УДК 517.91 / 93

А. М. Самойленко, чл.-корр. НАН Украины (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Д. И. Мартынюк,
Н. А. Перестюк, доктора физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРИВОДИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ, ЗАДАННЫХ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ТОРЕ

Sufficient conditions of reducibility of the nonlinear system of difference equations $x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t), t) + \lambda$, to the system $y(t+1) = y(t) + \omega$ are found; here, $x, \omega, \lambda \in \boldsymbol{m}$, and the infinite-dimensional vector function $P(x(t), t)$ is 2π-periodic in x_i ($i = 1, 2, \dots$) and almost periodic in t with the frequency basis α.

Вказані достатні умови звідності нелінійної системи різницевих рівнянь $x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t), t) + \lambda$, де x, ω, $\lambda \in \boldsymbol{m}$, нескінченновимірна вектор-функція $P(x(t), t)$ періодична по x_i, $i = 1, 2, \dots$, з періодом 2π і майже періодична по t з базисом частот α, до системи $y(t+1) = y(t) + \omega$.

Рассмотрим бесконечную систему разностных уравнений

$$x(t+1) = x(t) + \omega + P(x(t), t) + \lambda, \tag{1}$$

где x, ω, $\lambda \in \boldsymbol{m}$, бесконечномерная вектор-функция $P(x, t)$ вещественная, 2π-периодическая по x_i, $i \geq 1$, и почти периодическая по t с базисом частот α, $\boldsymbol{m}$ — множество всех бесконечных вещественных ограниченных числовых последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ с нормой

$$|x| = \max_{i \geq 1} |x_i|.$$

Поставим задачу: найти замену переменных $x = y + U_0(y, t)$, приводящую систему (1) к системе

$$y(t+1) = y(t) + \omega. \tag{2}$$

Отметим, что в случае дифференциальных уравнений аналогичная задача рассматривалась в работах [1–3].

Следуя [3], приведем некоторые определения, необходимые в дальнейшем.

Обозначим через

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots)$$

бесконечные последовательности комплексных чисел и введем такие обозначения:

$$x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots),$$

$$\| x^n \| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad |x| = \max_{i \geq 1} |x_i|,$$

$$\Pi(\rho) = \{(x, \varphi) \colon |\operatorname{Im} x| < \rho, \ |\operatorname{Im} \varphi| < \rho\},$$

$$\Pi(\rho, n_1, n_2) = \left\{ \left(x^{n_1}, \varphi^{n_2}\right) \colon \left| \operatorname{Im} x^{n_1} \right| < \rho, \ \left| \operatorname{Im} \varphi^{n_2} \right| < \rho \right\},$$

$$\Pi_0 = \{(x, \varphi) \colon |\operatorname{Im} x| = 0, \ |\operatorname{Im} \varphi| = 0\}.$$

Для бесконечномерной функции

$$F(x, \varphi) = \left(F^{(1)}(x, \varphi), \dots, F^{(n)}(x, \varphi), \dots \right)$$

определим нормы

$$\| F(x, \varphi) \|_\rho = \sup_{\Pi(\rho)} \sum_{i=1}^{\infty} \left| F^{(i)}(x, \varphi) \right|,$$

$$\| F(x, \varphi) \|_0 = \sup_{\Pi_0} \sum_{i=1}^{n} \left| F^{(i)}(x, \varphi) \right|.$$

***Определение* 1.** *Бесконечномерная вектор-функция* $F(x, \varphi)$, $(x, \varphi) \in \Pi_0$, *принадлежит классу* $A_1(\theta)$, $\theta > 0$, *если можно указать положительные монотонно неубывающие последовательности целых чисел* $n_1(k)$, $n_2(k)$ *и вещественных чисел* $g(k)$, *а также последовательность вектор-функций*

$$F_k(x, \varphi) = F_k\left(x^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)} \right) =$$

$$= \left(F_{k,1}\left(x^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)} \right), \dots, F_{k, n_1(k)}\left(x^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)} \right), 0, 0, \dots \right),$$

удовлетворяющих условиям:

