УДК 517.944

В. Б. Мосеенков, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТРЕХМЕРНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА КОНВЕКЦИИ ВЯЗКОЙ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ. II. ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ

We continue to study the three-dimensional initial-boundary-value problem of convection of viscous thermally inhomogeneous weakly compressible liquid which fills a cavity inside a body. Theorems on uniqueness of a generalized solution of this problem and its continuity with respect to initial conditions and perturbations are proved. Estimates of exponential type are obtained for the decay of solutions (in the mean) for large times.

Продовжуються дослідження тривимірної початково-крайової задачі конвекції в'язкої термічно неоднорідної слабко стисливої ріднини, що заповнює порожнину в твердому тілі. Доведені теореми про єдиність її узагальненого розв'язку, неперервну залежність його від початкових умов та збурень. Одержані оцінки експоненціального типу, які характеризують затухання розв'язків (у середньому) при великих значеннях часу.

В настоящей статье, являющейся продолжением работы [11], изучаются вопросы единственности и устойчивости обобщенных решений трехмерной начально-краевой задачи конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. Здесь сохранены обозначения, введенные в [11], а нумерация формул и списка литературы продолжается.

4. В первой части работы [11] построен ограниченный в

$$\mathring{J}^{1,0}_{2+2\gamma_1}\left(\Omega_1^T\right) \times V^{1,0}_{2+2\gamma_2,0}\left(\Omega_2^T\right) \times L_{6/5}\left(0, T; W^{(1)}_{2,0}(\Omega_1)\right) \times \mathring{V}^{2}_{2+2\gamma_3}\left(\Omega_1^T\right)$$

итерационный процесс (v^n, τ^n, q^n, u^n) и, тем самым, подпоследовательность $(v^{n_k}, \tau^{n_k}, q^{n_k}, u^{n_k})$, слабо сходящаяся (в соответствующих пространствах) к обобщенному решению (v, τ, q, u) задачи (8) – (15).

Следуя идеям доказательства теоремы об однозначной разрешимости в целом задачи конвекции при наличии осевой симметрии [11], покажем, что эта подпоследовательность имеет свойство сильной сходимости.

Отождествим ее без ограничения общности с самой последовательностью. Тогда согласно теореме 1 (см. п. 3 предыдущей статьи) функции $v = v^{n+1} - v^n$. $\tau = \tau^{n+1} - \tau^n$, $q = q^n - q^{n-1}$, $u = u^n - u^{n-1}$ удовлетворяют энергетическим равенствам

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_1} v^2 dx \,\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} + \frac{1}{2}\int_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[\nu_0\left(\varepsilon\tau^n\right)|\hat{v}|^2 + \delta^{2\gamma_1}\left(\left|\hat{v}^{n+1}\right|^{2\gamma_1}\hat{v}^{n+1} - \left|\hat{v}^{n}\right|^{2\gamma_1}\hat{v}^{n}\right) : \hat{v}\right] dx\,dt =$$

$$= \int_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\{ \frac{1}{2}\left[\nu_0\left(\varepsilon\tau^n\right) - \nu_0\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right)\right]\hat{v}^n : \hat{v} + \left[g\tau + \frac{1}{2}v\hat{w}^n + g\left(\varepsilon^{-1}F\left(\varepsilon\tau^n\right) - \tau^n - \right.\right.\right.$$

$$\left. - \varepsilon^{-1}F\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right) - \tau^{n-1}\right) - \varepsilon\left(U\left(v^n, u^n\right) - U\left(v^{n-1}, u^{n-1}\right) + V\left(v^n, \tau^n\right) - \right.$$

$$\left.\left.\left. - V\left(v^{n-1}, \tau^{n-1}\right) + \tau^n\nabla q^n - \tau^{n-1}\nabla q^{n-1}\right)\right]\cdot v\right\} dx\,dt, \tag{53}$$

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_2} \sigma\tau^2 dx \,\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} +$$

$$+\int\limits_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} \kappa_0\left(\varepsilon\tau^n\right)|\nabla\tau|^2 dx\,dt + \varepsilon^{2\gamma_2}\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left(\left|\nabla\tau^{n+1}\right|^{2\gamma_2}\nabla\tau^{n+1} - \left|\nabla\tau^n\right|^{2\gamma_2}\nabla\tau^n\right)dx\,dt =$$

$$= -\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\{\left[\kappa_0\left(\varepsilon\tau^n\right) - \kappa_0\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right)\right]\nabla\tau^n\cdot\nabla\tau + \left[(v\cdot\nabla)\theta^n + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon\left(\nabla u^n\cdot\nabla\tau^n - \nabla u^{n-1}\cdot\nabla\tau^{n-1}\right) - \delta\left(\left|\hat{v}^n\right|^2 - \left|\hat{v}^{n-1}\right|^2\right)\right]\tau\right\}dx\,dt, \tag{54}$$

$$\|\nabla q\|_{\Omega_1}^2 = \int\limits_{\Omega_1}\left\{\left[\left(v^{n-1}\cdot\nabla\right)v^{n-1} - \left(v^n\cdot\nabla\right)v^n\right]\cdot\nabla q + \left(\tau^n - \tau^{n-1}\right)q_z\right\}dx, \tag{55}$$

$$\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}}\left[\varepsilon|\Delta u|^2 + \varepsilon^{2\gamma_3}\left(\left|\nabla u^n\right|^{2\gamma_3}\nabla u^n - \left|\nabla u^{n-1}\right|^{2\gamma_3}\nabla u^{n-1}\right)\cdot\nabla u + |\nabla u|^2\right]dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} P'\nabla\left(\tau^n - \tau^{n-1}\right)\cdot\nabla u\,dx\,dt, \tag{56}$$

где $w^n = (v^{n+1} + v^n)/2$, $\theta^n = (\tau^{n+1} + \tau^n)/2$, t_1 и t_2 — произвольные точки из $[0, T]$.

Оценивая правые части (55) и (56), получаем

$$\left\|\nabla q_{\tau^n - \tau^{n-1}}\right\|_{\Omega_1} \le \|\tau^n - \tau^{n-1}\|_{\Omega_1},$$

$$\|q_{v^n} - q_{v^{n-1}}\|_{\Omega_1} \le c_1\|v^n - v^{n-1}\|_{4,\Omega_1}\|w^{n-1}\|_{4,\Omega_1}, \tag{57}$$

$$\left\|\nabla\left(q_{v^n} - q_{v^{n-1}}\right)\right\|_{\Omega_1} \le c_2\|\nabla(v^n - v^{n-1})\|_{\Omega_1}\|\nabla w^{n-1}\|_{3+\alpha,\Omega_1} \quad (\alpha > 0),$$

$$\|\nabla u\|_{\Omega_1^T} \le P'^{1/2}\|\nabla(\tau^n - \tau^{n-1})\|_{\Omega_1^T}. \tag{58}$$

