УДК 517.968

С. В. Переверзев, д-р физ.-мат. наук,
М. Аскаров, соискат. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМАЛЬНАЯ СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ АППРОКСИМАЦИОННО-ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА В ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Classes of Fredholm equations with integral operators acting into spaces of periodic analytic functions are considered. For these classes, we find the exact order of optimal convergence rates for some versions of the projective-iteration method and the KR-method.

Розглядаються класи рівнянь Фредгольма з інтегральними операторами, що діють у простори періодичних аналітичних функцій. Для вказаних класів знайдено точний порядок оптимальної швидкості збіжності деяких варіантів проекційно-ітеративного та KP-методів.

1. Интегральные уравнения Фредгольма II рода в пространствах периодических аналитических функций возникают при использовании метода граничных интегральных уравнений при решении краевых задач в областях, ограниченных замкнутыми аналитическими кривыми. Поясним это на примере задачи Дирихле для уравнения Лапласа.

Пусть плоская область G ограничена замкнутой кривой ∂G, заданной посредством параметрических уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, в которых функции $x(t)$, $y(t)$ являются аналитическими. Замкнутость кривой ∂G означает, что $x(0) = x(2\pi)$ и $y(0) = y(2\pi)$, т. е. $x(t)$ и $y(t)$ — 2π-периодические аналитические функции. Будем также считать, что при обходе границы ∂G в положительном направлении (при возрастании параметра t) область G остается слева и при $t \in [0, 2\pi]$ $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$. Последнее условие означает, что в каждой точке кривой ∂G существует непрерывная касательная.

Известно [1], что если при сделанных выше предположениях искать решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad u\big|_{(x,y)\in\partial G} = g$$

в виде потенциала двойного слоя

$$u(x, y) = \int_0^{2\pi} \frac{y'(t)[x(t) - x] - x'(t)[y(t) - y]}{[x - x(t)]^2 + [y - y(t)]^2} z(t)\,dt,$$

то неизвестная плотность потенциала $z(t)$ определяется из следующего граничного интегрального уравнения Фредгольма:

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^{2\pi} H(t, \tau) z(\tau)\,d\tau + f(t), \tag{1}$$

где $f(t) = \pi^{-1} g(x(t), y(t))$, а

$$H(t, \tau) = \begin{cases} \pi^{-1} \dfrac{x'(\tau)[y(\tau) - y(t)] - y'(\tau)[x(\tau) - x(t)]}{[y(\tau) - y(t)]^2 + [x(\tau) - x(t)]^2}, & t \neq \tau, \\[2ex] (2\pi)^{-1} \dfrac{x''(\tau) y'(\tau) - y''(\tau) x'(\tau)}{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2}, & t = \tau. \end{cases}$$

Из результатов работы [2] следует, что если функции $x(t)$, $y(t)$ из параметрического представления границы ∂G являются периодическими и аналитическими, то ядро $H(t,\tau)$ — периодическая аналитическая функция двух переменных, а интегральный оператор H из (1) действует в пространство периодических аналитических функций.

Говоря о пространстве периодических аналитических функций, естественно думать о пространстве 2π-периодических функций, допускающих аналитическое продолжение в некоторую полосу $\sigma_h = \{z = t + i\tau,\ \tau \in (-h, h),\ \tau \in \in (-\infty, \infty)\}$ комплексной плоскости шириной $2h$. Перейдем к формальным определениям.

Пусть L_2 — пространство функций $f(t)$, суммируемых в квадрате на $(0, 2\pi)$ с обычной нормой $\|f\|$; $\mathcal{A}_2^h$ — пространство непрерывных 2π-периодических функций $f(t)$, допускающих аналитическое продолжение в полосу σ_h. Норма в $\mathcal{A}_2^h$ определяется соотношением $\|f\|_{\mathcal{A}_2^h} = \|f\| + \|A^h f\|$, где A^h — оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in \mathcal{A}_2^h$ элемент вида

$$A^h f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch}(kh)(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt),$$

