \leq a + h/2K$, то

$$x_\tau(t) = \Psi(t), \quad a \leq t \leq b,$$

$$y_\tau(t) = \begin{cases} \Psi(t), & a \leq t \leq \tau, \\ \max\{K(t-\tau) + \Psi(t),\ \psi(t)\}, & \tau \leq t \leq b. \end{cases}$$

Для $a + h/2K \leq \tau \leq b - h/2K$

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \max\{\psi(t),\ K(t-\tau)+h/2\}, & a+h/2K \le t \le \tau, \\ \min\{\Psi(t),\ K(t-\tau)+h/2\}, & \tau \le t \le b; \end{cases}$$

$$y_\tau(t) = \begin{cases} \min\{\Psi(t),\ K(\tau-t)+h/2\}, & a+h/2K \le t \le \tau, \\ \max\{\psi(t),\ K(\tau-t)+h/2\}, & \tau \le t \le b. \end{cases}$$

Наконец, если $b-h/2K \le \tau \le b$, то

$$x_\tau(t) = \psi(t), \quad a \le t \le b;$$

$$y_\tau(t) = \begin{cases} \min\{\Psi(t),\ K(\tau-t)+\psi(t)\}, & a \le t \le \tau, \\ \psi(t), & \tau \le t \le b. \end{cases}$$

Ясно, что $x_\tau, y_\tau \in KH_h^1$, причем $x_a(t) = y_b(t) = \Psi(t)$, $x_b(t) = y_a(t) = \psi(t)$, а значит, для разности $\delta_\tau(t) = x_\tau(t) - y_\tau(t)$ выполняется соотношение $\delta_a(t) = -\delta_b(t)$. Из определения функций $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$ следует также

$$\|\delta_{\tau+\Delta t}(\cdot) - \delta_\tau(\cdot)\|_C \le 2K|\Delta t|. \tag{23}$$

Здесь выполняются условия предложения 3, поэтому первое утверждение теоремы 2 доказано. Из него сразу следует соотношение (21), ибо $C'_\tau \subset C'$.

Легко подсчитать, что верхнюю грань в правой части (21) реализует функционал μ_{τ_0}, где $\tau_0 = (a+b)/2$, причем

$$\sup_{\mu \in C'} I(\mu, KH_h^1, \rho_L) = I(\mu_{\tau_0}, KH_h^1, \rho_L) = \frac{K(b-a)^2}{2} - \frac{h^2}{2K}.$$

Теорему 2 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3. *Пусть на интервале (a, b) фиксированы n различных точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$ и*

$$\mathfrak{M} = \{x(t) \colon x(t) \in KH_h^1,\ x(t_k) = \beta_k,\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \tag{24}$$

где значения β_k тоже фиксированы. Для любого функционала $\mu \in C'$ существует функционал $\mu_\tau \in C'_\tau$ такой, что $I(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho_L) \ge I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_L)$ и

$$\sup_{\mu \in C'} I(\mu, \mathfrak{M}, \rho_L) = \sup_{\mu_\tau \in C'_\tau} I(\mu_\tau, \mathfrak{M}, \rho_L).$$

Доказательство. Пусть $a = t_0$, $b = t_{n+1}$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1}$, и

$$\Psi(t) = \min_{0 \le k \le n+1} (K|t-t_k| + \beta_k), \quad a \le t \le b,$$

$$\psi(t) = \max_{0 \le k \le n+1} (\beta_k - K|t-t_k|), \quad a \le t \le b.$$

Зададим на $[a, b]$ функции $x_\tau(t)$ и $y_\tau(t)$ следующим образом. Если $\tau = t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то пусть

$$x_\tau(t) = \begin{cases} \psi(t), & a \le t \le t_k, \\ \Psi(t), & t_k \le t \le b; \end{cases}$$

$$y_\tau(t) = \begin{cases} \Psi(t), & a \le t \le t_k, \\ \psi(t), & t_k \le t \le b. \end{cases}$$

Если же $t_{k-1} < \tau < t_k$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$, то на промежутке (t_{k-1}, t_k) определяем x_τ и y_τ как в теореме 2 на промежутке (a, b). Для $t \in [a, t_{k-1}]$ полагаем $x_\tau(t) = \psi(t)$, $y_\tau(t) = \Psi(t)$; если $t \in [t_k, b]$, то $x_\tau(t) = \Psi(t)$, $y_\tau(t) = \psi(t)$. Ясно, что и здесь для разности $\delta_\tau(t) = x_\tau(t) - y_\tau(t)$ выполняется соотношение $\delta_a(t) = -\delta_b(t)$, а также неравенство (23). Остается воспользоваться предложением 3.

Наиболее информативным относительно множества (24) и метрики ρ_L будет функционал μ_{τ_0}, где τ_0 — середина наибольшего по длине из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Значение $I(\mu_{\tau_0}, \mathfrak{M}, \rho_L)$ подсчитывается без труда.

1. *Lorentz G. G.* Approximation of Functions. – New York: Holt, Rinehart and Winston, 1966. – 188 p.
2. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
3. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
4. *Pinkus A.* N-widths in Approximation Theory. – Berlin: Springer Verlag, 1985. – 204 p.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
6. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
7. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х.* Информация, неопределенность сложность. – М.: Мир, 1988. – 184 с.

Получено 01.11.93