УДК 517.51

В. О. Лівінський, асп. (Ін-т математики АН України, Київ)

НОРМАЛЬНІСТЬ В ІСТОТНОМУ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ОПЕРАТОРІВ У НЕСКІНЧЕННОМУ ТЕНЗОРНОМУ ДОБУТКУ ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРІВ*

The essential normality of certain classes of operators in stabilized infinite tensor products of Hilbert spaces is established by using general criteria of essentiality of domains of definition of spectral integrals.

За допомогою загальних ознак істотності областей визначення спектральних інтегралів встановлюється нормальність в істотному деяких класів операторів в стабілізованих нескінченних тензорних добутках гільбертових просторів.

Поряд зі скінченними тензорними добутками розкладів одиниці природним чином визначається й нескінченний добуток — розклад одиниці, що діє в нескінченному стабілізованому тензорному добутку гільбертових просторів. Дана робота є продовженням роботи [1], в якій на основі деяких ознак нормальності в істотному звужень спектральних інтегралів доводиться нормальність в істотному певних класів операторів в скінченному тензорному добутку гільбертових просторів, що є звуженнями спектральних інтегралів за скінченним тензорним добутком розкладів одиниці. В даній роботі за допомогою тих самих ознак доводиться нормальність в істотному аналогічних класів операторів в нескінченному стабілізованому тензорному добутку гільбертових просторів, що є звуженнями спектральних інтегралів за нескінченним тензорним добутком розкладів одиниці. Одержано деякі формули операторного числення в нескінченних стабілізованих тензорних добутках гільбертових просторів. Зберігаються прийняті в [1] позначення.

Нехай $(X, \mathfrak{F})$ — вимірний простір, H — сепарабельний гільбертів простір, $E\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{L}(H)$ — розклад одиниці. Виразом $\mathfrak{L}(H)$ тут і далі позначено простір лінійних неперервних операторів, що діють в H.

Нагадаємо означення, зроблене в роботі [1]. Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ — послідовність щільно визначених лінійних операторів, що діють в просторі H, M — множина всіх $\xi \in H$, для яких послідовність векторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n\xi$ збігається в H. У випадку щільності M в H будемо говорити, що послідовність $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ має початкову границю, під якою розумітимемо такий лінійний оператор:

$$M \ni \xi \mapsto \lim_{n \to \infty} A_n \xi \in H.$$

Позначатимемо поточкову границю виразом $\operatorname{p}\lim\limits_{n \to \infty} A_n$.

Нам будуть потрібні наступні твердження, доведені в [1].

Теорема 1. *Нехай* $f\colon X \to \mathbb{C}$ — $\mathfrak{F}$*-вимірна функція,* $B = \int_X f(x)\,dE(x)$, $\mathfrak{L}$ — *система твірних* σ*-алгебри* $\mathfrak{F}$ *і щільний в* H *многовид* $M \subseteq \operatorname{Dom}(B)$ *витримує дію проектора* $E(\alpha)$ *для всіх* $\alpha \in \mathfrak{L}$. *Тоді* M — *істотна область визначення оператора* B.

Теорема 2. *Нехай послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ *нормальних операторів, що сильно комутують, має поточкову границю. Тоді* $\operatorname{p}\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ *замикається і її замикання є спектральним інтегралом за спільним для послідовності* $\mathbb{N} \ni n \mapsto$

* Робота частково підтримана Фондом фундаментальних досліджень при Державному комітеті України з питань науки та технологій.

$\mapsto A_n$ *розкладом одиниці.*

Теорема 3. *Нехай послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ *нормальних операторів, що сильно комутують, має поточкову границю. Тоді поточкову границю має й послідовність* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n^*$, *причому*

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n\right)^* = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_n^*\right)^{\sim}.$$

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto H_n$ — послідовність сепарабельних гільбертових просторів, $\mathbb{N} \ni n \mapsto e_n \in H_n$ — фіксована послідовність ортів. Позначатимемо її коротко літерою e. Ототожнюючи для кожного $n \in \mathbb{N}$ вектори $\xi \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$ та $\xi \otimes e_{n+1} \in H_1 \otimes \ldots \otimes H_{n+1}$, одержуємо ланцюжок лінійних вкладень $H_1 \subseteq \subseteq H_1 \otimes H_2 \subseteq \ldots$ — ланцюжок ізометрій. Він визначає скалярний добуток в лінійному просторі $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_1 \otimes \ldots \otimes H_n$, поповнення якого називають тензорним добутком послідовності гільбертових просторів $\mathbb{N} \ni n \mapsto H_n$ зі стабілізацією e. Позначатимемо його виразом $\otimes_{n=1;\,e}^{\infty} H_n$, або коротко літерою H.