$\operatorname{ch}(u)$ — гиперболический косинус, а $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f(t)$ по тригонометрической системе. Известно [3, с. 186], что оператор A^h является непрерывным линейным оператором из $\mathcal{A}_2^h$ в L_2. Кроме того, для любой функции $f \in \mathcal{A}_2^h$ справедливо представление

$$f(t) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi}\Phi_h(t-\tau)f_h(\tau)d\tau, \tag{2}$$

где $f_h \in L_2$, а

$$\Phi_h(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos ku}{\operatorname{ch}(ku)}.$$

Обозначим через $\mathcal{H}_a^h = \mathcal{H}_a^h(\beta)$ класс интегральных операторов Фредгольма вида

$$Hz(t) = \int_0^{2\pi}H(t,\tau)z(\tau)d\tau \tag{3}$$

таких, что H и H^* являются линейными непрерывными операторами из L_2 в $\mathcal{A}_2^h$ и выполняются следующие условия:

$$\|(I-H)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \beta_1,\quad \|H\|_{L_2\to\mathcal{A}_2^h} \le \beta_2,\quad \left\|\left(A^h, H\right)^*\right\|_{L_2\to\mathcal{A}_2^h} \le \beta_3, \tag{4}$$

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Класс уравнений Фредгольма вида (1) с операторами $H \in \mathcal{H}_a^h$ и свободными членами $f(t)$ из единичного шара в L_2 будем обозначать через $\Psi_a^h = \Psi_a^{-h}(\beta)$. Отметим, что для принадлежности операторов (3) классу $\mathcal{H}_a^h$ достаточно, чтобы резольвенты этих операторов были ограничены (первое условие (4)), а ядра являлись по каждой переменной периодическими функциями, допускающими аналитическое продолжение в полосу σ_h. Таким образом, как следует из сказанного выше, классы Ψ_a^{-h}, $0 < h < \infty$, содержат граничные интегральные уравнения (1), возникающие при решении краевых задач в областях, ограниченных аналитическими замкнутыми кривыми.

2. В последнее время для решения линейных интегральных уравнений (1) широко используются так называемые аппроксимационно-итеративные методы. Наиболее известными методами указанного типа являются проекционно-итеративный метод (ПИ-метод) [4] и КР-метод [5]. ПИ-метод является обобщением метода осреднения функциональных поправок, предложенного Ю. Д. Соколовым. Этот метод получил свое развитие в работах А. Ю. Лучки, Н. С. Курпеля, их учеников и последователей. Применительно к уравнениям (1), рассматриваемых в гильбертовом пространстве L_2, суть ПИ-метода состоит в следующем. Пусть F_N — подпространство L_2, $\dim F_N = N$, P — проектор из L_2 на F_N, а $z_k(t)$ — приближенное решение (1), полученное на k-й итерации. Тогда

$$z_{k+1} = f + H(z_k + \delta_{k,N}), \tag{5}$$

где поправка $\delta_{k,N}$ определяется из уравнения с конечномерным оператором

$$\delta_{k,N} = PH\delta_{k,N} + P(f + Hz_k - z_k). \tag{6}$$

Суть КР-метода состоит в том, что

$$z_{k+1} = z_{k+1/2} + \omega_{k,N}, \tag{7}$$

где

$$z_{k+1/2} = Hz_k + f, \quad \omega_{k,N} = PH\omega_{k,N} + PH(z_{k+1/2} - z_k). \tag{8}$$

Следуя [6, с. 254], можно показать, что ПИ- и КР-методы эквивалентны итерационному процессу метода последовательных приближений

$$z_{k+1} = Tz_k + \psi, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где в случае ПИ-метода

$$T = T_{PI} = T_{PI}(H, P) = H(I - PH)^{-1}(I - P), \tag{10}$$

а в случае КР-метода

$$T = T_{KP} = T_{KP}(H, P) = (I - PH)^{-1}(I - P)H \tag{11}$$

(Ψ — некоторый фиксированный элемент, зависящий от H, P и f).