Используя неравенства (57), (58), оценим интегралы в правых частях (53) и (54):

$$\mathcal{I}_1 = \left|\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}}\tau v\,dx\,dt\right| \le c_3|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + \frac{\nu_4}{2}\|\hat{v}\|^2_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \quad (\nu_4 = \min\{1/2, \nu_1\}),$$

$$\mathcal{I}_2 = \frac{1}{2}\left|\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} v\cdot\hat{w}^n\cdot v\,dx\,dt\right| \le c_4\|v\|^2_{10/3,\,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\left\|\hat{w}^n\right\|_{5/2,\,\Omega_{1t_1}^{t_2}} \le$$

$$\le c_5\left\|\hat{w}^n\right\|_{5/2,\,\Omega_{1t_1}^{t_2}}|v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)},$$

$$\mathcal{I}_3 = \left|\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}}\left[\nu_0\left(\varepsilon\tau^n\right) - \nu_0\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right)\right]\hat{v}^n : \hat{v}\,dx\,dt\right| \le c_6\varepsilon\left\|\tau^n - \tau^{n-1}\right\|_{10/3,\,\Omega_{2t_1}^{t_2}} \times$$

$$\times\left\|\hat{v}^n\right\|_{5,\,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\|\hat{v}\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \le \frac{\varepsilon^2}{\alpha}\left|\tau^n - \tau^{n-1}\right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + c_7\left\|\hat{v}^n\right\|^2_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}}|v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)},$$

$$\mathcal{I}_4 = \left|\int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}}\left[\varepsilon^{-1}F\left(\varepsilon\tau^n\right) - \tau^n - \varepsilon^{-1}F\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right) + \tau^{n-1}\right]v_3\,dx\,dt\right| \le$$

$$\leq c_8 \varepsilon^\gamma \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left(\left|\tau^n\right|^\gamma + \left|\tau^{n-1}\right|^\gamma \right) |\tau^n - \tau^{n-1}| \, |v| \, dx\, dt \leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})} +$$

$$+ c_9 \varepsilon^{2(\gamma-1)} \left(\left\|\tau^n\right\|^{2\gamma}_{5\gamma/2, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\tau^{n-1}\right\|^{2\gamma}_{5\gamma/2, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \right) |v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})},$$

$$\vartheta_5 = \left| \varepsilon \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[U\left(v^n, u^n\right) - U\left(v^{n-1}, u^{n-1}\right) \right] \cdot v \, dx\, dt \right| \leq \varepsilon c_{10} \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[\left|\nabla u^n\right| \left|\nabla\left(v^n - v^{n-1}\right)\right| + \right.$$

$$\left. + |\nabla u| \left(\left|\nabla v^n\right| + \left|\nabla v^{n-1}\right| \right) \right] |v| \, dx\, dt \leq$$

$$\leq \varepsilon c_{11} \|v\|_{10/3, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[\left\|\nabla\left(v^n - v^{n-1}\right)\right\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|\nabla u^n\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \right.$$

$$\left. + \|\nabla u\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left(\left\|\hat{v}^n\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\hat{v}^{n-1}\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \right) \right] \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})} + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \left|v^n - v^{n-1}\right|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})} +$$

$$+ c_{12} \left(\left\|\nabla u^n\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\hat{v}^n\right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\hat{v}^{n-1}\right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \right) |v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})},$$

$$\vartheta_6 = \left| \varepsilon \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[V\left(v^n, \tau^n\right) - V\left(v^{n-1}, \tau^{n-1}\right) \right] \cdot v \, dx\, dt \right| < \varepsilon c_{13} \|v\|_{10/3, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \times$$

$$\times \left[\left\|\nabla\left(\tau^n - \tau^{n-1}\right)\right\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|\hat{v}^n\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\nabla\left(v^n - v^{n-1}\right)\right\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|\nabla\tau^{n-1}\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \right] \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon^2}{\alpha} |\tau^n - \tau^{n-1}|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})} + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \left|v^n - v^{n-1}\right|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})} +$$

$$c_{14} \left(\left\|\hat{v}^n\right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\nabla\tau^{n-1}\right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \right) |v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})},$$

$$\vartheta_7 = \left| \varepsilon \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[(q_{v^{n-1}} - q_{v^n}) \nabla\tau^{n-1} + \tau^{n-1} \nabla q_{\tau^n - \tau^{n-1}} + \left(\tau^n - \tau^{n-1}\right) \nabla q^n \right] \cdot v \, dx\, dt \leq \right.$$

$$\leq \varepsilon c_{15} \left\|w^{n-1}\right\|_{4, \frac{8s_1}{5(4-s_1)}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|v^n - v^{n-1}\right\|_{4, \frac{8}{3}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|\nabla\tau^{n-1}\right\|_{\frac{2s_1}{s_1-2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \|v\|_{s_1, \frac{4s_1}{3(s_1-2)}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \max_{t_1 \leq t \leq t_2} \left[\left\|\tau^{n-1}\right\|_{\frac{2s_2}{s_2-2}, \frac{2s_2}{3}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\|\tau^n - \tau^{n-1}\right\|^{1/2}_{\Omega_1} \left\|\nabla\left(\tau^n - \tau^{n-1}\right)\right\|^{1/2}_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} \times \right.$$

$$\times \left(\left\|\tau^n\right\|^{1/2}_{\Omega_1} \left\|\nabla\tau^n\right\|^{1/2}_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} + \right.$$

$$+ \left\| v^n \right\|_{\Omega_1}^{7/10} \left\| \hat{v}^n \right\|_{\frac{26}{5}, \Omega_{1t_1}^{t_2}}^{13/10} + \left\| \overline{F}_1 \right\|_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg) \left\| \tau^n - \tau^{n-1} \right\|_{\frac{2s_2}{s_2-2}, \frac{2s_2}{3}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg] \left\| v \right\|_{s_2, \frac{4s_2}{3(s_2-2)}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg\} \le$$

$$\le \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + \frac{\varepsilon^2}{\beta} \left| v^n - v^{n-1} \right|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} + c_{16} \Bigg[\left\| w^{n-1} \right\|^2_{4, \frac{8s_1}{5(4-s_1)}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \times$$

$$\times \left\| \nabla\tau^{n-1} \right\|^2_{\frac{2s_1}{s_1-2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\| \tau^{n-1} \right\|^2_{\frac{2s_2}{s_2-2}, \frac{2s_2}{3}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \max_{t_1 \le t \le t_2} \Bigg(\left\| \tau^n \right\|_{\Omega_1} \left\| \nabla\tau^n \right\|_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \left\| v^n \right\|_{\Omega_1}^{7/5} \left\| \hat{v}^n \right\|^{13/5}_{\frac{26}{5}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg) + \left\| \overline{F}_1 \right\|^2_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg] \left| v \right|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)},$$

где α и β — константы, которые будут определены ниже, $10/3 \le s_1 < 4$, $3 \le$ $\le s_2 \le 6$.

Таким образом,

$$\frac{\nu_4}{2} |v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} \le \|v\|_{\Omega_1} \Big|_{t=t_1} + c_{17} |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + c_{18} \mu_1(t_1, t_2) |v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} +$$

$$+ \frac{5\varepsilon^2}{\alpha} \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + \frac{3\varepsilon^2}{\alpha} \left| v^n - v^{n-1} \right|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)}, \tag{59}$$

где $s_1 = 10/3$, $s_2 = 3$,

$$\mu_1(t_1, t_2) = \left\| \hat{w}^n \right\|_{\frac{5}{2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\| \hat{v}^n \right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\| \hat{v}^{n-1} \right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon^{2(\gamma-1)} \Bigg(\left\| \tau^n \right\|^{2\gamma}_{\frac{5\gamma}{2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \left\| \tau^{n-1} \right\|^{2\gamma}_{\frac{5\gamma}{2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg) + \left\| \nabla u^n \right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\| w^{n-1} \right\|^2_{4,8,\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\| \nabla\tau^{n-1} \right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\| \tau^{n-1} \right\|^2_{6,2,\Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \max_{t_1 \le t \le t_2} \Bigg(\left\| \tau^n \right\|_{\Omega_1} \left\| \nabla\tau^n \right\|_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} + \left\| v^n \right\|_{\Omega_1}^{7/5} \left\| \hat{v}^n \right\|^{13/5}_{\frac{26}{5}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \Bigg) + \left\| \overline{F}_1 \right\|^2_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}}.$$

