УДК 519.41/47

В. А. Онищук, канд. физ.-мат. наук,
Я. П. Сысак, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГРУППЫ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИЕ СЛАБОМУ УСЛОВИЮ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ДВУСТУПЕННО РАЗРЕШИМЫХ ПОДГРУПП

Non-Abelian solvable and radical groups satisfying the weak minimality condition for solvable subgroups of derived lentgh two are studied. It is shown that such groups are minimax ones. For locally solvable groups, an analogous statement is not true. We also give an example of a solvable group of derived length three that satisfies the weak minimality condition for subgroups of derived length three but is not a minimax group.

Вивчаються неабелеві розв'язні і радикальні групи зі слабкою умовою мінімальності для двоступенево розв'язних підгруп. Доведено, що такі групи мінімаксні. Відмічається, що для локально розв'язних груп аналогічний результат не вірний. Наведено приклад розв'язної групи ступеня 3, яка задовольняє слабку умову мінімальності для підгруп ступеня розв'язності 3 і не являється мінімаксною групою.

Группы, удовлетворяющие условию минимальности для разрешимых подгрупп одной и той ступени разрешимости s (т. е. не содержащие бесконечных убывающих цепей разрешимых подгрупп ступени s), изучались Д. И. Зайцевым [1]. Им было установлено, что радикальные (в смысле Б. И. Плоткина) и локально разрешимые группы с таким условием являются черниковскими [1, 2]. В работе [3] Д. И. Зайцев доказал, что разрешимые и радикальные группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для абелевых подгрупп (разрешимых групп ступени разрешимости $s = 1$), минимаксны, т. е. имеют конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности или максимальности для подгрупп. В работе [4] Д. И. Зайцев рассматривал неабелевы группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп и доказал, что неабелевы локально почти разрешимые группы с указанным свойством минимаксны.

В связи с этими результатами представляет интерес изучение групп, удовлетворяющих слабому условию минимальности для разрешимых подгрупп ступени s, т. е. групп, не содержащих бесконечных убывающих цепей разрешимых подгрупп ступени s, в которых все соседние индексы бесконечны. В настоящей работе рассматриваются разрешимые и радикальные группы со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп (неабелевых групп ступени разрешимости $s = 2$). Показано, что такие группы минимаксны (теоремы 1 и 2). Заметим, что для произвольных локально разрешимых групп аналогичные результаты не имеют места (замечание к теореме 2).

Прежде чем перейти к доказательству теорем, отметим следующее очевидное утверждение, которое в работе используется постоянно и без специальных оговорок: если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то всякая ее неабелева подгруппа также имеет это свойство.

Лемма 1. *Если двуступенно разрешимая группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна.*

Доказательство. Так как каждая неабелева подгруппа в G двуступенно разрешима, то группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп. Но тогда группа G минимаксна по теореме Д. И. Зайцева [4]. Лемма доказана.

Ниже нам потребуется следующее понятие, введенное Д. И. Зайцевым [5]. Будем говорить, что группа G имеет показатель минимальности m, если для любой конечной цепочки подгрупп $G_1 > G_2 > \ldots > G_{k-1} > G_k$ группы G такой, что индексы $|G_1 : G_2|, \ldots, |G_{k-1} : G_k|, |G_k : 1|$ бесконечны, выполняется неравенство $k \le m$ и хотя бы для одной из таких цепочек выполняется равенство $k = m$. Показатель минимальности группы G обозначаем через $m(G)$. Для конечной группы полагаем $m(G) = 0$. Если для некоторой группы G в качестве $m(G)$ нельзя взять никакое натуральное число, то будем говорить, что G имеет бесконечный показатель минимальности $(m(G) = \infty)$.

Лемма 1. *Пусть $G = AM$, где A — двуступенно нильпотентная нормальная подгруппа, и M — максимальная абелева подгруппа группы G. Если каждая двуступенно разрешимая подгруппа группы G минимаксна, то группа G также минимаксна.*

Доказательство. Так как подгруппа A является двуступенно разрешимой, то по условию леммы она минимаксна.

