УДК 517.5

В. Б. Семенюк, ст. преп. (Ровен. пед. ин-т)

ПРИБЛИЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ НА ОБЛАСТЯХ С ВНЕШНИМ ПИКОМ

For unbounded domains with an exterior peak of power type Ω_λ, a method is presented for approximating functions $f(x) \in w_p^r(\Omega_\lambda)$ by polynomial splines in the metric $w_q^r(\Omega_\lambda)$, $1 \le p \le q \le \infty$, and estimates of this approximation are given.

Для необмежених областей із зовнішнім піком степеневого вигляду Ω_λ наводиться метод і даються оцінки наближення функцій $f(x) \in w_p^r(\Omega_\lambda)$ поліноміальними сплайнами в метриці $w_q^r(\Omega_\lambda)$, $1 \le p \le q \le \infty$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, где $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_n = 1$, $n > 1$, $\lambda_1 > 1$ и

$$\Omega_\lambda = \{ x \colon x = (x_1, \ldots, x_n),\ |x_i| < x_n^{\lambda_i},\ i = \overline{1, n-1},\ 0 < x_n \}$$

— область с внешним пиком. Через $w_p^r(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le \infty$, для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначается изотропное пространство Соболева [1] функций $f(x)$, определенных на Ω, с конечной полунормой

$$\| f \|_{w_p^r(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = r} \| D^\alpha f \|_{L_p(\Omega)},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Полагаем $w_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$.

Через $\mathcal{P}_N(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать пространство алгебраических многочленов $P_N(x)$ вида

$$P_N(x) = \sum_{0 \le |k| \le N} a_k x^k,$$

где $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $a_k \in \mathbb{R}^1$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$, $0^0 = 1$.

Будем также использовать обозначение $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$.

Рассмотрим следующие функции одной действительной переменной:

$$\psi_0(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1; \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases}$$

$$\psi_1(t) := \begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{t} \psi_0(2x+1)\,dx =: p_1(t), & t \le 0; \\ p_1(0) - \int\limits_{0}^{t} \psi_0(2x-1)\,dx =: q_1(t), & t > 0, \end{cases}$$

$$\psi_s(x) := \begin{cases} 2\int\limits_{-\infty}^{t} \psi_{s-1}(2x+1)\,dx =: p_s(t), & t \le 0; \\ 1 - 2\int\limits_{0}^{t} \psi_{s-1}(2x-1)\,dx =: q_s(t), & t > 0. \end{cases}$$

Разобъем полупространство $\mathbb{R}^n_+ = \{x\colon x=(x_1, \ldots, x_n),\ x_n>0\}$ на n-мерные полосы $Q_n^{(k)} = \{x\colon x=(x_1, \ldots, x_n),\ x_n^{(k-1)} < x_n < x_n^{(k)}\}$, где $x_n^0 = 0$, $x_n^{(k)} < x_n^{(k+1)}$, $k \in \mathbb{N}$. Каждую из полос разобьем на n-мерные параллелепипеды

$$Q_j^{(k)} = \{x\colon x = (x_1, \ldots, x_n) \in Q_n^{(k)},$$
$$(j_i - 1)h_i^{(k)} < x_i < j_i h_i^{(k)},\ i < \overline{1, n-1}\},$$

где $j = (j_1, \ldots, j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $h_i^{(k)} \in \mathbb{R}^1$. Полагаем, что

$$h_n^{(k)} := x_n^{(k)} - x_n^{(k-1)}, \tag{1}$$

а также

$$\psi_{s,k}(x_n) := \begin{cases} p_s\left(\left(h_n^{(k)}\right)^{-1}\left(x_n - x_n^{(k)}\right)\right), & x_n \le x_n^{(k)}; \\ q_s\left(\left(h_n^{(k+1)}\right)^{-1}\left(x_n - x_n^{(k)}\right)\right), & x_n > x_n^{(k)}, \end{cases}$$

$$\psi_{s,k,j_i}(x_i) := \psi_s\left(\left(h_i^{(k)}\right)^{-1}\left(x_i - h_i^{(k)} j_i\right)\right),\quad i = \overline{1, n-1},$$

$$\psi_s\left(x; Q_j^{(k)}\right) := \psi_{s,k}(x_n) \prod_{i=1}^{n-1} \psi_{s,k,j_i}(x_i),$$

где $j = (j_1, \ldots, j_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$. Очевидно, $\psi\left(x; Q_j^{(k)}\right)$ — сплайн-функция, составленная из многочленов степени sn.

