УДК 517.968

А. Н. Урумбаев, асп. (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

For a class of weakly singular integral equations with exponential and logarithmic singularities, the optimal order of the error of direct methods is found and the method that realizes this order is indicated.

Для класу слабко сингулярних інтегральних рівнянь зі степеневою та логарифмічною особливостями знайдено оптимальний порядок похибки прямих методів та вказано метод, що реалізує цей порядок.

1. Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — вложенное в X нормированное подпространство, причем $\|f\|_X \le \|f\|_Y$ для всех $f \in Y$. Пусть $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y с обычной нормой. Положим

$$\mathcal{H}(X,Y) = \left\{ H\colon H \in \mathcal{L}(X,Y),\ \|H\|_{X\to Y} \le \alpha,\ \|(I-H)^{-1}\|_{X\to X} \le \beta \right\};$$

$$Y_\gamma = \{ f\colon f \in Y,\ \|f\|_Y \le \gamma \},$$

где α, β, γ — заданные константы, причем $\beta > 1$.

Через Ψ обозначим класс операторных уравнений

$$z = Hz + f \tag{1}$$

с операторами $H \in \mathcal{H}(X,Y)$ и свободными членами $f \in Y_\gamma$. Очевидно, такие уравнения имеют единственное решение.

Под прямым методом размерности N приближенного решения уравнений из Ψ будем понимать всякое правило D, по которому каждому оператору $\boldsymbol{H}$ ставится в соответствие некоторая координатная система элементов $\varphi_k(H, D) \in X$, а каждой паре $\{H, f\}$ — набор коэффициентов $a_k(H, f, D)$, где $k = \overline{1, N}$. При этом приближенное решение уравнения (1) задается в форме

$$z_N(D) = \sum_{k=1}^{N} a_k \varphi_k + f. \tag{2}$$

Множество всевозможных прямых методов размерности не выше N обозначим через $\mathcal{D}_N$. Под погрешностью прямого метода $D \in \mathcal{D}_N$ на классе уравнений Ψ понимается величина

$$e(\Psi, D) = \sup_{\substack{z = Hz + f,\\ H \in \mathcal{H}(X,Y),\ f \in Y_\gamma}} \|z - z_N(D)\|_X.$$

Оптимальная (минимальная) погрешность прямых методов на классе Ψ определяется величиной

$$\theta_N(\Psi) = \inf_{D \in \mathcal{D}_N} e(\Psi, D). \tag{3}$$

Условимся писать $a(n) << b(n)$, если существует константа λ, не зависящая от n, такая, что $a(n) \le \lambda b(n)$. Кроме того, $a(n) \asymp b(n)$ будет означать, что одновременно выполняются соотношения $a(n) << b(n)$ и $b(n) << a(n)$.

© А. Н. УРУМБАЕВ, 1994

Прямой метод $D \in \mathcal{D}_N$ называется оптимальным по порядку на классе уравнений Ψ, если $e(\Psi, D) \asymp \theta_N(\Psi, D)$.

В работах С. В. Переверзева (см., например, [1]) исследовалась оптимизация прямых методов в смысле величины (3) на различных классах интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^1 h(t, \tau) z(\tau) d\tau + f(t), \tag{4}$$

где существенным условием являлось то, что операторы $\boldsymbol{H}$ действовали в пространство функций, имеющих ограниченные производные до определенного порядка. При этом порядок оптимальной погрешности зависел от степени гладкости ядра $h(t, \tau)$ по каждой переменной и гладкости свободного члена $f(t)$.

Однако можно привести примеры уравнений (4), в частности, слабо сингулярных, когда интегральные операторы не имеют указанное выше свойство. Это можно увидеть на примере уравнения Штаермана

$$z(t) = \int_0^1 \ln(|t - \tau|) z(\tau) d\tau + f(t). \tag{5}$$

В настоящей статье с использованием такой характеристики функций, как модуль непрерывности, удалось определить точный порядок оптимальной погрешности прямых методов на довольно широком классе уравнений вида (4), включающем в себя и слабо сингулярные уравнения, например, (5). Кроме того, указан прямой метод, реализующий порядок оптимальной погрешности на этом классе уравнений, т. е. метод, оптимальный по порядку.

2. Опишем прямой метод D_{P_n}, предложенный в [2] и подробно исследованный в [3, 4].

Пусть $l_1, l_2, \dots, l_n$ — базис некоторого подпространства $F_n \subset X$. А P_n: $X \to F_n$ — проектор на это подпространство. Тогда D_{P_n} представляет собой прямой метод из $\mathcal{D}(N)$, где $N = 2n$, при котором приближенное решение $z_N\left(D_{P_n}\right)$ уравнения (1) определяется как точное решение уравнения $z_N = H_N z_N + f$ с конечномерным оператором $H_N = P_n H + H P_n - P_n H P_n$. А координатная система в представлении (2) имеет вид

$$\varphi_k = \begin{cases} l_k, & k = \overline{1, n}, \\ Hl_{k-n}, & k = \overline{n+1, N}. \end{cases}$$

Следует отметить, что в [4] получена оценка погрешности этого метода на классе Ψ, когда X – гильбертово пространство. Аналогично можно показать, что если X — банахово пространство и

$$\lim_{n \to \infty} \| I - P_n \|_{X \to X} \| I - P_n \|_{Y \to X} = 0,$$

то

$$e\left(\Psi, D_{P_n}\right) \ll \| I - P_n \|^2_{Y \to X}. \tag{6}$$

Пусть M — пространство ограниченных на $[0; 1]$ функций с обычной нормой

$$\| f \| = \sup_{0 \le t \le 1} |f(t)|.$$

По аналогии с п. 1 условимся писать $a(\delta) \ll b(\delta)$, если для любого $\delta \in (0;$

1] выполняется соотношение $|a(\delta)/b(\delta)| < \infty$.