Предположим, что группа G не минимаксна. Кроме того, возьмем такую группу G, чтобы показатель минимальности $m(A)$ подгруппы A был наименьшим из возможных. Ясно, что центр $Z(A)$ подгруппы A является нормальным делителем группы G. Рассмотрим группу $H = Z(A)M$. Если группа H неабелева, то она двуступенно разрешима и по предположению леммы минимаксна. Но тогда и подгруппа M минимаксна. В силу того, что $G = AM$, получаем, что группа G минимаксна. Полученное противоречие доказывает, что H — абелева группа. Тогда $H = M$ и $Z(A) \le M \cap A$. Отсюда следует, что пересечение $M \cap A$ является нормальным делителем подгруппы A, а значит, и группы G.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G / M \cap A$. Группа $\overline{G}$ имеет вид $\overline{G} = \overline{A} \leftthreetimes \overline{M}$, где $\overline{A} = A / M \cap A$ и $\overline{M} = M / M \cap A$. Пусть $\overline{X} = C_{\overline{G}}(\overline{A})$ — централизатор подгруппы $\overline{A}$ в группе $\overline{G}$. Подгруппа $\overline{X}$ абелева и имеет вид $\overline{X} = \overline{A} \times C_{\overline{M}}(\overline{A})$. Поэтому $A \le X$ и X — двуступенно разрешимая подгруппа группы G. По предположению леммы подгруппа X минимаксна. Но тогда и подгруппа $\overline{X}$ минимаксна. Так как $\overline{X} = \overline{A} \times C_{\overline{M}}(\overline{A})$, то централизатор $C_{\overline{M}}(\overline{A})$ также являтся минимаксной подгруппой.

Покажем теперь, что каждая неединичная нормальная подгруппа группы $\overline{G}$, содержащаяся в подгруппе $\overline{A}$, имеет в $\overline{A}$ конечный индекс. Пусть $\overline{A}_1$ — нормальный делитель в группе G и индекс $|\overline{A} : \overline{A}_1|$ бесконечный. В силу результатов работы [5] выполняется неравенство $m(\overline{A}_1) < m(\overline{A})$, а значит, и неравенство $m(A_1) < m(A)$. Рассмотрим подгруппу $A_1 M$. Она либо двуступенно разрешима, либо удовлетворяет всем условиям леммы. В силу выбора группы G подгруппа $A_1 M$ является минимаксной группой. Поэтому подгруппа M минимаксна. Так как $G = AM$, то G также минимаксна. Противоречие. Таким образом, индекс $|\overline{A} : \overline{A}_1|$ конечен. Итак, в подгруппе $\overline{A}$ каждая неединичная инвариантная относительно $\overline{M}$ подгруппа имеет конечный индекс. Следовательно, подгруппа $\overline{A}$ либо периодическая, либо группа без кручения. Так как $\overline{A}$ минимаксна, то в первом случае она конечна и потому фактор-группа $\overline{M} / C_{\overline{M}}(\overline{A})$ конечна. Пусть $\overline{A}$ — подгруппа без кручения. Тогда $\overline{A}$ рационально неприводима относительно $\overline{M}$ и потому по теореме Бэра [6] фактор-группа $\overline{M} / C_{\overline{M}}(\overline{A})$ конечно порождена. Так как централизатор $C_{\overline{M}}(\overline{A})$ является минимаксной группой, то отсюда следует, что подгруппа $\overline{M}$ минимаксна. Поэтому и подгруппа M минимаксна. Следовательно, G также минимаксна. Снова противоречие. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — неабелева разрешимая группа. Если группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна.*

Доказательство. Пусть A — максимальная среди нормальных подгрупп группы G, коммутант A' которых содержится в их центре $Z(A)$. Тогда по теореме Д. М. Смирнова [7] $C_G(A) = Z(A)$. Ясно, что подгруппа A либо абелева, либо двуступенно нильпотентна.

Если подгруппа A абелева, то ее централизатор $C_G(A)$ совпадает с A. Следовательно, A — максимальная абелева подгруппа. Возьмем $g \in G \setminus A$. Тогда $A\langle g \rangle$ — неабелева двуступенно разрешимая подгруппа. В силу леммы 1 подгруппа $A\langle g \rangle$ минимаксна. Поэтому и подгруппа A минимаксна.

Предположим, что M — максимальная абелева подгруппа в группе G, отличная от A. Тогда MA — двуступенно разрешимая подгруппа. По лемме 1 подгруппа MA минимаксна. Значит, и подгруппа M минимаксна. Так как каждая абелева подгруппа в группе G минимаксна, то по теореме Д. И. Зайцева [3] группа G минимаксна.

Если подгруппа A двуступенно нильпотентна, то в силу леммы 1 она минимаксна. Для произвольной максимальной абелевой подгруппы M группы G подгруппа MA удовлетворяет условию леммы 2. Согласно этой лемме подгруппа M минимаксна. Таким образом, каждая абелева подгруппа в группе G является минимаксной. По теореме Д. И. Зайцева [3] группа G минимаксна. Теорема доказана.