В дальнейшем рассматриваются разбиения $\mathbb{R}^n_+$ на параллелепипеды $Q_j^{(k)}$, размеры которых, определяемые параметрами $h_i^{(k)}$, $x_n^{(k)}$, будут зависеть от параметров

$$r \in \mathbb{N},\ N \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le q \le \infty,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$s = \overline{0, [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)]}.$$

Полагаем по определению

$$\left.\begin{aligned} x_n^{(k)} &= x_n^{(k)}(r, N, p, q, s, \lambda) = N^{-\beta} k^{(\lambda_1\beta - 1)/(\lambda_1 - 1)}, \\ &\qquad\qquad \text{если}\quad k = \overline{1, \left[N^{1-1/\lambda_1}\right]}, \\ x_n^{(k)} &= x_n^{(k)}(r, s, N, p, q, \lambda) = x_n^{([N^{1-1/\lambda_1}])} + dN^{-1}, \\ &\qquad\qquad \text{если}\quad k = \left[N^{1-1/\lambda_1}\right] + d, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где

$$d \in \mathbb{N},\quad \beta = \frac{r - s - n(1/p - 1/q)}{r - \lambda_1 s - |\lambda|(1/p - 1/q)},\quad r - \lambda_1 s - |\lambda|\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) > 0.$$

Пусть также

$$\left.\begin{aligned} h_i^{(k)} &= h_i^{(k)}(N,\lambda) = N^{-1}, && k = \left[N^{1+1/\lambda_1}\right] + d,\ d \in \mathbb{N},\ i = \overline{1, n-1}, \\ h_i^{(k)} &= h_i^{(k)}(r,s,N,p,q,\lambda) = 2^{-l} h_i^{(k+1)}, && k \le \left[N^{1+1/\lambda_1}\right],\ k \in \mathbb{N}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $2^{-l-1} < h_i^{(k+1)} m_{k,i} / \left(x_n^{(k)}\right)^{\lambda_i} \le 2^{-l}$ и $m_{k,i} = k^{(\lambda_1 - \lambda_i)/(\lambda_1 - 1)}$.

Полагая, что для фиксированных r, N, p, q, λ параметры $h_i^{(k)}$ и $x_n^{(k)}$ выбраны, как указано выше, сохраним обозначение $\psi_s\left(x; Q_j^{(k)}\right) = \psi_s\left(x; Q_j^{(k)}, r, N, p, q, \lambda\right)$ для соответствующей $s-1$ раз непрерывно дифференцируемой функции и s раз почти всюду дифференцируемой функции. Тот факт, что функция $\psi_s\left(x; Q_j^{(k)}\right)$ $s-1$ раз непрерывно дифференцируема и s раз дифференцируема почти всюду, следует из ее построения.

Имея разбиение полупространства $\mathbb{R}_+^n$ на параллелепипеды $Q_j^{(k)}$ пронумеруем их в каком-либо порядке, введя вместо индексов k и j один индекс $\nu \in \mathbb{N}$. Таким образом, получаем разбиение $\mathbb{R}_+^n$ на параллелепипеды $\{Q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$. Для каждого параллелепипеда Q_ν такого, что координаты его центра $x_\nu = (x_{1,\nu}, \ldots, x_{n,\nu})$ удовлетворяют равенствам

$$x_{n,\nu} = \frac{x_n^{(k)} + x_n^{(k-1)}}{2}, \quad x_{i,\nu} = \frac{h_i^{(k} (2j_i - 1)}{2},$$

по определению полагаем

$$\psi_s(x; Q_\nu) = \psi_s\left(x; Q_j^{(k)}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Определение. Будем говорить, что сплайн-функция вида

$$\sigma_{r,N,s}(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \pi_{r-1}(x; Q_\nu)\, \psi_s(x; Q_\nu), \tag{5}$$

где $\pi_{r-1}(x; Q_\nu) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, принадлежит пространству $S_{r,N,s}$, если величины $h_i^{(k)}$, $i = \overline{1,n}$, $k \in \mathbb{N}$, используемые при определении сплайн-функций вида (4), определяются из формул (1) – (3).