Аналогично

$$\vartheta_8 = \left| \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left(v \cdot \nabla' \theta^n \right) \tau \, dx\, dt \right| \le c_{19} \|v\|_{\frac{10}{3}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left\| \nabla\theta^n \right\|_{\frac{5}{2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \|\tau\|_{\frac{10}{3}, \Omega_{2t_1}^{t_2}} \le$$

$$\le c_{20} \left\| \nabla\theta^n \right\|_{\frac{5}{2}, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[|v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} \right],$$

$$\vartheta_9 = \left| \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[\kappa_0\left(\varepsilon\tau^n\right) - \kappa_0\left(\varepsilon\tau^{n-1}\right) \right] \nabla\tau^n \cdot \nabla\tau \, dx\, dt \right| \le \varepsilon c_{21} \left\| \tau^n - \tau^{n-1} \right\|_{\frac{10}{3}, \Omega_{2t_1}^{t_2}} \times$$

$$\times \|\nabla\tau\|_{\Omega_{2t_1}^{t_2}} \left\| \nabla\tau^n \right\|_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} \le \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + c_{22} \left\| \nabla\tau^n \right\|^2_{5, \Omega_{1t_1}^{t_2}} |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)},$$

$$\vartheta_{10} = \varepsilon \left| \int\limits_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} \left[\nabla u^n \cdot \nabla\left(\tau^n - \tau^{n-1}\right) + \nabla\tau^{n-1} \cdot \nabla u \right] \tau \, dx\, dt \le \frac{\varepsilon^2}{\alpha} \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} + \right.$$

$$+ c_{23}\left(\left\| \nabla u^n \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla \tau^{n-1} \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} \right) |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)},$$

$$\vartheta_{11} = \delta \left| \int\limits_{\Omega^{t_2}_{1t_1}} \left(\left|\hat{v}^n\right|^2 - \left|\hat{v}^{n-1}\right|^2 \right) \tau \, dx\, dt \right| \le$$

$$\le 2\delta \left\| v^n - v^{n-1} \right\|_{\Omega^{t_2}_{1t_1}} \left\| \hat{w}^{n-1} \right\|_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} \|\tau\|_{\frac{10}{3},\Omega^{t_2}_{2t_1}} \le$$

$$\le \frac{\delta^2}{\beta} \left| v^n - v^{n-1} \right|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)} + c_{24} \left\| \hat{w}^{n-1} \right\|_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)},$$

откуда

$$\kappa_4 |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} \le \|\tau\|^2_{\Omega_2}\Big|_{t=t_1} + c_{25}\mu_2(t_1,t_2)|v|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)} + c_{26}\mu_3(t_1,t_2)\times$$

$$\times |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} + \frac{2\varepsilon^2}{\alpha} \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} + \frac{\delta^2}{\beta} \left| v^n - v^{n-1} \right|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)}, \qquad (60)$$

где

$$\kappa_4 = \min\left\{ \frac{1}{2}, \kappa_1, \frac{1}{2}\sigma'' \right\}, \quad \mu_2(t_1,t_2) = \left\| \nabla\theta^n \right\|_{\frac{5}{2},\Omega^{t_2}_{1t_1}},$$

$$\mu_3(t_1,t_2) = \left\| \nabla\theta^n \right\|_{\frac{5}{2},\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla\tau^n \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla\tau^{n-1} \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla u^n \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \hat{w}^n \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}}.$$

Полагая

$$\varepsilon^0 = \max\{\varepsilon, \delta\}, \qquad \alpha = 4(\nu_4\kappa_4)^{-1}(2\nu_4 + 4c_{17} + 5\kappa_4),$$

$$\beta = 4(\nu_4\kappa_4)^{-1}(\nu_4 + 2c_{17} + 3\kappa_4),$$

из оценок (59), (60) получаем

$$|v|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} \le \frac{1}{2} c_{27} \left(\|v\|^2_{\Omega_1} + \|\tau\|^2_{\Omega_2} \right)\Big|_{t=t_1} +$$

$$+ c_{28}\mu_4(t_1,t_2) \left[|v|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)} + |\tau|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} \right] +$$

$$+ \frac{\left(\varepsilon^0\right)^2}{2} \left[\left| v^n - v^{n-1} \right|^2_{\mathring{J}^{1,0}_2\left(\Omega^{t_2}_{1t_1}\right)} + \left| \tau^n - \tau^{n-1} \right|^2_{V^{1,0}_{2,0}\left(\Omega^{t_2}_{2t_1}\right)} \right], \qquad (61)$$

где t_1 и t_2 — произвольные точки из $[0, T]$, $t_1 < t_2$,

$$\mu_4(t_1,t_2) = \mu_1(t_1,t_2) + \left\| \nabla\theta^n \right\|_{\frac{5}{2},\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \hat{w}^{n-1} \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla\tau^n \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}} + \left\| \nabla\tau^{n-1} \right\|^2_{5,\Omega^{t_2}_{1t_1}}.$$

Разобьем отрезок $[0, T]$ на конечное число отрезков $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$; $t_0 = 0$, $t_k = T$, таких, что $c_{28}\mu_4(t_i, t_{i+1}) \le 1/2$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Это можно сделать, так как если $c_{28}\mu_4(0, T) > 1/2$, то, произведя дробление так, чтобы все $\mu_4(t_i, t_{i+1})$, кроме, может быть, последнего, были равны $(2c_{28})^{-1}$, получим

$$\frac{1}{2}(k-1) \le c_{28} \sum_{i=0}^{k-1} \mu_4(t_i, t_{i+1}) \le c_{28}\Bigg[k^{3/5}\Big(\|\hat{w}^{n-1}\|_{\frac{5}{2},\Omega_1^T} + \|\nabla\theta^n\|_{\frac{5}{2},\Omega_1^T} +$$

$$+ \|\hat{v}^n\|^2_{5,\Omega_1^T} + \|\hat{v}^{n-1}\|^2_{5,\Omega_1^T} + \|\nabla u^n\|^2_{5,\Omega_1^T} + \|\nabla\tau^n\|^2_{5,\Omega_1^T} + \|\nabla\tau^{n-1}\|^2_{5,\Omega_1^T} \Big) +$$

$$+ k^{7/20}\|w^{n-1}\|^2_{4,8,\Omega_1^T}\|\nabla\tau^{n-1}\|^2_{5,\Omega_1^T} + \|\tau^{n-1}\|^2_{6,2,\Omega_1^T} + k^{1/5}\varepsilon^{2(\gamma-1)}\times$$

$$\times\Big(\|\tau^n\|^{2\gamma}_{\frac{5\gamma}{2},\Omega_1^T} + \|\tau^{n-1}\|^{2\gamma}_{\frac{5\gamma}{2},\Omega_1^T} \Big) + k^{1/2}\max_{0\le t\le T}\Big(\|\tau^n\|_{\Omega_1}\|\nabla\tau^n\|_{\Omega_2^T} +$$

$$+ \|v^n\|^{7/5}_{\Omega_1}\|\hat{v}^n\|^{13/5}_{\frac{26}{5},\Omega_1^T} \Big) + k^{1/2}\|\overline{F}_1\|^2_{2,4,\Omega_1^T} \Bigg] \le$$

$$\le c_{29}\Bigg[k^{3/5}\sum_{j=n-1}^{n+1}\Bigg(\|\hat{v}^j\|^{\frac{4\gamma_1-1}{5\gamma_1}}_{\Omega_1^T}\|\hat{v}^j\|^{\frac{\gamma_1+1}{5\gamma_1}}_{2+2\gamma_1,\Omega_1^T} + \|\nabla\tau^j\|^{\frac{4\gamma_2-1}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\|\nabla\tau^j\|^{\frac{\gamma_2+1}{5\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T} +$$

$$+ \|\hat{v}^j\|^{\frac{2(2\gamma_1-3)}{5\gamma_1}}_{\Omega_1^T}\|\hat{v}^j\|^{\frac{6(\gamma_1+1)}{5\gamma_1}}_{2+2\gamma_1,\Omega_1^T} + \|\nabla\tau^j\|^{\frac{2(2\gamma_2-3)}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\|\nabla\tau^j\|^{\frac{6(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T} \Bigg) +$$