Лемма 3. *Если неабелева гиперцентральная группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна.*

Доказательство. Известно, что в гиперцентральной группе G каждая максимальная нормальная абелева подгруппа A совпадает со своим централизатором: $A = C_G(A)$.

Рассмотрим $g \in G \setminus A$. Тогда $A\langle g \rangle$ — двуступенно разрешимая подгруппа и удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп. По лемме 1 подгруппа $A\langle g \rangle$ минимаксна. Но тогда и подгруппа A минимаксна. Если M — произвольная максимальная абелева подгруппа в группе G, отличная от A, то MA — двуступенно разрешимая подгруппа. Так как подгруппа MA удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то в силу леммы 1 она минимаксна. Следовательно, и подгруппа M минимаксна. Таким образом, в группе G каждая абелева подгруппа минимаксна. По теореме Д. И. Зайцева [3] группа G минимаксна. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — неабелева локально нильпотентная группа. Если каждая двуступенно разрешимая подгруппа группы G минимаксна, то центр $Z(G)$ отличен от единицы.*

Доказательство. Ясно, что группа G имеет конечно порожденную двуступенно разрешимую подгруппу F. Рассмотрим централизатор $C_G(F)$ подгруппы F в группе G. Пусть A — произвольная абелева подгруппа из централизатора $C_G(F)$. Ясно, что тогда подгруппа AF двуступенно разрешима. По предположению леммы подгруппа AF минимаксна. Следовательно, каждая абелева подгруппа из централизатора $C_G(F)$ минимаксна. Согласно теореме Д. И. Зайцева [3] централизатор $C_G(F)$ является минимаксной группой. В силу теоремы 2 работы [8] центр $Z(G)$ группы G отличен от единицы. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если неабелева локально нильпотентная группа G удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна.*

Доказательство. Обозначим через X последний член верхнего центрального ряда группы G. Тогда X — гиперцентральная группа, удовлетворяющая слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, и следовательно, ввиду леммы 3 она абелева, либо минимаксна. В частности, подгруппа X разрешима.

Если H/X — произвольная двуступенно разрешимая подгруппа из фактор-группы G/X, то H — неабелева разрешимая подгруппа, которая согласно теореме 1 минимаксна. Следовательно, фактор-группа H/X является минимаксной группой. Так как в фактор-группе G/X каждая двуступенно разрешимая подгруппа минимаксна, то в силу леммы 4 центр $Z(G/X)$ отличен от единицы. Получили противоречие с выбором подгруппы X. Поэтому $G=X$ и G — гиперцентральная группа. Тогда по лемме 3 G является минимаксной группой. Лемма доказана.

Напомним определение радикальной группы, введенное Б. И. Плоткиным [9, с. 366]. Группа G называется радикальной, если она имет возрастающий нормальный ряд с локально нильпотентными факторами.

Теорема 2. *Неабелева радикальная группа G, удовлетворяющая слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, минимаксна.*

Доказательство. Пусть N — локально нильпотентный радикал группы G. По теореме Б. И. Плоткина [9, с. 374] $C_G(N) \leq N$. Покажем, что N — минимаксная группа.

Если подгруппа N неабелева, то она минимаксна в силу леммы 5. Предположим, что подгруппа N абелева. Тогда $C_G(N)=N$. Если $g \in G \setminus N$, то подгруппа $N\langle g \rangle$ двуступенно разрешима. Так как подгруппа $N\langle g \rangle$ удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то она минимаксна в силу леммы 1. Следовательно, подгруппа N минимаксна и, в частности, разрешима.

Рассмотрим теперь произвольную максимальную абелеву подгруппу M в группе G. Если $M \leq N$, то по доказанному выше подгруппа M минимаксна. Если M не содержится в N, то тогда MN — неабелева разрешимая подгруппа. Так как подгруппа MN удовлетворяет слабому условию минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп, то в силу теоремы 1 она минимаксна. Следовательно, подгруппа M минимаксна. Таким образом, в группе G каждая абелева подгруппа минимаксна. По теореме Д. И. Зайцева [3] группа G минимаксна. Теорема доказана.

Замечание. В работе [2] доказано, что если G — локально разрешимая группа, не являющаяся разрешимой, ступени меньше s и G удовлетворяет условию минимальности для разрешимых подгрупп точно ступени s, то G черниковская. В связи с этим и ввиду теоремы 1 возникает следующий вопрос: будет ли локально разрешимая группа со слабым условием минимальности для двуступенно разрешимых подгрупп минимаксной? Отрицательный ответ на этот вопрос дает пример локально полициклической группы без кручения бесконечного ранга, у которой все разрешимые подгруппы полициклические, построенный Ю. И. Мерзляковым ([10], пример 25.3.1).