В следующих ниже формулировках результатов и их доказательств соотношение $a(M, \mathfrak{M}) \ll b(M, \mathfrak{M})$ означает, что существует $c > 0$, не зависящее от M, но, вообще говоря, зависящее от множества параметров $\mathfrak{M}$, такое, что $a(M, \mathfrak{M}) \le c b(M, \mathfrak{M})$. Соотношение $a(M, \mathfrak{M}) \asymp b(M, \mathfrak{M})$ означает, что при всех M выполняются соотношения $a(M, \mathfrak{M}) \ll b(M, \mathfrak{M})$ и $b(M, \mathfrak{M}) \ll$ $\ll a(M, \mathfrak{M})$.

Теорема. *Для каждой функции* $f \in w_p^r(\Omega_\nu)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \le p \le q \le \infty$, *при каждом* $N \in \mathbb{N}$ *существует сплайн-функция* $\sigma_{r,N,s}(x; f) \in S_{r,N,s}$ *такая, что*

$$\left\| f - \sigma_{r,N,s}(f) \right\|_{w_q^s(\Omega_\lambda)} \ll \| f \|_{w_p^r(\Omega_\lambda)} N^{-r+s+n(1/p-1/q)}, \tag{6}$$

где

$$r - \lambda_1 s - |\lambda| (1/p - 1/q) > 0, \ s \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$0 \le s \le [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)].$$

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть*

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^n, \;\; \varepsilon_i > 0, \; i = \overline{1, n}, \; c > 1, \; c\varepsilon = (c\varepsilon_1, \dots, c\varepsilon_n),$$

Π_ε, $\Pi_{c\varepsilon}$ — *n-мерные концентрические параллелепипеды с ребрами соответственно длины ε_i и $c\varepsilon_i$, а Ω — область, звездная относительно Π_ε, такая, что* $\Pi_\varepsilon \subset \Omega \subset \Pi_{c\varepsilon}$.

Тогда для $\pi_{r-1}(x) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$, $r \in \mathbb{N}$, выполняется неравенство

$$\| \pi_{r-1} \|_{L_q(\Pi_{c\varepsilon})} << c^{r-1+n/q} (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{1/q-1/p} \| \pi_{r-1} \|_{L_p(\Pi_\varepsilon)}.$$

Доказательство. Полагаем

$$\xi(t) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{t^2}{t^2 - 1} \right), & |t| < 1; \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

Обозначая через $x_\varepsilon = (x_{\varepsilon,1}, \dots, x_{\varepsilon,n})$ центр Π_ε, определяем функции

$$\varphi_\varepsilon(x) = \kappa \prod_{i=1}^{n} \xi\left(\frac{2}{\varepsilon_i} (x_i - x_{\varepsilon,i}) \right),$$

где постоянная κ выбрана так, чтобы $\int_{\Pi_\varepsilon} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$. Очевидно, $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon = \overline{\Pi}_\varepsilon$. Тогда, как следует из [1], многочлен $\pi_{r-1}(x)$ может быть представлен в виде

$$\pi_{r-1}(x) = \sum_{|\alpha| \leq r-1} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \int_{\Pi_\varepsilon} \pi_{r-1}(y) \, D_y^\alpha \left((x - y)^\alpha \varphi_\varepsilon(y) \right) dy, \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как $x \in \Pi_{c\varepsilon}$, $y \in \Pi_\varepsilon$ и $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, то выполняются неравенства

$$\left| D^\alpha \left((x - y)^\alpha \varphi_\varepsilon(y) \right) \right| << \max_{\beta \leq \alpha} c^{\alpha - \beta} (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{-1},$$

из которых получаем оценку

$$|\pi_{r-1}(x)| << c^{r-1} (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{-1} \| \pi_{r-1} \|_{L_1(\Pi_\varepsilon)}.$$

Используя неравенство Гельдера, имеем

$$\| \pi_{r-1} \|_{L_q(\Pi_{c\varepsilon})} << c^{r-1+n/q} (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{1/q-1/p} \| \pi_{r-1} \|_{L_p(\Pi_\varepsilon)}.$$

Лемма 2. *Если Π_ε, $\Pi_{c\varepsilon}$ и Ω — множества, указанные в лемме* 1, *то для каждой функции $f \in w_p^r(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, существует $\pi_{r-1}(x; f, \Omega) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$* такой, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega) \|_{w_q^s(\Omega)} << \| f \|_{w_p^r(\Omega)} c^{r-s+n(1/q-1/p)} \times$$

$$\times (\operatorname{diam} \Pi_\varepsilon)^{r-s} (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{1/q-1/p}, \tag{7}$$