Так как для $H \in \mathcal{H}_a^h$ операторы (10) и (11) являются вполне непрерывными операторами из L_2 в L_2, то в силу утверждения из [7, с. 27] (упражнение 2.5) при $T = T_{PI}$ и $T = T_{KR}$ методы последовательных приближений (9), а следовательно, ПИ- и КР-методы сходятся к решению уравнения (1) со скоростью геометрических прогрессий, знаменатели $\mu_1(P, H)$ и $\mu_2(P, H)$ которых равны спектральным радиусам операторов (10) и (11) соответственно, т. е.

$$\mu_1(P, H) = \lim_{m \to \infty} \| T_{PI}^m(H, P) \|_{L_2 \to L_2}^{1/m}, \quad \mu_2(P, H) = \lim_{m \to \infty} \| T_{KP}^m(H, P) \|_{L_2 \to L_2}^{1/m}.$$

В свою очередь, величины

$$\mu_i\left(P, \mathcal{H}_a^h\right) = \sup_{H \in \mathcal{H}_a^h} \mu_i(P, H), \quad i = 1, 2,$$

определяют знаменатели геометрических прогрессий, со скоростью которых ПИ- и КР-методы сходятся при фиксированном проекторе P к решению любого уравнения (1) из класса Ψ_a^{-h}.

Пусть $\mathcal{P}_{F_N}$ — множество всех проекторов на фиксированное подпространство F_N, $\dim F_N = N$, а $\mathcal{P}_N$ — множество всевозможных проекторов на произвольные (различные) подпространства размерности N.

Как и в [8], будем рассматривать два подхода к оптимизации скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов (5), (6) и (7), (8). Первый подход, который мы будем называть адаптивным, состоит в оптимизации скорости сходимости ПИ- и КР-методов в смысле величины

$$\mu_{i,N}\left(\text{adap}, \mathcal{H}_a^h\right) = \sup_{H \in \mathcal{H}_a^h} \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \mu_i(P, H), \quad i = 1, 2. \tag{12}$$

В рамки такой оптимизации попадают методы, при которых проектор P проектирует на подпространство, приспосабливаемое (адаптируемое) к оператору H из конкретного уравнения (1).

Вторым возможным подходом к оптимизации скорости сходимости является неадаптированный подход, при котором осуществляется оптимизация в смысле величины

$$\mu_{i,N}\left(\text{попад}, \mathcal{H}_a^h\right) = \inf_{F_N \subset L_2, \dim F_N = N} \inf_{P \in \mathcal{P}_{F_N}} \mu_i\left(P, \mathcal{H}_a^h\right), \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

В этом случае всем операторам $H \in \mathcal{H}_a^h$ сопоставляется одно и то же подпространство F_N, и лишь потом это подпространство выбирается наилучшим образом для всего класса.

В настоящей работе будут получены результаты, относящиеся к обоим приведенным подходам.

3. Первые результаты об оценке скорости сходимости аппроксимационно-итеративных методов решения уравнений вида (1) в зависимости от гладкостных свойств ядер $H(t, \tau)$ были получены для ПИ-методов А. Ю. Лучкой и приведены в его фундаментальной монографии [4, с. 163 – 165]. Эти результаты относятся к случаю, когда ядра $H(t, \tau)$ имеют конечную гладкость по своим переменным, а в качестве подпространства F_N в рамках ПИ-метода используются подпространства тригонометрических и алгебраических многочленов. Позднее в [9] было показано, что для уравнений Фредгольма с ядрами конечной гладкости найденный в [4] порядок скорости сходимости ПИ-метода не может быть улучшен за счет использования любого подпространства фиксированной размерности. Дальнейшие исследования по оптимизации скорости сходимости ПИ- и КР-методов для операторных уравнений II рода содержатся в [10].