1) $\lim\limits_{k \to \infty} n(k) = \infty$, $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \dfrac{\ln n(k)}{g(k)} = b < \infty$;

$$g(k+1) - g(k) \ge \ln \frac{k+1}{k}, \quad n(k) \ge n_1(k) + n_2(k);$$

2) $F_1(x, \varphi) = 0$, *для каждого* $k \ge 2$ *функция* $F_k(x, \varphi)$ *является* 2π-*периодической по каждой переменной, вещественной при вещественных* (x, φ) *и аналитической в области* $\Pi(\rho_k, n_1(k), n_2(k))$, *где*

$$\rho_k = c_0 \sum_{i=k}^{\infty} \exp\{-a g(i)\}; \quad \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\ln k}{g(k)} < a, \; c_0 > 0;$$

3) $\lim\limits_{k \to \infty} F_k(x, \varphi) = F(x, \varphi)$ *при* $(x, \varphi) \in \Pi_0$;

4) *существует постоянная* $C_F > 0$ *такая, что для каждого* $k > 1$ *выполняется неравенство*

$$\| F_k(x, \varphi) - F_{k-1}(x, \varphi) \|_{\rho_k} = C_F \exp\{-\theta n(k) g(k)\}.$$

***Определение* 2.** *Бесконечномерная вектор-функция* $P(x, t)$, $x \in \boldsymbol{m}$, $t \in R$, *принадлежит классу* $A_1(\theta, \alpha)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ — *бесконечная последовательность вещественных рационально несоизмеримых чисел, если найдется функция* $F(x, \varphi)$ *из* $A_1(\theta)$ *такая, что* $P(x, t) = F(x, \alpha t)$, $x \in \boldsymbol{m}$, $t \in R$.

***Определение* 3.** n_1-*мерная вектор-функция* $Q\left(x^{n_1}, \varphi^{n_2}, \lambda^{n_1} \right)$ *принадлежит классу* $H(k, \rho, L, c)$, $\rho > 0$, $L > 0$, $c > 0$, *если она определена и аналитична в области* $\Pi(\rho, n_1, n_2) L$, 2π-*периодична по* x_i, φ_j, *вещественна при вещественных* $(x^{n_1}, \varphi^{n_2}, \lambda^{n_1})$ *и удовлетворяет оценке*

$$\| Q \|_{\rho, L} \le c \exp\{-\theta n(k) g(k)\}.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1 *(индуктивная лемма). Система разностных уравнений*

$$\begin{cases} x^{n_1(k)}(t+1) = x^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + Q^{n_1(k)}\left(x^{n_1(k)}(t), \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}\right) + \lambda^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_p^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)}, \end{cases}$$

где $n_1(k)$*-мерная вектор-функция* $Q^{n_1(k)}(x^{n_1(k)}(t), \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)})$ *является аналитической в области* $\Pi(\sigma_{k_1}, n_1(k), n_2(k))L_k$, 2π*-периодической по переменным* x_i, φ_j, *вещественной при вещественных* $(x^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)})$ *и удовлетворяет оценке*

$$\|Q\|_{\sigma_k, L_k} \le c_1 \exp\{-\theta n(k) g(k)\},$$

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\sigma_0}, \quad \sigma_0 = 2p_1(1+q_1),$$

$$p_1 = \prod_{i=1}^{\infty}(1 + c_1 c_3 \exp\{-\theta n(i) g(i)\});$$

$$q_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_1 c_3 \exp\{-\theta n(i) g(i)\},$$

$$L_k = c_1 c_2 \exp\{-\theta_2 n(k) g(k)\},$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ *удовлетворяют условиям*

$$\theta > 2(a+b), \ \ \theta - \theta_1 < \theta_2 < \theta/2 < \theta - a - b; \ \ c_1 > 0, \ \ c_2 > 0, \ \ c_3 > 0,$$

заменой переменных

$$x^{n_1(k)} = y^{n_1(k)} + U(y^{n_1(k)}, \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}), \quad \lambda^{n_1(k)} = \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}), \tag{4}$$

приводима к системе

$$\begin{cases} y^{n_1(k)}(t+1) = y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + R\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \mu^{n_1(k)}\right) + \mu^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)} \end{cases} \tag{5}$$