где

$$r - s - n(1/p - 1/q) > 0, \;\; s \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \;\; 0 \leq s \leq [r - n(1/p - 1/q)].$$

Доказательство. Воспользуемся представлением типа Соболева, которое устанавливается аналогично представлению Соболева [2]:

$$f(x) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \int_{\Pi_\varepsilon} f(y)\, D_y^\alpha \Big((x-y)^\alpha \varphi_\varepsilon(y) \Big)\, dy +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=r} \frac{r}{\alpha!} \int_\Omega D^\alpha f(y) \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^n} \int_{|x-y|}^{\infty} \tau^{n-1} \varphi_\varepsilon\Big(x + \tau \frac{y-x}{|x-y|} \Big)\, d\tau\, dy, \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Покажем, что алгебраические многочлены

$$\pi_{r-1}(x; f, \Omega) = \sum_{|\alpha|<r} \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \int_{\Pi_\varepsilon} f(y)\, D_y^\alpha \Big((x-y)^\alpha \varphi_\varepsilon(y) \Big)\, dy$$

удовлетворяют неравенству (7).

Из (8) следует представление

$$D^\beta f(x) - D^\beta \pi_{r-1}(x; f, \Omega) = \sum_{|\alpha|=r-|\beta|} \frac{r-|\beta|}{\alpha!} \int_\Omega D^{\alpha+\beta} f(y) \frac{(x-y)^\alpha}{|x-y|^n} \times$$

$$\times \int_{|x-y|}^{\infty} \tau^{n-1} \varphi_\varepsilon\Big(x + \tau \frac{y-x}{|y-x|} \Big)\, d\tau\, dy, \tag{9}$$

а также неравенство

$$|f(x) - \pi_{r-1}(x; f, \Omega)| \ll (\operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=r} \int_{\Pi_{c\varepsilon}} |D^\alpha f(y)|\, |x-y|^{r-n}\, |w(x,y)|\, dy,$$

где

$$w(x,y) = \int_{|x-y|}^{\infty} \tau^{n-1} \varphi_\varepsilon\Big(x + \tau \frac{y-x}{|y-x|} \Big) \operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon}\, d\tau.$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\sup_{\substack{\{x,y\} \in \Pi_{c\varepsilon} \\ x \neq y}} \Big| \operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon}\, \varphi_\varepsilon\Big(x + \tau \frac{y-x}{|y-x|} \Big) \Big| \ll 1.$$

Тогда

$$\|f - \pi_{r-1}(f, \Omega)\|_{L_q(\Omega)} \ll (\operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon})^{-1} \times$$

$$\times \sum_{|\alpha|=r} \Big\| \int_\Omega |D^\alpha f(y)|\, |\cdot - y|^{r-n}\, |w(\cdot, y)|\, dy \Big\|_{L_q(\Omega)}. \tag{10}$$

Пусть $1 \le p \le q \le \infty$, $r - n/p + M/q > 0$, $r - n/p > 0$. Тогда, воспользовавшись неравенством Гельдера для двух функций, имеем

$$\int_\Omega |D^\alpha f(y)|\, |x-y|^{r-n}\, |w(x,y)|\, dy \ll$$

$$\ll \|D^\alpha f\|_{L_p(\Omega)} \big\| |x - \cdot|^{r-n}\, |w(x, \cdot)| \big\|_{L_{p'}(\Pi_{c\varepsilon})}, \tag{11}$$

где $1/p + 1/p' = 1$.