Нехай $\mathbb{N} \ni n \mapsto (X_n, \mathfrak{F}_n)$ — послідовність вимірних просторів, $\mathbb{N} \ni n \mapsto E_n : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — послідовність розкладів одиниці. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виразом $\mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$ позначатимемо напівкільце множин, складене декартовими добутками елементів σ-алгебр $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_n$. Ототожнюючи множини $\alpha \in \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_n$ та $\alpha \times X_{n+1} \in \mathfrak{F}_1 \times \ldots \times \mathfrak{F}_{n+1}$, маємо ланцюжок вкладень $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \subseteq \ldots$, що дозволяє визначити півкільце $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ як об'єднання півкілець $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2, \ldots$. Його σ-оболонку позначатимемо літерою $\mathfrak{F}$. Літерою X позначатимемо декартів добуток $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

Нехай I_n — тотожний оператор у просторі $\otimes_{i=n;\,e}^{\infty} H_{i+1}$. Існує єдиний розклад одиниці $E : \mathfrak{F} \to \mathfrak{L}(H)$ такий, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{F}_n$ $E(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n) = E_1(\alpha_1) \otimes \ldots \otimes E_n(\alpha_n) \otimes I_n$. Його називають тензорним добутком послідовності розкладів одиниці $\mathbb{N} \ni n \mapsto E_n : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$. Схема доведення цього відомого [2] твердження повторює наведену в роботі [1] схему доведення аналогічного твердження про скінченний добуток розкладів одиниці.

Теорема 4. *Нехай* $f : X \to \mathbb{C}$ — $\mathfrak{F}$*-вимірна функція,* $B = \int_X f(x)\,dE(x)$ *і щільний в* H *многовид* $M \subseteq \operatorname{Dom}(B)$ *витримує дію проектора* $E(\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n)$ *для всіх* $\alpha_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Тоді* M — *істотна область визначення оператора* B.

Ця теорема безпосередньо випливає з теореми 1, адже множини вигляду $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$, де $\alpha_1 \in \mathfrak{F}_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{F}_n$, $n \in \mathbb{N}$, складають півкільце $\prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$ — систему твірних σ-алгебри $\mathfrak{F}$.

Теорема 5. *Нехай* $\mathbb{N} \ni n \mapsto A_n$ — *послідовність нормальних операторів, що діють відповідно у просторах* H_n, $n \in \mathbb{N}$. *Припустимо, що існує границя* $\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n$. *Як і в* [1], *виразом* $\otimes_a$ *позначено алгебраїчний* *тензорний добуток). Тоді вона в істотному нормальна, причому*

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \otimes I_n\right)^{\sim},$$

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)^{*} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_n^* \otimes_a I_n\right)^{\sim},$$

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_n^* \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^* \otimes I_n\right)^{\sim}.$$

Доведення. Нехай $E_n: \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — розклад одиниці оператора A_n, $n \in \mathbb{N}$, E — тензорний добуток послідовності розкладів одиниці $\mathbb{N} \ni n \mapsto E_n$. Тоді за теоремою 2 маємо

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n \subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \otimes I_n\right)^{\sim} = \int_X f(x)\, dE(x).$$

Многовид

$$\operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)$$

витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$. Справді, для кожного $n \in \mathbb{N}$ многовид $\operatorname{Dom}(A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n)$, очевидно, витримує дію $E(\alpha)$ для всіх таких α. Тому для будь-якого $\xi \in \operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)$

$$(A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n) E(\alpha)\xi = E(\alpha)(A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n)\xi \to$$

$$\to E(\alpha)\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)\xi, \quad n \to \infty.$$

Тобто

$$E(\alpha)\xi \in \operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right).$$

Отже, за теоремою 4

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \int_X f(x)\, dE(x) = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \otimes I_n\right)^{\sim}.$$

Аналогічно доводиться рівність

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_n^* \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^* \otimes I_n\right)^{\sim}.$$

Існування границі в її лівій частині випливає з існування границі

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n,$$

причому

$$\operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_n^* \otimes_a I_n\right) = \operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right).$$

Нарешті, згідно з теоремою 3

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_n^* \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1^* \otimes \ldots \otimes A_n^* \otimes I_n\right)^{\sim} =$$

$$= \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes \ldots \otimes A_n \otimes I_n\right)^{*} = \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_1 \otimes_a \ldots \otimes_a A_n \otimes_a I_n\right)^{*}.$$

Теорема 6. *Нехай нормальні оператори* $A_{n1}, \ldots, A_{nm}$ *сильно комутують у просторі* H_n, $n \in \mathbb{N}$, *та існують поточкові границі*

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n, \ 1 \le k \le m.$$

Тоді оператор

$$\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n\right)$$

в істотному нормальний, якщо він щільно визначений, причому

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n\right)^{\sim} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n\right)^{\sim}\right)^{\sim},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n\right)^{*} = \left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n\right)^{\sim},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n\right)^{\sim} =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes \ldots \otimes A_{nk}^* \otimes I_n\right)^{\sim}\right)^{\sim}.$$