Обозначим через F_{2m+1}^T подпространство тригонометрических многочленов порядка не выше m, $\dim F_{2m+1}^T = 2m + 1$. Пусть S_m — оператор, сопоставляющий каждой функции $f \in L_2$ частную сумму ее ряда Фурье порядка m, т. е.

$$S_m f(t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt.$$

Легко видеть, что S_m — ортопроектор на F_{2m+1}^T. Известно [3, с. 187], что

$$\| S_m \|_{L_2 \to \mathcal{A}_2^h} \asymp \exp(mh), \quad \| I - S_m \|_{\mathcal{A}_2^h \to L_2} \asymp \exp(-mh). \tag{14}$$

Отметим теперь, что пространства $\mathcal{A}_2^h$, F_{2m+1}^T и класс операторов $\mathcal{H}_a^h$ удовлетворяют условиям теоремы из [10] при $i = 1$, $A_1 = A^h$, $P_m = S_m$, $P_{m+k} = S_{2m}$. Из этой теоремы и соотношений (14) при $m = [(N-1)/2]$ ($[a]$ —

целая часть числа a) вытекают следующие оценки:

$$c_1 \exp(-2Nh) \le \mu_{i,N}\left(\text{adap}, \mathcal{H}_a^h\right) \le \mu_{i,N}\left(\text{nonad}, \mathcal{H}_a^h\right) \le$$
$$\le \mu_i\left(S_m, \mathcal{H}_a^h\right) \le c_2 \exp(-Nh), \quad i = 1, 2, \tag{15}$$

где постоянные c_1, c_2 зависят лишь от вектора параметров $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ из определения класса $\mathcal{H}_a^h(\beta)$.

Оценки (15) оставляют открытым вопрос о точном порядке величин (12), (13). Получение ответа на этот вопрос является целью настоящей статьи.

4. В случае ПИ-метода оценки снизу для величин (12), (13), совпадающие по порядку с верхней оценкой (15), могут быть получены путем модификации соответствующих рассуждений из [8]. Кратко опишем эту модификацию.

Теорема 1. *При* $m = [(N-1)/2]$, $0 < h < \infty$,

$$\mu_{1,N}\left(\text{adap}, \mathcal{H}_a^h\right) \asymp \mu_{1,N}\left(\text{nonad}, \mathcal{H}_a^h\right) \asymp \mu_1\left(S_m, \mathcal{H}_a^h\right) \asymp \exp(-Nh).$$

Доказательство. Необходимая оценка сверху следует из (15).

Для получения оценки снизу зафиксируем N, положим $n = [N/2] + 1$ $(2n + 1 > N + 1)$ и рассмотрим интегральный оператор

$$H_0 z(t) = \frac{\delta}{\operatorname{ch}^2(nh)} S_n z(t) \equiv \frac{\delta}{\operatorname{ch}^2(nh)} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(t-\tau) \right] z(\tau) d\tau,$$

где δ — числовой параметр. Учитывая первое соотношение (14) и повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 3 из [11], устанавливаем, что при $\delta = \min\{\beta_1, \beta_2, (\beta_1 - 1)/\beta_1\}$ $H_0 \in \mathcal{H}_a^h$.

Пусть теперь F_N — произвольное пространство из L_2 с базисом $\{e_1(t), e_2(t), \ldots, e_N(t)\}$, $\dim F_N = N$, а P — проектор на F_N. Очевидно, $(I - PH_0)^{-1}$ представим в виде $I - B_N$, $B_N \colon L_2 \to F_N$. Тогда в силу (10)

$$T_{PI}^m(H_0, P) = [H_0(I - B_N)(I-P)]^m = \left[H_0 - S_m R_{N,0}\right]^m =$$
$$= H_0^m - S_n R_{N,m} = \delta/\left(\operatorname{ch}^{2m}(nh)\right) S_n - S_n R_{N,m},$$

где $R_{N,0}$, $R_{N,m}$ — некоторые конечномерные операторы, действующие из L_2 в F_N. Отметим, что при любом m оператор $S_n R_{N,m}$ действует в подпространство F_N^0, базисом которого является максимальная линейно независимая система из множества функций $S_n e_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, представляющих собой частные суммы ряда Фурье элементов базиса $e_i(t)$.