при выполнении условия

$$\left| \operatorname{cosec} \frac{\langle \omega, \bar{s}\rangle + \langle \alpha^m, \bar{r}^m\rangle}{2} \right| \le c(m)\left(\|\bar{s}\| + \|\bar{r}^m\|\right)^{n+m}, \tag{6}$$

$\bar{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, $\bar{r}^m = (r_1, \ldots, r_m)$ *— любые ненулевые целочисленные векторы,* $c(m) = \gamma d_1^m m^{d_2}$, $\gamma > 1$, $d_1 > 1$, $d_2 > 0$.

Доказательство. После замены (4) система разностных уравнений (3) преобразуется в систему

$$y^{n_1(k)}(t+1) + U\left(y^{n_1(k)}(t+1), \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)})\right) =$$

$$= y^{n_1(k)}(t) + U\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)})\right) + \omega^{n_1(k)} + Q\Big(y^{n_1(k)}(t) +$$

$$+ U\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}\right)\Big) + \lambda^{n_1(k)}, \tag{7}$$

которую представим в виде

$$y^{n_1(k)}(t+1) - y^{n_1(k)}(t) - \omega^{n_1(k)} =$$
$$= U\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) +$$
$$+ U\left(y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) - U\left(y^{n_1(k)}(t+1) - \right.$$
$$\left. - y^{n_1(k)}(t) - \omega^{n_1(k)} + y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) -$$
$$- U\left(y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) +$$
$$+ S_{N(k)} Q\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) + \overline{Q}\left(\lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) -$$
$$- \overline{Q}\left(\lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) - S_{N(k)} Q\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) +$$
$$+ Q\left(y^{n_1(k)}(t) + U\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right), \right.$$
$$\left. \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) + \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}), \tag{8}$$

где

$$S_{N(k)} Q = \sum_{\left\| \bar{s}^{n_1(k)} \right\| + \left\| \bar{r}^{n_2(k)} \right\| \le N(k)} Q_{\bar{s}^{n_1(k)}, \bar{r}^{n_2(k)}} \exp\left\{ i \left\langle y^{n_1(k)}, \bar{s}^{n_1(k)} \right\rangle + \right.$$
$$\left. + i \left\langle \varphi^{n_2(k)}, \bar{r}^{n_2(k)} \right\rangle \right\},$$

$$Q_{\bar{s}^{n_1(k)}, \bar{r}^{n_2(k)}}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1(k)+n_2(k)}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} Q \exp\left\{ -i \left\langle y^{n_1(k)}, \bar{s}^{n_1(k)} \right\rangle - \right.$$
$$\left. - i \left\langle \varphi^{n_2(k)}, \bar{r}^{n_2(k)} \right\rangle \right\} dy_1 \ldots dy_{n_1(k)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n_2(k)},$$

$$\overline{Q}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1(k)+n_2(k)}} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{\pi} Q\, dy_1 \ldots dy_{n_1(k)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n_2(k)}.$$

Выберем функции

$$U\left(y^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right), \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)})$$

как решения уравнений

$$\mu^{n_1(k)} = \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) + \overline{Q}\left(\lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right), \tag{9}$$

$$U\left(y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)} + \alpha^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) =$$
$$= U\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) - \overline{Q}\left(\lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) +$$
$$+ S_{N(k)} Q\left(y^{n_1(k)}(t), \varphi^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right). \tag{10}$$

В силу такого выбора соотношение (8) можно записать в виде

$$y^{n_1(k)}(t+1) - y^{n_1(k)}(t) - \omega^{n_1(k)} =$$
$$= U\left(y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \right) -$$

$$- U\Big(y^{n_1(k)}(t+1) - y^{n_1(k)}(t) - \omega^{n_1(k)} +$$
$$+ y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)}, \varphi_{t+1}^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) + Q\Big(y^{n_1(k)}(t) +$$
$$+ U\Big(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) -$$
$$- S_{N(k)} Q\Big(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) \Big) + \mu^{n_1(k)}. \tag{11}$$