$$+ k^{3/5}\|\nabla u^n\|^{\frac{2(2\gamma_3-3)}{5\gamma_3}}_{\Omega_1^T}\|\nabla u^n\|^{\frac{6(\gamma_3+1)}{5\gamma_3}}_{2+2\gamma_3,\Omega_1^T} + k^{7/20}\sum_{j=n-1}^{n}\max_{0\le t\le T}\|v^j\|^{\frac{11}{10}}_{\Omega_1}\|\hat{v}^j\|^{\frac{5\gamma_1-4}{10\gamma_1}}_{\Omega_1^T}\times$$

$$\times\|\nabla\tau^{n-1}\|^{\frac{2(2\gamma_2-3)}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\|\nabla\tau^{n-1}\|^{\frac{6(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T} + \varepsilon^{2(\gamma-1)}k^{1/5}\sum_{j=n-1}^{n}\max_{0\le t\le T}\Bigg(\|\tau^j\|^{\frac{2(5\gamma-4)}{5}}_{\Omega_1}\times$$

$$\times\|\nabla\tau^j\|^{\frac{8}{5}}_{\Omega_2^T} + \|\tau^j\|^{\frac{4\gamma}{5}}_{\Omega_1}\|\nabla\tau^j\|^{\frac{2(4+4\gamma_2-3\gamma)}{5\gamma_2}}_{\Omega_1^T}\|\nabla\tau^j\|^{\frac{2(3\gamma-4)(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}}_{2+2\gamma_2,\Omega_1^T} \Bigg) + \|\nabla\tau^{n-1}\|^2_{\Omega_2^T} +$$

$$+ k^{1/2}\max_{0\le t\le T}\Bigg(\|\tau^n\|_{\Omega_1}\|\nabla\tau^n\|_{\Omega_2 T} + \|v^n\|^{\frac{7}{5}}_{\Omega_1}\|\hat{v}^n\|^{\frac{5\gamma_1-8}{5\gamma_1}}_{\Omega_1^T}\|\hat{v}^n\|^{\frac{8(\gamma_1+1)}{5\gamma_1}}_{2+2\gamma_1,\Omega_1^T} \Bigg) +$$

$$+ k^{1/2}\|\overline{F}_1\|^2_{2,4,\Omega_1^T} \Bigg] \le c_{30}k^{3/5}\varepsilon_0^{-8/5}M^4,$$

где $M = \max\{M_1, M_2, M_3, \|\overline{F}_1\|^2_{2,4,\Omega_1^T}\}$, $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon, \delta\}$ и, следовательно,

$$k \le C\varepsilon_0^{-4}M^{10}. \tag{62}$$

Таким образом, из неравенства (61) следует оценка

$$u_{i+1}^{n+1} \le \alpha u_i^{n+1} + (\varepsilon^0)^2 u_{i+1}^n, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1; \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{63}$$

где

$$u_{i+1}^{n+1} = \left|v^{n+1} - v^n\right|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_i}^{t_{i+1}}\right)} + \left|\tau^{n+1} - \tau^n\right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_i}^{t_{i+1}}\right)},$$

$$u_{i+1}^0 = \left|v^0\right|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_i}^{t_{i+1}}\right)} + \left|\tau^0\right|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_i}^{t_{i+1}}\right)}, \quad u_0^{n+1} = 0, \quad \alpha = c_{27}.$$

Из итерационного неравенства (63) вытекает, как известно [1, 7], оценка

$$u_i^{n+1} \le (\varepsilon^0)^{2(n+1)} \left[u_i^0 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\alpha^j}{j!}(n+1)(n+2)\dots(n+j)u_{i-j}^0 \right], \tag{64}$$

справедливая для всякого $i = 1, 2, \dots, k$ (для $i = 1$ суммы по j в квадратных скобках нет).

Из последнего неравенства (64) в силу (62) имеем оценку

$$\left|v^{n+1} - v^n\right|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + \left|\tau^{n+1} - \tau^n\right|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \le k \max_{1\le i\le k} u_i^{n+1} \le$$

$$\le k(\varepsilon^0)^{2(n+1)} \max_{1\le i\le k} u_i^0 \left[1 + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\alpha^j}{j!}(n+1)(n+2)\dots(n+j) \right] \le$$

$$\le c_{31}(\varepsilon^0)^{2(n+1)} k^2 (n+k)^k \left[\left|v^0\right|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + \left|\tau^0\right|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \right] \le$$

$$\le c_{32}\varepsilon_0^{-8}(\varepsilon^0)^{2(n+1)} M^{22} (n + C\varepsilon_0^{-4}M^{10})^{C\varepsilon_0^{-4}M^{10}}, \tag{65}$$

которая и доказывает сильную сходимость последовательностей v^n и τ^n в $\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_1^T)$ и $V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)$ соответственно. Из неравенств (57), (58) тогда следует, что последовательности q_{τ^n}, q_{v^n}, u^n сильно сходятся в

$$C^0\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\right), \; L_{\frac{8(2+5\gamma_1)}{3(4+5\gamma_1)}}(0, T; L_2(\Omega_1)) \cap L_{\frac{2(3+\alpha)}{5+\alpha}}\left(0, T; W_{2,0}^{(1)}(\Omega_1)\right)$$

и $\mathring{V}_2^2(\Omega_1^T)$ соответственно $(0 < \alpha \le 2\gamma_1 - 1)$.

Доказанная выше сильная сходимость последовательности (v^n, τ^n, q^n, u^n) вместе с ее слабой сходимостью позволяет упростить (по сравнению с [6, 7]) предельный переход в интегральных тождествах, соответствующих задаче (32) – (39).

Единственность полученного решения выводится от противного из оценок типа (61) – (63).

Теорема 2. *Если* $\overline{F}_1 \in L_{4,2}(\Omega_1^T)^3$, *то обобщенное решение задачи* (8) – (5) *является единственным.*

Замечания. 6. Поскольку (v^n, τ^n) сходится сильно в $C^0\left(0, T; \mathring{J}(\Omega_1)\right) \times \times C^0(0, T; L_2(\Omega_2))$ и

$$\mathring{J}(\Omega_1) - \lim_{t\to+0} v^n = v^0, \quad L_2(\Omega_2) - \lim_{t\to+0} \tau^n = \tau_0$$

[1, 6], то

$$\mathring{J}(\Omega_1) - \lim_{t\to+0} v = \mathring{v}, \quad L_2(\Omega_2) - \lim_{t\to+0} \tau = \tau_0.$$

7. Поскольку константы априорных оценок, выведенных при доказательстве теорем 1 и 2, не зависят от T, обе теоремы верны и в случае $T = \infty$.

5. В этом пункте исследуются вопросы непрерывной зависимости обобщенных решений задачи (8) – (15) от начальных условий и возмущений (данных задачи) и поведения решений при $t \to \infty$.