Если $p > 1$, то $p' = p/(p-1) < \infty$ и, следовательно,

$$\| |x - \cdot|^{r-n} |w(x, \cdot)| \|_{L_{p'}(\Pi_{c\varepsilon})} =$$

$$= \left(\int_{\Pi_{c\varepsilon}} |x-y|^{(r-n)(1-1/p)^{-1}} |w(x,y)|^{(1-1/p)^{-1}} dy \right)^{1-1/p}.$$

Перейдем в последнем интеграле к сферическим координатам относительно точки x. При этом будем использовать обозначения: $\theta^{n-1} = (\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ — вектор, соответствующий угловым переменным, $\rho(\theta^{n-1})$ — длина радиус-вектора с началом в нулевой точке и концом на границе параллелепипеда, а T^{n-1} — область изменения компонент вектора θ^{n-1}. Очевидно, $\rho(\theta^{n-1}) \le \le \operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon}$. Тогда

$$\| |x - \cdot|^{r-n} |w(x, \cdot)| \|_{L_{p'}(\Pi_{c\varepsilon})} <<$$

$$<< \left(\int_{T^{n-1}} \int_0^{\rho(\theta^{n-1})} \rho^{n-1+(r-n)(1-1/p)^{-1}} \rho(\theta)^{n(1-1/p)^{-1}} \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k d\rho\, d\theta^{n-1} \right)^{1-1/p} <<$$

$$<< (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^r \int_{T^{n-1}} \int_0^{\rho(\theta^{n-1})} \rho^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1}\theta_k d\rho\, d\theta^{n-1} =$$

$$= (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^r (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^{1-1/p}.$$

Если же $p = 1$, то $p' = \infty$ и $r - n > 0$, таким образом,

$$\| |x - \cdot|^{r-n} |w(x, \cdot)| \|_{L_\infty(\Pi_{c\varepsilon})} << (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^r.$$

Подставляя полученные неравенства в (11), имеем

$$\int_\Omega |D^\alpha f(y)| |x-y|^{r-n} |w(x,y)| dy << (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^r (\operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon})^{1-1/p}.$$

Но тогда из (10) следует неравенство

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega) \|_{L_q(\Omega)} << (\operatorname{diam} \Pi_{c\varepsilon})^r (\operatorname{mes} \Pi_{c\varepsilon})^{1/q-1/p} \| f \|_{w_p^r(\Omega)} =$$

$$= c^{r+n(1/q-1/p)} (\operatorname{diam} \Pi_\varepsilon)^r (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{1/q-1/p} \| f \|_{w_p^r(\Omega)}.$$

При других возможных соотношениях между $1, p, q$ и ∞, используя рассуждения, аналогичные предыдущему, получаем неравенство

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega) \|_{L_q(\Omega)} <<$$

$$<< c^{r+n(1/q-1/p)} (\operatorname{diam} \Pi_\varepsilon)^r (\operatorname{mes} \Pi_\varepsilon)^{1/q-1/p} \| f \|_{w_p^r(\Omega)},$$

где $r - n(1/p - 1/q) > 0$, $1 \le p \le q \le \infty$.

Используя (9), с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, получаем неравенство (8).

Пусть

$$\Omega_{N,\nu} \subset \Omega_{(N,1)} = \left\{ x \colon x = (x_1, \ldots, x_n),\ x \in \Omega_\lambda,\ 0 < x < N^{-\beta} \right\}.$$

Тогда в силу леммы 3 существует многочлен $\pi_{r-1}\left(x; f, \Omega_{(N,1)} \right) \in \mathcal{P}_{r-1}(\mathbb{R}^n)$ такой, что

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,1}) \|_{w_q^s(\Omega_{N,1})} <<$$

$$<< \| f \|_{w_p^r(\Omega_{N,1})} \left(N^{-\beta} \right)^{r-s-|\lambda|(1/p-1/q)},$$

$$r - \lambda_1 s - |\lambda|(1/p - 1/q) > 0, \quad 1 \le p \le q \le \infty,$$

$$s = \overline{0, [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)]}.$$

Полагая по определению $\pi_{r-1}\left(x; f, \Omega_{N,\nu} \right) = \pi_{r-1}\left(x; f, \Omega_{(N,1)} \right)$ и учитывая, что $h_i^{(1)} = N^{-\beta\lambda_i}$, имеем