Доведення. Нехай $E_n : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — спільний розклад одиниці для операторів $A_{n1}, \ldots, A_{nm}$, $n \in \mathbb{N}$, E — тензорний добуток послідовності розкладів одиниці $\mathbb{N} \ni n \mapsto E_n$. Тоді за теоремою 2 для всіх $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n\right)^{\sim} = \int_X f_k(x)\, dE(x).$$

За теоремою 5 для всіх $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes \ldots \otimes A_{nk}^* \otimes I_n\right)^{\sim} = \int_X \overline{f_k(x)}\, dE(x).$$

Звідси

$$\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} = \int_X \left(f_1(x) + \ldots + f_m(x) \right) dE(x),$$

$$\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes \ldots \otimes A_{nk}^{*} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} = \int_X \left(\overline{f_1(x)} + \ldots + \overline{f_m(x)} \right) dE(x).$$

Многовид

$$\mathrm{Dom} \left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right) =$$

$$= \mathrm{Dom} \left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \right),$$

очевидно, витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$, тож за теоремою 4

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes \ldots \otimes A_{nk}^{*} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim}.$$

Нарешті,

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \int_X \left(\overline{f_1(x)} + \ldots + \overline{f_m(x)} \right) dE(x) =$$

$$= \left(\int_X \left(f_1(x) + \ldots + f_m(x) \right) dE(x) \right)^{*} = \left(\sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{*}.$$

Теорема 7. *Нехай* $\mathbb{N} \ni k \mapsto A_{nk}$ — *послідовність нормальних операторів, що діють у просторі* H_n *і сильно комутують,* $n \in \mathbb{N}$. *Припустимо, що існують початкові границі* $\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n$, $k \in \mathbb{N}$, *а також границя*

$$\underset{m \to \infty}{\mathrm{p\,lim}} \sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n.$$

Тоді вона в істотному нормальна, причому

$$\left(\underset{m \to \infty}{\mathrm{p\,lim}} \sum_{k=1}^{m} \underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{\sim} =$$

$$= \left(\underset{m \to \infty}{\mathrm{p\,lim}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\underset{n \to \infty}{\mathrm{p\,lim}}\; A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim},$$

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{*} =$$

$$= \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \right)^{\sim},$$

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \right)^{\sim} =$$

$$= \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes \ldots \otimes A_{nk}^{*} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim}.$$

Доведення. Нехай $E_n : \mathfrak{F}_n \to \mathfrak{L}(H_n)$ — спільний розклад одиниці для послідовності операторів $\mathbb{N} \ni k \mapsto A_{nk}$, $n \in \mathbb{N}$, E — тензорний добуток послідовності розкладів одиниці $\mathbb{N} \ni n \mapsto E_n$. За теоремою 2 для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} = \int_X f_k(x)\, dE(x).$$

За теоремою 5 для всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes \ldots \otimes A_{nk}^{*} \otimes I_n \right)^{\sim} = \int_X \overline{f_k(x)}\, dE(x).$$

Звідси

$$\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} =$$

$$= \operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \int_X (f_1(x) + \ldots + f_m(x))\, dE(x) \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \int_X (f_1(x) + \ldots + f_m(x))\, dE(x) \right)^{\sim} = \int_X f(x)\, dE(x),$$

$$\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^{*} \otimes_a I_n \subseteq$$

$$\subseteq \operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^{*} \otimes \ldots \otimes A_{nk}^{*} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} =$$

$$= \operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \int_X \left(\overline{f_1(x)} + \ldots + \overline{f_m(x)}\right) dE(x) \subseteq$$

$$\subseteq \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \int_X \left(\overline{f_1(x)} + \ldots + \overline{f_m(x)}\right) dE(x) \right)^{\sim} = \int_X \overline{f(x)}\, dE(x).$$

Неважко переконатись, що многовид

$$\operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right) =$$

$$= \operatorname{Dom}\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)$$

витримує дію $E(\alpha)$ для всіх $\alpha \in \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_n$, отже, за теоремою 4

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \int_X f(x)\, dE(x) =$$

$$= \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes \ldots \otimes A_{nk} \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim},$$

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \int_X \overline{f(x)}\, dE(x) =$$

$$= \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes \ldots \otimes A_{nk}^* \otimes I_n \right)^{\sim} \right)^{\sim} \right)^{\sim}.$$

Нарешті,

$$\left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k}^* \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk}^* \otimes_a I_n \right)^{\sim} = \int_X \overline{f(x)}\, dE(x) =$$

$$= \left(\int_X f(x)\, dE(x) \right)^* = \left(\operatorname*{p\,lim}_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{p\,lim}_{n\to\infty} A_{1k} \otimes_a \ldots \otimes_a A_{nk} \otimes_a I_n \right)^*.$$

У частинному випадку останнє твердження було доведене в роботі [2].

1. *Лівінський В. О.* Нормальність в істотному деяких класів операторів у тензорному добутку гільбертових просторів // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №7. – С. 878–885.
2. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф.* О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, допускающих разделение бесконечного числа переменных // Докл. АН СССР. – 1973. – **213**, №5. – С. 1005 – 1008.

Одержано 13.07.93