Теорема 3. *Обобщенное решение задачи* (8) – (15) *непрерывно зависит от данных задачи. А именно: если* $(v^{(1)}, \tau^{(1)}, q^{(1)}, u^{(1)})$, $(v^{(2)}, \tau^{(2)}, q^{(2)}, u^{(2)})$ *есть* *два решения задачи, удовлетворяющие условиям теорем* 1 *и* 2 *и отвечающие начальным данным* $(\mathring{v}^{(1)}, \tau_0^{(1)})$, $(\mathring{v}^{(2)}, \tau_0^{(2)})$ *и возмущениям* $\overline{F}^{(1)}, \overline{F}^{(2)}$, *то для*

$$v = v^{(1)} - v^{(2)}, \quad \tau = \tau^{(1)} - \tau^{(2)}, \quad q = q^{(1)} - q^{(2)}, \quad u = u^{(1)} - u^{(2)}$$

справедливы оценки

$$|v|^2_{J_2^{1,0}(\Omega_1^T)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_2^T)} \le c_1\Big(\|\mathring{v}\|^2_{\Omega_1} + \|\tau_0\|^2_{\Omega_2} + \|\overline{F}_1\|^2_{2,4,\Omega_1^T} +$$

$$+ \|F_2\|^2_{\frac{6}{5},2,\Omega_2^T} + \|\overline{F}_1\|^2_{p_1,\Omega_1^T} + \|F_2\|^2_{p_2,\Omega_2^T}\Big) \equiv W(\mathring{v}, \tau_0, \overline{F}), \tag{66}$$

$$\max_{0\le t\le T} \|\nabla q_\tau\|^2_{\Omega_1} \le W(\mathring{v}, \tau_0, \overline{F}), \quad \|\nabla q_F\|_{2,p,\Omega_1^T} \le \|\overline{F}_1\|^2_{2,p,\Omega_1^T}, \quad p > 1,$$

$$\|q_{v^{(1)}} - q_{v^{(2)}}\|^2_{2,\frac{8(5m-6)}{3(5m-2)},\Omega_1^T} \le c_2^{(m)} W(\mathring{v}, \tau_0, \overline{F}), \quad 2 \le m \le 2(\gamma_1 + 1), \tag{67}$$

$$\|\nabla(q_{v^{(1)}} - q_{v^{(2)}})\|^2_{2,\frac{2(s+3)}{s+5},\Omega_1^T} \le c_2^{(s)} W(\mathring{v}, \tau_0, \overline{F}), \quad 0 < s \le 2\gamma_1 - 1,$$

$$\|\nabla u\|^2_{\Omega_1^T} \le c_3 W(\mathring{v}, \tau_0, \overline{F}), \tag{68}$$

где

$$\overline{F} = \overline{F}^{(1)} - \overline{F}^{(2)}, \quad \mathring{v} = \mathring{v}^{(1)} - \mathring{v}^{(2)} \quad \tau_0 = \tau_0^{(1)} - \tau_0^{(2)}.$$

Доказательство. Исходя из равенств типа (53) – (56), которые отличаются от (53) – (56) наличием слагаемых, содержащих компоненты вектора $\overline{F}$, легко установить оценки, аналогичные (59) – (61):

$$\frac{\nu_4}{2}|v|^2_{J_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})} \le \|v\|^2_{\Omega_1}\Big|_{t=t_1} + c_4|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})} + c_5\Big\{ \mu_5(t_1, t_2)|v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})} +$$

$$+ |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})}\Big] + \|\overline{F}_1\|^2_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \|F_2\|^2_{\frac{6}{5},2,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \|\overline{F}_1\|^2_{p_1,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\Big\},$$

$$\kappa_4|\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})} \le \|\tau\|^2_{\Omega_2}\Big|_{t=t_1} + c_6\Big\{ \mu_6(t_1, t_2)|v|^2_{\mathring{J}_2^{1,0}(\Omega_{1t_1}^{t_2})} +$$

$$+ |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}(\Omega_{2t_1}^{t_2})}\Big] + \|F_2\|^2_{\frac{6}{5},2,\Omega_{2t_1}^{t_2}} + \|F_2\|^2_{p_2,\Omega_{2t_1}^{t_2}}\Big\},$$

где

$$\mu_5(t_1, t_2) = \sum_{j=1}^{2}\Big\{ \|\hat{v}^{(j)}\|^2_{\frac{5}{2},\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon\Big[\|\hat{v}^{(j)}\|^2_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon^{\gamma-1}\|\tau^{(j)}\|^{\gamma}_{\frac{5\gamma}{2},\Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \|\nabla u^{(j)}\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \|\nabla\tau^{(j)}\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \|v^{(j)}\|_{4,8,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\|\nabla\tau^{(j)}\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \|\nabla\tau^{(j)}\|_{\Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \max_{t_1\le t\le t_2}\|v^{(j)}\|^{7/10}_{\Omega_1}\|\hat{v}^{(j)}\|^{13/10}_{\frac{26}{5},\Omega_{1t_1}^{t_2}} +$$

$$+ \varepsilon\Big(\|\tau^{(j)}\|^2_{4,\frac{8}{3},\Omega_{2t_1}^{t_2}} + \|\hat{v}^{(j)}\|^2_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\Big) + \|F_1^{(j)}\|^2_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\Big]\Big\},$$

$$\mu_6(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{2}\left\{\left\|\nabla\tau^{(j)}\right\|_{\frac{5}{2},\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon\left[\left\|\nabla\tau^{(j)}\right\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|\nabla u^{(j)}\right\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\delta}{\varepsilon}\left\|\hat{v}^{(j)}\right\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon\left\|\nabla\tau^{(j)}\right\|^2_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\right]\right\},$$

откуда

$$|v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)} \le \frac{c_7}{2}\left(\|v\|^2_{\Omega_1} + \|\tau\|^2_{\Omega_2}\right)\Big|_{t=t_1} +$$
$$+ c_8\left\{\mu_7(t_1,t_2)\left[|v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_1}^{t_2}\right)}\right] + \left\|\overline{F}_1\right\|^2_{2,4,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \right.$$
$$\left. + \left\|F_2\right\|^2_{\frac{6}{5},2,\Omega_{2t_1}^{t_2}} + \left\|\overline{F}_1\right\|^2_{p_1,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \left\|F_2\right\|^2_{p_2,\Omega_{2t_1}^{t_2}}\right\}, \tag{69}$$

где

$$\mu_7(t_1,t_2) = \mu_5(t_1,t_2) + \sum_{j=1}^{2}\left(\left\|\nabla\tau^{(j)}\right\|_{\frac{5}{2},\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \delta\left\|v^{(j)}\right\|_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}} + \varepsilon^2\left\|\nabla\tau^{(j)}\right\|^2_{5,\Omega_{1t_1}^{t_2}}\right).$$

Проводя соответствующее разбиение отрезка $(0,T)$ на k отрезков типа (62), получаем

$$u_{i+1} \le \alpha u_i + v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{70}$$

где

$$u_{i+1} = |v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_{1t_1}^{t_2}\right)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_{2t_i}^{t_{i+1}}\right)}, \quad u_0 = \left\|\overset{\circ}{v}\right\|^2_{\Omega_1} + \|\tau_0\|^2_{\Omega_2}, \quad \alpha = c_7 > 1,$$

$$v_{i+1} = 2c_8\left(\left\|\overline{F}_1\right\|^2_{2,4,\Omega_{1t_i}^{t_{i+1}}} + \left\|F_2\right\|^2_{\frac{6}{5},2,\Omega_{2t_i}^{t_{i+1}}} + \left\|\overline{F}_1\right\|^2_{p_1,\Omega_{1t_i}^{t_{i+1}}} + \left\|F_2\right\|^2_{p_2,\Omega_{2t_i}^{t_{i+1}}}\right),$$

$$\frac{1}{2}(k-1) \le c_9\left\{k^{3/5}\left(\delta^{-1/5}M_2^{4/5} + \varepsilon^{-1/5}M_1^{4/5}\right) + \varepsilon\left[k^{4/5}\left(M_2^{2/5}\delta^{-3/5} + \right.\right.\right.$$
$$+ M_3^{2/5}\varepsilon^{-3/5} + M_1^{2/5}\varepsilon^{-3/5}\Big) + \varepsilon^{\gamma-1}k^{3/5}M_1^{(\gamma+4)/5}\varepsilon^{-(3\gamma-4)/5} +$$
$$+ k^{27/40}M_2^{4/5}\varepsilon^{-1/5}M_1^{2/5}\varepsilon^{-3/5} + k^{1/2}M_1 + k^{3/4}M_2^{6/5}\varepsilon^{-4/5}\Big] +$$
$$\left. + \varepsilon^2\left(k^{1/4}M_1^2 + k^{1/4}M_2^{4/5}\delta^{-6/5}\right) + \varepsilon k^{3/4}\left\|\overline{F}_1\right\|^2_{2,4,\Omega_1^T}\right\} \le$$
$$\le c_{10}M^{6/5}k^{4/5}\max\left\{\varepsilon^{-1/5}, \varepsilon^2\delta^{-6/5}\right\},$$

т. е. $k \le CM^6\varkappa$, $\varkappa = \max\left\{\varepsilon^{-1}, \varepsilon^{10}\delta^{-6}\right\}$.