Разрешая (11) относительно $y^{n_1(k)}(t+1) - y^{n_1(k)}(t) - \omega^{n_1(k)}$, получаем систему

$$\begin{cases} y^{n_1(k)}(t_1+1) = y^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + R\big(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \mu^{n_1(k)} \big) + \mu^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$R\Big(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \mu^{n_1(k)} \Big) =$$
$$= \left[\left(E + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-1} - E \right] \mu^{n_1(k)} + \left(E + \frac{\partial U}{\partial y} \right)^{-1} \Big[Q\Big(y^{n_1(k)}(t) +$$
$$+ U\Big(y^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) -$$
$$- S_{N(k)} Q\Big(y^{n_1(k)}, \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) \Big].$$

Согласно [4, 5], уравнение (10) имеет решение

$$U\Big(\psi^{m(k)}, \lambda^{n_1(k)}(\mu^{n_1(k)}) \Big) =$$
$$= \sum_{0 < \|\bar r^{m(k)}\| \le N(k)} \frac{Q_{\bar r^{m(k)}}\big(\lambda^{n_1(k)}\big(\mu^{n_1(k)}\big)\big)}{e^{i\langle \beta^{m(k)}, \bar r^{m(k)}\rangle} - 1} \exp\Big\{ i\langle \psi^{m(k)}, \bar r^{m(k)} \rangle \Big\}, \tag{13}$$

где

$$m(k) = n_1(k) + n_2(k),$$
$$\psi^{m(k)} = \Big(y^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)} \Big), \quad \beta^{m(k)} = \Big(\omega^{n_1(k)}, \alpha^{n_2(k)} \Big)$$

Легко заметить, что функция $R\Big(y^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \mu^{n_1(k)} \Big)$ является аналитической, 2π-периодической по $\varphi_j^{n_2(k)}$ и вещественной при вещественных $\Big(y^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \mu^{n_1(k)} \Big)$ в области $\Pi(\sigma_{k+1}, n_1(k), n_2(k))\, L_{k+1}$.

Используя индуктивную лемму, докажем теорему о приводимости бесконечной системы (1).

Теорема. *Предположим, что система разностных уравнений* (1) *удовлетворяет следующим условиям*:

1) $P(x, t) \in A_1(\theta, \alpha)$, $\theta > 2(a+b)$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{n(k+1)}{n(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{g(k+1)}{g(k)} = 1\,;$$

2) *для любых целых* $n_1 > 0$, $n_2 > 0$ *и любых ненулевых целочисленных векторов* $\bar{s}^{n_1} = \left(s_1, \ldots, s_{n_1}\right)$, $\bar{r}^{n_2} = \left(r_1, \ldots, r_{n_2}\right)$ *выполняется неравенство*

$$\left|\operatorname{cosec}\frac{\langle\omega^{n_1}, \bar{s}^{n_1}\rangle + \langle\alpha^{n_2}, \bar{r}^{n_2}\rangle}{2}\right| \le c(n)\left(\|\bar{s}^{n_1}\| + \|\bar{r}^{n_2}\|\right)^n,$$

$$n = n_1 + n_2;\ \ c(n) = \gamma d_1^n n^{d_2},\ \ \gamma > 1,\ \ d_1 > 1,\ \ d_2 > 0.$$

Тогда существует постоянная $M_0 > 0$ *такая, что при* $C_F \le M_0$ *можно найти вектор* $\lambda \in \boldsymbol{m}$, *и замену переменных* $x = y + U_0(t, y)$, $U_0(t, y) \in \in A_1(\theta, \alpha)$, *приводящую систему* (1) *к виду* $y(t+1) = y(t) + \omega$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность систем

$$\begin{cases} x^{n_1(k)}(t+1) = x^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + F_k\left(x^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}\right) + \lambda^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)} \end{cases} \tag{14}$$

и докажем, что для каждого $k \ge 1$ можно построить замену переменных

$$x^{n_1(k)} = V_k^{n_1(k)}\left(x_k^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda_k^{n_1(k)}\right),\quad \lambda^{n_1(k)} = \Phi_k^{n_1(k)}\left(\lambda_k^{n_1(k)}\right), \tag{15}$$