Обозначим через U_2 единичный шар в L_2 с центром в нуле. Тогда

$$\left\| T_{PI}^m\left(H_0, P\right)\right\|_{L_2 \to L_2} = \sup_{\varphi \in U_2} \left\| H_0^m \varphi - S_n R_{N,m}\varphi \right\| \ge \sup_{\varphi \in U_2} \inf_{g \in F_N^0} \left\| H_0^m \varphi - g \right\| \ge$$
$$\ge \inf_{F_N \subset L_2, \dim F_N = N} \sup_{\varphi \in U_2} \inf_{g \in F_N^0} \left\| H_0^m \varphi - g \right\| = d_N\left(H_0^m U_2, L_2\right), \tag{16}$$

где $d_N\left(H_0^m U_2, L_2\right)$ есть N-й поперечник по Колмогорову образа единичного шара U_2 при действии оператора H_0^m. Если φ пробегает множество $U_2 \cap$ $\cap F_{2n+1}^T$, то элементы $H_0^m \varphi = \delta^m \operatorname{ch}^{-2m}(nh) \varphi$ в подпространстве тригонометрических полиномов F^T_{2n+1} заполняют шар радиуса $\delta^m \operatorname{ch}^{-2m}(nh)$. Поскольку n было выбрано таким образом, что $\dim F^T_{2n+1} = 2n+1 > N+1$, то по теореме о поперечнике шара [12, с. 258]

$$\left\| T^m_{PI}\left(H_0, P\right)\right\|_{L_2 \to L_2} \ge d_N\left(H^m_0 U_2, L_2\right) \ge \delta^m \operatorname{ch}^{-2m}(nh).$$

Полученная оценка справедлива для любого N-мерного подпространства F_N и любого проектора P. Но тогда

$$\mu_{i,N}\left(\text{adap}, \mathcal{H}^h_a\right) \asymp \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \lim_{m \to \infty} \left\| T^m_{PI}\left(H_0, P\right)\right\|^{1/m}_{L_2 \to L_2} \ge$$

$$\ge \delta \operatorname{ch}^{-2}(nh) \asymp \exp(-2nh) \asymp \exp(-Nh).$$

Теорема доказана.

5. Приведенная выше схема рассуждений может быть применена и для KP-метода. В этом случае из (11) имеем

$$T^m_{KP}(H_0, P) = \left[(I - B_N)(I-P)H_0\right]^m = \left[H_0 - R_{N,0} H_0\right]^m =$$

$$= H^m_0 - S_n R_{N,m} - R_{N,m+1},$$

где $R_{N,0}$, $R_{N,m}$, $R_{N,m+1}$ — некоторые операторы из L_2 в F_N. Так как оператор $S_n R_{N,m} + R_{N,m+1}$ действует в подпространство, натянутое на элементы $e_1, e_2, \ldots, e_N, S_n e_1, \ldots, S_n e_N$, и размерность этого подпространства в общем случае равна $2N$, то для KP-метода оценка (16) примет вид

$$\left\| T^m_{KP}\left(H_0, P\right)\right\|_{L_2 \to L_2} \ge d_{2N}\left(H^m_0 U_2, L_2\right).$$

Теперь, чтобы воспользоваться теоремой о поперечнике шара, нужно в определении оператора H_0 положить $n = N$, а это в свою очередь приведет к оценке

$$\mu_{2,N}\left(\text{adap}, \mathcal{H}^h_a\right) \ge \inf_{P \in \mathcal{P}_N} \lim_{m \to \infty} \left\| T^m_{KP}\left(H_0, P\right)\right\|^{1/m}_{L_2 \to L_2} \ge$$

$$\ge \delta \operatorname{ch}^{-2}(Nh) \asymp \exp(-2Nh),$$

которая совпадает с нижней оценкой (15).

Таким образом, приведенная выше схема рассуждений не позволяет найти точный порядок величины (12) в случае KP-метода. Однако для KP-методов, использующих ортогональные проекторы P, с помощью иной конструкции, основанной на теореме двойственности, удается найти точный порядок величины, аналогичной (13), а именно: величины

$$\bar{\mu}_{i,N}\left(\text{nonad}, \mathcal{H}^h_a\right) = \inf_{F_N \subset L_2,\, \dim F_N = N} \mu_i\left(P_{F_N}, \mathcal{H}^h_a\right), \quad i = 1, 2,$$

где P_{F_N} — ортопроектор на F_N.