Оценка (66) следует из (69). Действительно,

$$|v|^2_{\overset{\circ}{J}{}_2^{1,0}\left(\Omega_1^T\right)} + |\tau|^2_{V_{2,0}^{1,0}\left(\Omega_2^T\right)} \le \sum_{i=1}^{k-1}u_{i+1} \le \sum_{i=0}^{k-1}\left(\alpha^{i+1}u_0 + \sum_{l=1}^{i+1}\alpha^{i-l+1}v_l\right) \le$$
$$\le \frac{\alpha^{k-1}-\alpha}{\alpha-1}u_0 + k\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\max_{1\le l\le k}v_l,$$

откуда следует оценка (66) с константой

$$c_1 = CM^6 \varkappa \frac{c_7^{CM^6\varkappa} - 1}{c_7 - 1}.$$

Замечание 8. Оценка, характеризующая устойчивость обобщенных решений задачи (8) – (15), гораздо грубее, чем в двумерных и осесимметричных задачах, так как c_1, в отличие от соответствующей константы в [12], есть величина порядка ε^{-1}.

Теорема 4. *Если*

$$\int_0^\infty \|\overline{F}_i\|_{p_i,\Omega_i}^{\frac{4p}{7p-6}} dt < \infty, \quad 1 < p_i \le 2, \; i = 1, 2, \qquad \int_0^\infty \|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}^4 dt < \infty, \tag{71}$$

то обобщенное решение задачи (8) – (15) *асимптотически устойчиво, т. е.*

$$\lim_{t\to\infty} \|v\|_{\Omega_1} = \lim_{t\to\infty} \|\tau\|_{\Omega_2} = 0$$

для всяких $\mathring{v}$, τ_0, $\overline{F}$, *удовлетворяющих условиям теорем* 1 *и* 2. *Кроме того, если*

$$\overline{F}_1 \in L_{6/5,2}\left(\Omega_1^\infty\right)^3 \cap L_{2,4}\left(\Omega_1^\infty\right)^3, \quad F_2 \in L_{6/5,2}\left(\Omega_2^\infty\right),$$

то найдутся положительные константы C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *и* δ_0, *удовлетворяющие неравенству*

$$C_{\delta_0} \equiv C_0 - \delta_0^2 C_4 M_2^2 > 0, \quad C_0 = \min\{C_1, C_2\}, \quad \delta_0 \ge \delta, \tag{72}$$

для которых выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|v\|_{\Omega_2}^2 &\le E_1 \|\mathring{v}\|_{\Omega_1}^2 \left[e^{-C_1 t} + \delta^2 e^{-C_\delta t} P_{11}(\varepsilon, \delta, t)\right] + \\ &\quad + E_2 \|\tau_0\|_{\Omega_2}^2 e^{-C_\delta t} P_{1,2}(\varepsilon, \delta, t) + \Phi_1(\varepsilon, \delta, t, \overline{F}), \\ \|\tau\|_{\Omega_2}^2 &\le E_1 \|\tau_0\|_{\Omega_2}^2 \left[e^{-C_2 t} + \delta^2 e^{-C_\delta t} P_{21}(\varepsilon, \delta, t)\right] + \\ &\quad + \delta^2 E_3 \|\mathring{v}\|_{\Omega_1}^2 e^{-C_\delta t} + \Phi_2(\varepsilon, \delta, t, \overline{F}), \end{aligned} \tag{73}$$

где $E_i = E_i(\varepsilon, \delta, M)$, $E_i(0, 0, M) = 1$, $i = \overline{1, 5}$, $P_{ij}(\varepsilon, \delta, t)$ — *полином* j*-го порядка по* t *с коэффициентами, зависящими от* ε *и* δ, Φ_1 *и* Φ_2 *таковы, что*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \Phi_1(\varepsilon, \delta, t, \overline{F}) &= c_{11} E_4 \lim_{t\to\infty} \left(\|\overline{F}_1\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2 + \varepsilon^2 \|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}^4 + \|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2 \right), \\ \lim_{t\to\infty} \Phi_2(\varepsilon, \delta, t, \overline{F}) &= c_{12} E_5 \lim_{t\to\infty} \left[\|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2 + \delta^2 \left(\|\overline{F}_1\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2 + \varepsilon^2 \|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}^2 \right) \right], \end{aligned} \tag{74}$$

если пределы справа существуют.

Доказательство. Асимптотическая устойчивость (v, τ) следует из теоремы 1 (неравенств (44), (45) при $T = \infty$) и неравенства Пуанкаре:

$$\int_0^\infty \|v\|_{\Omega_1}^2 dt \le c_{13} \|\hat{v}\|_{\Omega_1^\infty}^2 < M_2 \tilde{c}_{13}, \quad \int_0^\infty \|\tau\|_{\Omega_2}^2 dt \le c_{14} \|\nabla\tau\|_{\Omega_2^\infty}^2 \le M_1 \tilde{c}_{14}.$$

В силу теоремы 1 v и τ удовлетворяют равенствам

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{\Omega_1} + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\Big[\nu_0(\varepsilon\tau)|\hat{v}|^2 + \delta^{2\gamma_n}|\hat{v}|^{2+2\gamma_1}\Big]dx = \int\limits_{\Omega_1}\Big\{-g\tau + \overline{F}_1 +$$

$$+ g\big[\tau - \varepsilon^{-1}F(\varepsilon\tau)\big] + \varepsilon\big[U(v,\tau) + V(u,\tau) - \tau\nabla q\big]\Big\}v\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\big\|\sigma^{1/2}\tau\big\|^2_{\Omega_2} + \int\limits_{\Omega_2}\kappa_0(\varepsilon\tau)|\nabla\tau|^2dx + \varepsilon^{2\gamma_2}\int\limits_{\Omega_1}|\nabla\tau|^{2+2\gamma_2}dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2}\Big[F_2 - \varepsilon\nabla u\cdot\nabla\tau + \delta|\hat{v}|^2\Big]\tau\,dx$$

при почти всех t из $[0,\infty)$.