В заключение приведем пример разрешимой группы ступени 3, удовлетворяющей слабому условию минимальности для разрешимых подгрупп ступени 3 и не являющейся минимаксной группой.

Пример. Пусть F — поле из p элементов, $A = \langle a_i \mid a_i = a_{i+1}^p,\ i \in \mathbb{Z} \rangle$ —

мультипликативно записанная группа p-ичных дробей, x — автоморфизм группы A, задаваемый правилом $a_i^x = a_{i+1}$, и $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$ — полупрямое произведение группы A с циклической подгруппой $\langle x \rangle$. Согласно [11, пример 4.5] существует бесконечномерный точный неприводимый FG-модуль V, имеющий следующие свойства: 1) для каждого $i \in \mathbb{Z}$ модуль V содержит FA-подмодуль U_i, изоморфный FA-модулю $FA/(a_i - 1)FA$; 2) $U_{i+1} \leq U_i$; 3) $U_i x = U_{i+1}$; 4) $V = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}} U_i$.

Полупрямое произведение $X = V \leftthreetimes G$ является разрешимой группой ступени 3 и, очевидно, не является минимаксной группой. Покажем, что группа X удовлетворяет слабому условию минимальности для разрешимых подгрупп точно ступени 3. Очевидно, для этого достаточно показать, что каждая такая подгруппа имеет в группе X конечный индекс.

Если Y — подгруппа ступени разрешимости 3 группы X, то $Y \cap V \neq 1$ и фактор-группа $YV/V \simeq Y/Y \cap V$ неабелева. Так как $YV = V \leftthreetimes (G \cap YV)$, то пересечение $G \cap YV$ — неабелева подгруппа в G. Легко видеть, что в группе G каждая неабелева подгруппа H имеет вид $H = A^m \leftthreetimes \langle x^n \rangle$ для некоторых натуральных чисел m и n. В частности, H имеет конечный индекс в G. Поэтому, чтобы доказать, что Y имеет конечный индекс в X, остается показать, что каждая такая подгруппа H действует на V неприводимо.

Действительно, пусть $v \in V \setminus \{0\}$. Тогда в силу свойства 4 $v \in U_r$ для некоторого $r \in \mathbb{Z}$. Пусть u_r — элемент из U_r, отвечающий элементу $1 + (a_r - 1)FA$ из FA-модуля $FA/(a_r - 1)FA$. Тогда $U_r = u_r FA$ и, так как $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} \langle a_r \rangle^{x^i}$, то существует такое $s \geq r$, что $v \in u_r F\langle a_s \rangle$. Учитывая, что $\langle a_s \rangle / \langle a_r \rangle$ — циклическая p-группа, отсюда получаем $vFA \geq u_s FA = U_s$. Далее, так как $A/\langle a_r \rangle$ — квазициклическая p-группа, то $A = A^m \langle a_r \rangle$, откуда $FA = FA^m + (a_r - 1)FA$. Поэтому в силу свойства 1 $vFA = vFA^m + v(a_r - 1)FA = vFA^m$. Следовательно, $vFA^m \geq U_s$ и, таким образом, в силу свойства 3 $vFH \geq U_s \langle x^n \rangle = V$. Итак, V — неприводимый FH-модуль. Последнее влечет, что $Y \cap V = V$, откуда $Y = V \leftthreetimes (G \cap Y)$ — подгруппа конечного индекса в X. Следовательно, X — искомая группа.

1. *Зайцев Д. И.* Устойчиво разрешимые группы // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1969. – **33**, № 4. – С. 765–780.
2. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР.– 1974. – **214**, № 6. – С. 1250–1253.
3. *Зайцев Д. И.* О группах, удовлетворяющих слабому условию минимальности // Мат. сб. – 1969. – **78**, № 3. – С. 323–331.
4. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых подгрупп // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 661–665.
5. *Зайцев Д. И.* Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Там же. – 1968. – **20**, № 4. – С. 472–482.
6. *Baer R.* Polyminimaxgruppen // Math. Ann. – 1968. – **175**, № 1. – S. 1–43.
7. *Смирнов Д. М.* Об одном классе бесконечных групп // Учен. зап. Иванов. пед. ин-та. – 1954. – № 5. – С. 57–60.
8. *Зайцев Д. И., Онищук В. А.* О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлетворяющим условию конечности // Укр. мат. журн – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 1084–1087.
9. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. – М.: Наука, 1966. – 604 с.
10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
11. *Wehrfritz B. A. F.* Groups whose irreducible representations have finite degree // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1981. – **90**, № 3. – P. 411–421.

Получено 28.11.91