преобразующую систему (14) в систему

$$\begin{cases} x_k^{n_1(k)}(t+1) = x_k^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + Q_k\left(x_k^{n_1(k)}(t), \varphi_t^{n_2(k)}, \lambda_k^{n_1(k)}\right) + \lambda_k^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)}, \end{cases} \tag{16}$$

причем

$$V_k^{n_1(k)} - x_k^{n_1(k)} \in H_1(k, \sigma_k, L_k);\ \ Q_k^{n_1(k)} \in H(k, \sigma_k, L_k, c_1).$$

Искомые вектор λ и замена переменных имеют вид

$$\begin{gathered} \lambda = \lambda_0 = \lim_{k\to\infty} \Phi_k^{n_1(k)}(0), \\ x = V(y, \alpha t) = \lim_{k\to\infty} V_k\left(y^{n_1(k)}, \alpha^{n_2(k)}t, 0\right). \end{gathered} \tag{17}$$

Положив в системе (14) при $k = 1$

$$\begin{gathered} x^{n_1(1)} = V_1^{n_1(1)}\left(x_1^{n_1(1)}\right) = x_1^{n_1(1)}, \\ \lambda^{n_1(1)} = \Phi_1^{n_1(1)}\left(\lambda_1^{n_1(1)}\right) = \lambda^{n_1(1)}\left(\lambda_1^{n_1(1)}\right) = \lambda_1^{n(1)}; \end{gathered} \tag{18}$$

преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} x_1^{n_1(1)}(t+1) = x_1^{n_1(1)}(t) + \omega^{n_1(1)} + Q_1^{n_1(1)}\left(x_1^{n_1(1)}, \varphi^{n_2(1)}, \lambda_1^{n(1)}\right) + \lambda_1^{n_1(1)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(1)} = \alpha^{n_2(1)}, \end{cases} \tag{19}$$

где $Q_1^{n_1(1)} = 0$.

Предположим, что для некоторого $k \ge 1$ замена (15) преобразует систему (14) в систему (16) и

$$V_k^{n_1(k)} - x_k^{n_1(k)} \in H_1(k, \sigma_k, L_k),\quad Q_k^{n_1(k)} \in H(k, \sigma_k, L_k, c_1),$$

следовательно, система (16) удовлетворяет условиям индуктивной леммы. Поэтому при соответствующем выборе c_1, c_2, c_3 можно построить замену переменных

$$x_k^{n_1(k)} = x_{k+1}^{n_1(k)} + U_{k+1}^{n_1(k)}\left(x_{k+1}^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda_k^{n_1(k)}\left(\lambda_{k+1}^{n_1(k)} \right) \right) =$$

$$= Z_{k+1}^{n_1(k)}\left(x_{k+1}^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda_{k+1}^{n_1(k)} \right),$$

$$\lambda_k^{n_1(k)} = \lambda_k^{n_1(k)}\left(\lambda_{k+1}^{n_1(k)} \right),$$

которая преобразует систему (16) к виду

$$\begin{cases} x_{k+1}^{n_1(k)}(t+1) = x_{k+1}^{n_1(k)}(t) + \omega^{n_1(k)} + \\ \qquad\qquad + R_{k+1}^{n_1(k)}\left(x_{k+1}^{n_1(k)}(t), \varphi^{n_2(k)}, \lambda_{k+1}^{n_1(k)}\right) + \lambda_{k+1}^{n_1(k)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k)} = \alpha^{n_2(k)}. \end{cases}$$

Совершая в системе уравнений

$$\begin{cases} x^{n_1(k+1)}(t+1) = x^{n_1(k+1)}(t) + \omega^{n_1(k+1)} + \\ \qquad\qquad + F_{k+1}\left(x^{n_1(k+1)}(t), \varphi^{n_2(k+1)}\right) + \lambda^{n_1(k+1)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k+1)} = \alpha^{n_2(k+1)} \end{cases}$$