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\nu}) \|_{w_q^s(\Omega_{N,\nu})} <<$$

$$<< \| f \|_{w_p^s(\Omega_{N,1})} \left(h_n^{(1)} \right)^{r-s} \prod_{i=1}^{n} \left(h_i^{(1)} \right)^{1/q-1/p},$$

$$r - \lambda_1 s - |\lambda|(1/p - 1/q) > 0, \quad 1 \le p \le q \le \infty,$$

$$s = \overline{0, [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)]}.$$

Из способа определения многочленов $\pi_{r-1}(x; f, \Omega_{N,\nu})$ видно, что существует $c = c(n, \lambda_1) > 0$ такая, что для каждого $\Omega_{N,\nu} \subset Q_n^{(k)}$ найдется множество $\Omega'_{N,\nu} \supset \Omega_{N,\nu}$ являющееся объединением конечного числа (не зависящего от N) множеств разбиения $\{\Omega_{N,\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ области Ω_λ таких, что расстояние от них до $\Omega_{N,\nu}$ не превышает cN^{-1}, и при этом

$$\| f - \pi_{r-1}(f, \Omega_{N,\nu}) \|_{w_q^s(\Omega_{N,\nu})} <<$$

$$<< \| f \|_{w_p^r(\Omega'_{N,\nu})} \left(h_n^{(k)} \right)^{r-s} \prod_{i=1}^{n} \left(h_i^{(k)} \right)^{1/q-1/p}, \tag{16}$$

$$r - \lambda_1 s - |\lambda|(1/p - 1/q) > 0, \quad 1 \le p \le q \le \infty,$$

$$s = \overline{0, [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)]}.$$

Определим теперь сплайн-функцию, которая осуществляет приближение $f \in w_p^r(\Omega_\lambda)$ в метрике $w_q^r(\Omega_\lambda)$, $1 \le p \le q \le \infty$, на всей области Ω_λ. Полагаем

$$\sigma_{N,r,s}(x; f) = \sum_{\nu \in \mathbb{N}} \pi_{r-1}\left(x; f, \Omega_{N,\nu} \right) \psi_r(x; Q_{N,\nu}), \quad \sigma_{N,r,s}(x; f) \in S_{N,r,s}; \tag{17}$$

$\pi_{r-1}\left(x; f, \Omega_{N,\nu} \right)$ определяются так, как описано выше.

Покажем, что сплайн-функция вида (17) удовлетворяет неравенствам (6) при $N \in \mathbb{N}$. Из (14) следует представление

$$D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}\sigma_{N,r,s}(x;f) = \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \Big(\big(f(x) - \pi_{r-1}(x;f,\Omega_{N,\nu})\big)\,\psi_r(x;f,\Omega_{N,\nu}) \Big),$$

при каждом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \le r-1$. Из формулы Лейбница для производной произведения двух функций получим равенство

$$D^{\alpha}\Big(\big(f(x) - \pi_{r-1}(x;f,\Omega_{N,\nu})\big)\,\psi_r(x;Q_{N,\nu}) \Big) =$$

$$= \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!} \big(D^{\beta}f(x) - D^{\beta}\pi_{r-1}(x;f,\Omega_{N,\nu})\big)\,D^{\alpha-\beta}\psi_r(x;Q_{N,\nu}).$$

Поэтому при каждом $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \le r-1$, на Ω_λ справедливо представление

$$D^{\alpha}f(x) - D^{\alpha}\sigma_{N,r}(x;f) =$$

$$= \sum_{\beta\le\alpha} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\,\beta!} \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \big(D^{\beta}f(x) - D^{\beta}\pi_{r-1}(x;f,\Omega_{N,\nu})\big)\,D^{\alpha-\beta}\psi_r(x;Q_{N,\nu}).$$

Из этого представления, используя лемму 1 и учитывая (12)–(16), а также то, что в каждой точке Ω_λ пересекаются не более 3^n носителей функций $\psi_r(x;Q_{N,\nu})$, получаем оценки

$$\| f - \sigma_{N,r,s}(f) \|_{w_q^s(\Omega_\lambda)} << \| f \|_{w_p^r(\Omega_\lambda)} N^{-r+s+n(1/p-1/q)}, \tag{6}$$

$$r - \lambda_1 s - |\lambda|(1/p - 1/q) > 0, \quad 1 \le p \le q \le \infty,$$

$$s = \overline{0, [r/\lambda_1 - (|\lambda|/\lambda_1)(1/p - 1/q)]}.$$

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 366 с.
2. *Буренков В. И.* Интегральные представления Соболева и формула Тейлора // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1973. – **131**. – С. 33–38.
3. *Коновалов В. Н.* Описание следов некоторых классов функций многих переменных. – Киев, 1984. – 64 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84.21).
4. *Семенюк В. Б.* Приближение функций и их производных некоторыми сплайнами на областях с внешним пиком // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 100–109.

Получено 13.05.92