Оценивая правые части этих равенств, в силу неравенств (21), (22), (25) получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2_{\Omega_1} + \frac{\nu_1}{2}\|\hat{v}\|^2_{\Omega_1} \le c_{15}\Big(\big\|\overline{F}_1\big\|_{\frac{6}{5},\Omega_1} + \|\tau\|_{\Omega_1} + \varepsilon^{\gamma}\|\tau\|^{\gamma+1}_{\frac{6(\gamma+1)}{5},\Omega_1}\Big)\|v\|_{6,\Omega_1} +$$

$$+ \varepsilon\Big[\big(\|\nabla u\|_{5,\Omega_1} + \|\nabla\tau\|_{5,\Omega_1}\big)\|\hat{v}\|_{\Omega_1}\|v\|_{\frac{10}{3},\Omega_1} + \Big(\|\tau\|_{\Omega_1} +$$

$$+ \big\|\overline{F}_1\big\|_{\Omega_1}\Big)\|\tau\|_{3,\Omega_1}\|v\|_{6,\Omega_1} + \|v\|^3_{4,\Omega_1}\|\nabla\tau\|_{4,\Omega_1}\Big]\Big\} \le$$

$$\le \frac{\nu_1}{2}\|\hat{v}\|^2_{\Omega_1} + c_{16}\Bigg[\|\tau\|^2_{\Omega_1} + \big\|\overline{F}_1\big\|^2_{\frac{6}{5},\Omega_1} + \varepsilon^{2\gamma}\Bigg(\|\tau\|_{\Omega_1}^{2\frac{m_2(2\gamma+7)-6(\gamma_2+1)}{5m_2-6}} \times$$

$$\times \|\nabla\tau\|_{\Omega_1}^{\frac{2(2+2\gamma_2-m_2)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)}}\|\nabla\tau\|_{2+2\gamma_2,\Omega_1}^{\frac{2(m_2-2)(\gamma_2+1)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)}} + \|\tau\|^{2\gamma}_{\Omega_2}\|\nabla\tau\|^2_{\Omega_2}\Bigg) +$$

$$+ \varepsilon^5\Big(\|\nabla u\|^5_{5,\Omega_1} + \|\nabla\tau\|^5_{5,\Omega_1}\Big) + \varepsilon^2\Big(\big\|\overline{F}_1\big\|^4_{\Omega_1} + \|\nabla\tau\|^2_{\Omega_2}\|\tau\|^2_{\Omega_2}\Big) +$$

$$+ \varepsilon^2\|v\|_{\Omega_1}^{\frac{3(7m_1-12)}{5m_1-6}}\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^{\frac{6(5\gamma_1+3)-(10\gamma_1+9)m_1}{\gamma_1(5m_1-6)}}\|\hat{v}\|_{2+2\gamma_1,\Omega_1}^{\frac{9(m_1-2)-(\gamma_1+1)m_1}{\gamma_1(5m_1-6)}}\|\nabla\tau\|^2_{4,\Omega_1}\Bigg],$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2_{\Omega_1} + c_{17}\|v\|^2_{\Omega_1} \le c_{18}\Big(\|\tau\|^2_{\Omega_2} + \big\|\overline{F}_1\big\|^2_{\frac{6}{5},\Omega_1} + \varepsilon^2\big\|\overline{F}_1\big\|^4_{\Omega_1}\Big) +$$

$$+ \alpha(t)\|v\|^2_{\Omega_1} + \beta_1(t)\|\tau\|^2_{\Omega_2},$$

где

$$\alpha(t) = c_{18}\Bigg[\varepsilon^5\Big(\|\nabla u\|^5_{5,\Omega_1} + \|\nabla\tau\|^5_{5,\Omega_1}\Big) + \varepsilon^2\|v\|_{\Omega_1}^{\frac{11m_1-24}{5m_1-6}}\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^{\frac{6(5\gamma_1+3)-(10\gamma_1+9)m_1}{\gamma_1(5m_1-6)}} \times$$

$$\times \|\hat{v}\|_{2+2\gamma_1,\Omega_1}^{\frac{9(m_1-2)(\gamma_1+1)}{\gamma_1(5m_1-6)}}\|\nabla\tau\|^2_{4,\Omega_1}\Bigg],$$

$$\beta_1(t) = c_{18}\left[\varepsilon^{2\gamma}\left(\|\tau\|_{\Omega_1}^{\frac{4[m_2(\gamma+1)-3\gamma]}{5m_2-6}}\|\nabla\tau\|_{\Omega_1}^{\frac{2(2+2\gamma_2-m_2)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\|\nabla\tau\|_{2+2\gamma_2,\Omega_1}^{\frac{2(m_2-2)(\gamma_2+1)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)}} + \|\tau\|_{\Omega_2}^{2(\gamma-1)}\|\nabla\tau\|_{\Omega_2}^2 + \varepsilon^2\|\nabla\tau\|_{\Omega_2}^2\right]\right],$$

$$\frac{24}{11} \le m_1 < \frac{6(5\gamma_1+3)}{10\gamma_1+9}, \quad \frac{3\gamma}{\gamma+1} \le m_2 \le 2+2\gamma_2.$$

аналогично имеем

$$\kappa_4\left(\frac{d}{dt}\|\tau\|_{\Omega_2}^2 + \|\nabla\tau\|_{\Omega_2}^2\right) \le c_{19}\left(\|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_2}\|\tau\|_{6,\Omega_2} + \varepsilon\|\nabla u\|_{5,\Omega_1}\times\right.$$

$$\left.\times\|\nabla\tau\|_{\Omega_2}^{8/5}\|\tau\|_{\Omega_2}^{2/5} + \delta\|\tau\|_{6,\Omega_2}\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^{1/2}\|v\|_{\Omega_1}^{3/2}\right) \le$$

$$\le \frac{\kappa_4}{2}\|\nabla\tau\|_{\Omega_2}^2 + c_{20}\left(\|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_2}^2 + \varepsilon^5\|\nabla u\|_{5,\Omega_1}^5\|\tau\|_{\Omega_2}^2 + \delta^2\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^2\|v\|_{\Omega_1}^2\right),$$

да

$$\frac{d}{dt}\|\tau\|_{\Omega_2}^2 + c_{21}\|\tau\|_{\Omega_2}^2 \le c_{22}\|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_2}^2 + \delta^2\omega(t)\|v\|_{\Omega_1}^2 + \beta_2(t)\|\tau\|_{\Omega_2}^2,$$

$\omega(t) = c_{22}\|\hat{v}\|_{\Omega_1}^2$, $\beta_2(t) = \max\{c_{18}, c_{22}\}\varepsilon^5\|\nabla u\|_{5,\Omega_1}^5$. Итак, получена сис- дифференциальных неравенств

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} + C_1(t)v \le C_3(t)u + f_1, \\ &\frac{du}{dt} + C_2(t)u \le \delta^2\omega(t)v + f_2, \end{aligned} \tag{75}$$

$v(t) = \|v\|_{\Omega_1}^2$, $u(t) = \|\tau\|_{\Omega_2}^2$, $C_1(t) = C_1 - \alpha(t)$, $C_2(t) = C_2 - \beta_2(t)$,

$$C_3(t) = C_3 + \beta_1(t) \quad (C_1 = c_{17},\ C_2 = c_{21},\ C_3 = c_{18},\ C_4 = C_3c_{22}),$$

$$f_1 = c_{18}\left(\|\overline{F}_1\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2 + \varepsilon^2\|\overline{F}_1\|_{\Omega_1}^4\right), \quad f_2 = c_{22}\|F_2\|_{\frac{6}{5},\Omega_1}^2.$$

дем обозначения

$$\varepsilon_1 = \delta^2\int_0^\infty \omega(t)\,dt, \quad \varepsilon_2 = \int_0^\infty \alpha(t)\,dt, \quad \varepsilon_j = \int_0^\infty \beta_{j-2}(t)\,dt, \quad j = 3, 4,$$