Теорема 2. *При* $m = [(N-1)/2]$, $0 < h < \infty$,

$$\bar{\mu}_{2,N}\left(\text{nonad}, \mathcal{H}^h_a\right) \asymp \mu_2\left(S_m, \mathcal{H}^h_a\right) \asymp \exp(-Nh).$$

Доказательство. Так как S_m является ортопроектором на F^T_{2m+1}, то оценка сверху для величины $\bar{\mu}_{2,N}\left(\text{nonad}, \mathcal{H}^h_a\right)$ следует из (15).

Получим оценку снизу. Обозначим через U_h^a множество элементов $f \in \in \mathcal{A}_2^h$, у которых в представлении (2) нормы f_h не превышают единицы, т.е. $\|f_h\| \le 1$. В силу неравенства для нормы свертки [12, с. 71] для $f \in U_h^a$ справедливы оценки

$$\|f\| \le \kappa_h, \quad \|f\|_{\mathcal{A}_2^h} \le 1 + \kappa_h, \tag{17}$$

где

$$\kappa_h = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \left| \Phi_h(u) \right| du .$$

Зафиксируем произвольное подпространство $F_N \subset L_2$, $\dim F_N = N$, с ортонормированным базисом $e_1(f), e_2(f), \ldots, e_N(f)$ и положим $U_h^a(F_N) = \{ f : f \in \in U_h^a, (f, e_1) = 0, i = 1, 2, \ldots, N)$, где (f, g) — скалярное произведение в L_2.

Рассмотрим множество $\mathcal{H}_\alpha(F_N)$ интегральных операторов

$$H_{\varphi,\psi} z(t) = \alpha \int_0^{2\pi} \varphi(t) \psi(\tau) z(\tau) d\tau \equiv \alpha(\psi, z) \varphi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(\tau)$ пробегают соответственно множества $U_h^a(F_N)$ и U_h^a. Учитывая (17), легко показать, что числовой параметр α можно выбрать так, чтобы

$$\mathcal{H}_\alpha(F_N) \subset \mathcal{H}_a^h(\beta). \tag{18}$$

При этом α зависит только от h и β.

По определению операторов $H_{\varphi,\psi} \in \mathcal{H}_\alpha(F_N)$

$$H_{\varphi,\psi}^m z(t) = \alpha^m \varphi(t) (\varphi, \psi)^{m-1} (\psi, z),$$

$$P_{F_N} H_{\varphi,\psi} z(t) = \alpha P_{F_N} \varphi(t) (\psi, z) = 0.$$

Но тогда в силу (11) и (18) имеем

$$\mu_2\left(P_{F_N}, \mathcal{H}_a^h\right) \ge \sup_{H_{\varphi,\psi} \in \mathcal{H}_\alpha(F_N)} \mu_2\left(P_{F_N}, H_{\varphi,\psi}\right) =$$

$$= \sup_{H_{\varphi,\psi} \in \mathcal{H}_\alpha(F_N)} \lim_{m \to \infty} \left\| T_{KP}^m\left(H_{\varphi,\psi}, P_{F_N}\right) \right\|_{L_2 \to L_2}^{1/m} =$$

$$= \sup_{\varphi \in U_h^a(F_N)} \sup_{\psi \in U_h^a} \lim_{m \to \infty} \left(\alpha^m \|\varphi\| \, \|\psi\| \, (\varphi, \psi)^{m-1}\right)^{1/m} =$$

$$= \alpha \sup_{\psi \in U_h^a} \sup_{\varphi \in U_h^a(F_N)} (\varphi, \psi). \tag{19}$$