замену переменных

$$x^{n_1(k+1)} = V_{k+1}^{n_1(k+1)}\left(x_{k+1}^{n_1(k+1)}, \varphi^{n_2(k)}, \lambda_{k+1}^{n_1(k+1)} \right),$$

$$\lambda^{n_1(k+1)} = \Phi_{k+1}^{n_1(k+1)}\left(\lambda_{k+1}^{n_1(k+1)} \right),$$

получаем систему

$$\begin{cases} x_{k+1}^{n_1(k+1)}(t+1) = x_{k+1}^{n_1(k+1)}(t) + \omega^{n_1(k+1)} + \\ \qquad\qquad + Q_{k+1}^{n_1(k+1)}\left(x^{n_1(k+1)}(t), \varphi^{n_2(k+1)}, \lambda_{k+1}^{n_1(k+1)}\right) + \lambda_{k+1}^{n_1(k+1)}, \\ \Delta\varphi_t^{n_2(k+1)} = \alpha^{n_2(k+1)}, \end{cases}$$

причем

$$Q_{k+1}^{n_1(k+1)} \in H(k+1, \sigma_{k+1}, L_{k+1}; c_1),$$

$$V_{k+1}^{n_1(k+1)} - x_{k+1}^{n_1(k+1)} \in H_1(k+1, \sigma_{k+1}, L_{k+1}).$$

Обозначим

$$V_k(x, \varphi) = \left(V_k^{n_1(k)}\left(x^{n_1(k)}, \varphi^{n_2(k-1)}, 0 \right), x_{n_1(k)+1}, x_{n_1(k)+2}, \ldots \right),$$

$$\Phi_k(\lambda) = \left(\Phi_k^{n_1(k)}(\lambda^{n_1(k)}), \lambda_{n_1(k)+1}, \lambda_{n_1(k)+2}, \ldots \right).$$

Аналогично [3] можно доказать сходимость последовательностей $F_k(0)$ и $V_k(x, \varphi)$.

Рассмотрим систему

$$x(t+1) = x(t+\omega) + F_k(x, \alpha t) + (F(x, \alpha t) - F_k(x, \alpha t)) \tag{20}$$

и совершим замену переменных $x = V_k(y, \alpha t)$, $\lambda = \Phi_k(0)$.

В результате получим систему уравнений

$$y(t+1) = y(t) + \omega + Q_k\Big(y^{n_1(k)}(t), \alpha^{n_2(k)}t, 0\Big) +$$

$$+ \left(E + \frac{\partial V_k}{\partial y}\right)^{-1} \Big(F(V_k(x, \alpha t), \alpha t) - F_k(V_k(x, \alpha t), \alpha t) \Big),$$

в которой

$$Q_k\Big(y^{n_1(k)}(t), \alpha^{n_2(k)}t, 0\Big) = \Big(Q_k^{n_1(k)}\Big(y^{n_1(k)}(t), \alpha^{n_2(k)}t, 0\Big), 0, 0, \ldots \Big),$$

$$\left(\frac{\partial V_k}{\partial y}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_k^{n_1(k)}\big(y^{n_1(k)}(t), \alpha^{n_2(k-1)}t, 0\big)}{\partial y^{n_1(k)}} & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

В силу равномерной сходимости последовательностей $F_k(x, \varphi)$ и $V_k(x, \varphi)$ получаем

$$\lim_{k \to \infty} \| F(V_k(y, \varphi), \varphi) - F_k(V_k(y, \varphi), \varphi) \|_0 = 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} \Big\| Q_k\Big(y^{n_1(k)}(t), \alpha^{n_2(k)}t, 0\Big) \Big\|_0 = 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наук. думка, 1969. – 248 с.
2. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* О приводимости дифференциальных систем в пространстве ограниченных числовых последовательностей. – Киев, 1989. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.44).
3. *Филиппов М. Г.* О приводимости систем дифференциальных уравнений с почти периодическим возмущением, заданных на бесконечномерном торе // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1990. – № 3. – С. 30–33.
4. *Мартынюк Д. И., Перестюк Н. А.* О приводимости разностных уравнений на торе // Вычисл. и прикл. математика. – 1975. – **26**. – С. 42–48.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1984. – 213 с.

Получено 12.04.93