кажем, что ε_i существует. Действительно,

$$\varepsilon_1 \le \delta^2 c_{22}\|\hat{v}\|_{\Omega_1^\infty}^2 \le \delta_2 c_{22}M_2^2,$$

$$\varepsilon_4 \le \max\left\{1, \frac{c_{22}}{c_{18}}\right\}\varepsilon_2 \le c_{23}\left[\varepsilon^5\left(\|\nabla u\|_{\Omega_1^\infty}^{\frac{2\gamma_3-3}{5\gamma_3}}\|\nabla u\|_{2+2\gamma_3,\Omega_1^\infty}^{\frac{3(\gamma_3+1)}{5\gamma_3}} +\right.\right.$$

$$+ \|\nabla\tau\|_{\Omega_1^\infty}^{\frac{2\gamma_2-3}{5\gamma_2}} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma_1,\Omega_1^\infty}^{\frac{3(\gamma_2+1)}{5\gamma_2}} \Bigg) + \varepsilon^2 \max_{0\le t\le T} \|v\|_{\Omega_1}^{\frac{11m_1-24}{5m_1-6}} \|\hat{v}\|_{\Omega_1^\infty}^{\frac{6(5\gamma_1+3)-(10\gamma_1+9)m_1}{\gamma_1(5m_1-6)}} \times$$

$$\times \|\hat{v}\|_{2+2\gamma_1,\Omega_1^\infty}^{\frac{9(m_1-2)-(\gamma_1+1)}{\gamma_1(5m_1-6)}} \|\nabla\tau\|_{\Omega_1^\infty}^{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2}} \|\nabla\tau\|_{2+2\gamma_2,\Omega_1^\infty}^{\frac{\gamma_2+1}{\gamma_2}} \le$$

$$\le c_{23}\Big[\varepsilon^{22/5}\Big(M_1^{2/5}+M_3^{2/5}\Big)+\varepsilon\delta^{-3/5}M_1M_2^{7/5}\Big] \le c_{24}\varepsilon\delta^{-3/5}M^{12/5},$$

$$\varepsilon_3 \le c_{18}\Big(\varepsilon^{(24\gamma^2+2\gamma-8)/(15\gamma-8)}M_1^{(12\gamma^2+6\gamma-8)/(15\gamma-4)}+\varepsilon^{2\gamma}M_1^{2\gamma}+\varepsilon^2M_1^2\Big) \le c_{25},$$

если $m_1 = 12/5$, $m_2 = (3\gamma+1)/5$.

Здесь предполагается, что $\gamma \ge 4/3$, т. е. $m_2 \ge 2$ (случай $1\le\gamma\le 4/3$ проще и также приводит к аналогичной оценке). Такой выбор m_1 и m_2 обеспечивает интегрируемость $\alpha(t)$ и $\beta_1(t)$, так как выполняются соотношения

$$\frac{1}{2}+\frac{6(5\gamma_1+3)-(10\gamma_1+9)m_1}{2\gamma_1(5m_1-6)}+\frac{9(m_1-2)}{2\gamma_1(5m_1-6)} = 1 \quad \left(\frac{24}{11}\le\frac{12}{5}\le\frac{6(5\gamma_1+3)}{10\gamma_1+9}\right),$$

$$\frac{(2+2\gamma_2-m_2)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)}+\frac{(m_2-2)(3\gamma-2)}{\gamma_2(5m_2-6)} = 1 \quad \left(\frac{3\gamma}{\gamma+1}\le\frac{2}{5}(3\gamma+1)\le 2+2\gamma_2\right).$$

Из неравенств (75) и оценки (72) $(C_0-\varepsilon_1C_3>0)$, как и в [12], получаем неравенства (73):

$$u(t) \le u(0)e^{\varepsilon_2-C_2t}+\varepsilon_1e^{\varepsilon_2}\Big\{e^{\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3}\Big(C_3te^{-C_\delta t}+e^{-C_\delta t}\varepsilon_1\varepsilon_3\Big)u(0)+$$

$$+e^{-C_\delta t}\Big[1+(1+\varepsilon_1\varepsilon_3)e^{\varepsilon_1\varepsilon_4}\Big]v(0)\Big\}+e^{-C_2t+\varepsilon_4}\int_0^t f_2(\xi)e^{C_2\xi}\,d\xi+$$

$$+e^{\varepsilon_2}\varepsilon_1\Bigg[e^{\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3}\Bigg(\varepsilon_3+\frac{C_3}{C_2-C_0+\varepsilon_1C_3}e^{-C_\delta t}\int_0^t f_2(\xi)e^{C_\delta t}\,d\xi+$$

$$+e^{-C_0t}\int_0^t f_1(\xi)e^{C_0\xi}\,d\xi+e^{\varepsilon_1\varepsilon_3}(C_3+\varepsilon_1\varepsilon_3)e^{-C_\delta t}\int_0^t f_1(\xi)e^{C_\delta\xi}\,d\xi\Bigg],$$

$$v(t) \le e^{\varepsilon_2}v(0)\Big\{e^{-C_1t}+\varepsilon_1e^{-C_\delta t}\Big[C_3\Big(1+e^{\varepsilon_2}(1+\varepsilon_1\varepsilon_3)e^{\varepsilon_1\varepsilon_3}\Big)t+$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_3\Big(1+e^{\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3}(1+\varepsilon_1\varepsilon_3)\Big)\Big]\Big\}+e^{\varepsilon_2+\varepsilon_4}u(0)\Big\{(C_3t+\varepsilon_3)e^{-C_0t}+$$

$$+\varepsilon_1e^{\varepsilon_2+\varepsilon_1\varepsilon_3}e^{-C_\delta t}\Big[C_3^2t^2+\varepsilon_3C_3t+\varepsilon_3C_3/(C_2-C_\delta)+\varepsilon_3^2\Big]\Big\}+$$

$$+e^{\varepsilon_2}e^{-C_1t}\int_0^t f_1(\xi)e^{C_1\xi}d\xi+\varepsilon_1C_3e^{-C_1t}\int_0^t e^{(C_1-C_0)\xi}\int_0^\xi f_1(\sigma)e^{C_0\sigma}\,d\sigma\,d\xi+$$

$$+\varepsilon_1\varepsilon_3e^{-C_0t}\int_0^t f_1(\xi)e^{C_0\xi}\,d\xi+\varepsilon_1\varepsilon_3(1+\varepsilon_1)e^{2\varepsilon_2+\varepsilon_4+\varepsilon_1\varepsilon_3}\times$$

$$\times \left[C_3 e^{-C_1 t} \int_0^t e^{(C_1 - C_\delta)\xi} \int_0^\xi f_1(\sigma) e^{C_\delta \sigma}\, d\sigma\, d\xi + \varepsilon_3 e^{-C_\delta t} \int_0^t f_1(\xi) e^{-C_\delta \xi}\, d\xi \right]\Bigg\} +$$

$$+ e^{\varepsilon_2 + \varepsilon_4} \Bigg\{ C_3 e^{-C_1 t} \int_0^t e^{(C_1 - C_2)\xi} \int_0^\xi f_2(\sigma) e^{C_2 \sigma}\, d\sigma\, d\xi + \varepsilon_3 e^{-C_0 t} \int_0^t f_2(\xi) e^{C_0 \xi}\, d\xi +$$

$$+ \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3} \left(\varepsilon_3 + \frac{C_3}{C_2 - C_\delta} \right) \Bigg[C_3 e^{-C_1 t} \int_0^t e^{(C_1 - C_\delta)t} \int_0^\xi f_2(\sigma) e^{C_2 \sigma}\, d\sigma\, d\xi +$$

$$+ \varepsilon_3 e^{-C_\delta t} \int_0^t f_2(\xi) e^{C_\delta \xi}\, d\xi.$$

Из неравенств (73) при условии, что пределы в правых частях существуют, следуют оценки (74).

Замечание 9. Оценки (73), (74) грубее аналогичных оценок в [12], поскольку $E_1 = e^{\varepsilon_2}$, а ε_2 есть величина порядка $\varepsilon \delta^{-3/5} M^{12/5}$.

Кроме того, свойство экспоненциальной устойчивости, как и в [12], имеет лишь нулевое (соленоидальное) приближение скорости v_ε.

11. *Мосеенков В. Б.* Трехмерная начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. I. Разрешимость в целом // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 524–536.
12. *Мосеенков В. Б.* Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. I. Однозначная разрешимость в целом // Там же. – 1990. – **42**, № 12. – С. 1664–1672.
13. *Мосеенков В. Б.* Начально-краевая задача конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости при наличии осевой симметрии. II. Устойчивость обобщенных решений // Там же. – 1991. – **43**, № 1. – С. 99–105.

Получено 04.12.92