Заметим, что в силу представления (2)

$$(\varphi, \psi) = (\varphi_h, \psi^a), \tag{20}$$

где

$$\psi^a(v) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \overline{\Phi}_{2h}(v - u) \psi_h(u) du, \tag{21}$$

$$\overline{\Phi}_{2h}(v-u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_h(v-t) \Phi_h(t-u) dt = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k(v-u)}{\operatorname{ch}^2(ku)}. \tag{22}$$

Кроме того, когда функция $\varphi(t)$ пробегает множество $U_h^a(F_N)$, то $\varphi_h(t)$ заполняют множество $U(F_N^a)$ функций, имеющих единичную норму в L_2 и ортогональных подпространству F_N^a, являющемуся линейной оболочкой элементов

$$e_i^2(t) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi}\Phi_h(t-u)e_i(u)du, \;\; i = 1, 2, \dots, N,$$

где $\{e_i\}$ — ортонормированный базис пространства F_N. Но тогда в силу теоремы двойственности [12, с. 42] из (20) имеем

$$\sup_{\varphi\in U_h^a(F_N)}(\varphi, \psi) = \sup_{\varphi_h\in U(F_N^a)}(\varphi_h, \psi^a) = \inf_{u\in F_N^a}\|\psi^a - u\|. \qquad (23)$$

Из (21), (22) видно, что если функции ψ_h заполняют единичный шар в L_2, то функции ψ^a заполняют в пространстве L_2 эллипсоид $Э_{2h}^a$ с осями 1, $\mathrm{ch}^{-2}(h)$, $\mathrm{ch}^{-2}(h)$, $\mathrm{ch}^{-2}(2h)$, $\mathrm{ch}^{-2}(2h), \dots, \mathrm{ch}^{-2}(kh)$, $\mathrm{ch}^{-2}(kh), \dots$ относительно базиса 1, $\cos t$, $\sin t$, $\cos 2t$, $\sin 2t, \dots, \cos kt$, $\sin kt, \dots$. По теореме о поперечнике эллипсоида [3, с. 240]

$$d_{2k-1}(Э_{2h}^a, L_2) = d_{2k}(Э_{2h}^a, L_2) = \mathrm{ch}^{-2}(kh), \qquad (24)$$

где $d_m(Э_{2h}^a, L_2)$ — m-й поперечник по Колмогорову эллипсоида $Э_{2h}^a$ в L_2. Таким образом, из (19), (23) и (24) находим

$$\mu_2(P_{F_N}, \mathcal{H}_a^h) \geq \alpha \sup_{\psi\in U_h^a}\inf_{u\in F_N^a}\|\psi^a - u\| \geq$$

$$\geq \alpha\, d_N(Э_{2h}^a, L_2) = \alpha\,\mathrm{ch}^{-2}([N/2]h) \asymp \exp(-Nh).$$

В силу произвольности выбора подпространства F_N искомая оценка снизу вытекает из последнего соотношения. Теорема доказана.

1. *Ловитт У. В.* Линейные интегральные уравнения. – М.: Гостехиздат, 1957. – 250 с.
2. *Здлизняк С. Н., Мельник Ю. И., Подлипенко Ю. К.* О приближенном решении интегральных уравнений теории потенциала // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 3. – С. 382 – 391.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 264 с.
5. *Лебедев В. И.* Об итерационном КР-методе // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1967. – **7**, № 6. – С. 137 – 148.
6. *Марчук Г. И., Лебедев В. И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 492 с.
7. *Приближенное* решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
8. *Переверзев С. В., Синенко М. А.* Об оптимальной скорости сходимости КР-метода и некоторых его обобщений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **31**, № 10. – С. 1452 – 1460.
9. *Переверзев С. В.* Об оптимальном выборе базисных функций при проекционно-итеративном методе решения интегральных уравнений // Теория приближений и смежные вопросы анализа и топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 82 – 87.
10. *Синенко М. А.* О связи между проекционно-итеративным методом и КР-методом для уравнений II рода // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 113 – 122.
11. *Солодкий С. Г.* Оптимизация адаптивных прямых методов решения операторных уравнений в гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 96 – 101.
12. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

Получено 25.01.93