Обозначим через C^{ω} пространство непрерывных функций $f(t) \in M$, удовлетворяющих условию $\omega(f, \delta) << \omega(\delta)$, где

$$\omega(f, \delta) = \sup_{\substack{0 \le u \le \delta, \\ 0 \le t \le 1-\delta}} |f(t+u) - f(t)|$$

— модуль непрерывности функции $f(t)$, $\omega(\delta)$ — некоторый заданный модуль непрерывности на $(0; 1]$. Для простоты будем считать, что $\omega(1) = 1$. Норму в C^{ω} определим следующим образом:

$$\|f\|_{\omega} = \|f\| + \sup_{0 \le \delta \le 1} \frac{\omega(f, \delta)}{\omega(\delta)}.$$

Через D_{S_n} обозначим метод D_{P_n}, когда $X = M$, в качестве F_n выбрана линейная оболочка первых n функций ортонормированной системы функций Хаара (см., например, [5, с. 76]), а в качестве проектора P_n выступает оператор S_n, сопоставляющий каждой функции $f \in M$ n-ю частичную сумму $S_n f(t)$ ее ряда Фурье – Хаара.

Рассмотрим теперь класс Ψ_{ω} интегральных уравнений (4), где $H \in \mathcal{H}(M, C^{\omega})$ и $f \in C_{\gamma}^{\omega}$.

Лемма 1. $e\left(\Psi_{\omega}, D_{S_n}\right) << \omega^2(1/n)$.

Доказательство. В силу (6) и определения Ψ_{ω} и D_{S_n} имеем

$$e\left(\Psi_{\omega}, D_{S_n}\right) << \| I - S_n \|^2_{C^{\omega} \to M}. \tag{7}$$

Кроме того, известно [5, с. 81], что $\|f - S_n f\| \le 3\omega(f, 1/n)$. Учитывая, что для $f \in C^{\omega}$ и любого n $\|f\|_{\omega} \ge \omega(f, 1/n)/\omega(1/n)$, получаем

$$\| I - S_n \|_{C^{\omega} \to M} = \sup_{f \in C^{\omega}} \frac{\| f - S_n f \|}{\| f \|_{\omega}} \le \sup_{f \in C^{\omega}} \frac{3\omega(f, 1/n)}{\omega(f, 1/n)/\omega(1/n)} = 3\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Утверждение леммы следует из последнего неравенства и (7).

Лемма 2. *Для любого модуля непрерывности* $\omega(t)$ *и* $m \in \mathbb{N}$ *выполняется соотношение*

$$\int_0^{1/m} \omega^2(\tau) d\tau \asymp \omega^2\left(\frac{1}{m}\right) m^{-1}.$$

Доказательство. По теореме Стечкина (см., например, [6, с. 257]) существует выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_*(t)$ такой, что при любом $\tau \in [0; 1]$ $\omega(\tau) \le \omega_*(\tau) < 2\omega(\tau)$. Возведя это соотношение в квадрат, получим

$$\omega^2(\tau) \le \omega_*^2(\tau) < 4\omega^2(\tau). \tag{8}$$

Для всех t

$$\omega_*^2(t)\frac{t}{2} \le \int_0^t \omega_*^2(\tau) d\tau, \tag{9}$$

$$\int_0^t \omega^2(\tau)\,d\tau < \omega^2(\tau)t. \tag{10}$$

Умножим первое неравенство в соотношении (8) на $t/2$ при $\tau = t$, а второе проинтегрируем от 0 до t. Тогда, используя неравенства (9) и (10), получаем

$$\frac{\omega^2(t)t}{2} \le \frac{\omega_*^2(t)t}{2} \le \int_0^t \omega_*^2(\tau)\,d\tau \le \int_0^t 4\omega^2(\tau)\,d\tau \le 4\omega^2(t)t.$$

Утверждение леммы следует теперь из последней цепочки неравенств при $t = 1/m$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. $\theta_N(\Psi_\omega) \asymp \omega^2(1/N)$.

Оптимальный порядок погрешности на классе Ψ_ω *реализует метод* D_{S_n}, *когда* $n = [N/2]$ ($[\lambda]$ *— целая часть числа* λ).

Доказательство. Очевидно утверждение, что если $N_1(n) \asymp N_2(n)$, то

$$\omega(1/N_1) \asymp \omega(1/N_2). \tag{11}$$

Так как при $n = [N/2] \Rightarrow n \asymp N$, то в силу (11) и леммы 1 получаем оценку сверху

$$\theta_N(\Psi_\omega) \le \theta_{2N}(\Psi_\omega) \le e\left(\Psi_\omega, D_{S_n}\right) << \omega^2\left(\frac{1}{N}\right).$$

Прежде чем перейти к получению оценки снизу, для каждого натурального m определим подпространство F_m^0, натянутое на систему функций $\{\omega_{km}(t), k = \overline{1, m}\}$, где

$$\omega_{km}(t) = \begin{cases} \omega(t - (k-1)/m), & t \in [(k-1)/m; (2k-1)/2m], \\ \omega(k/m - t), & t \in [(2k-1)/2m; k/m], \\ 0, & t \notin [(k-1)/m; k/m]. \end{cases}$$

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 3. *Пусть* $v(t) \in F_m^0$ *и*

$$v(t) = \sum_{k=1}^m c_k \omega_{km}(t),$$

тогда

$$\| v \| = \omega\left(\frac{1}{2m}\right) \max_{1 \le k \le m} |c_k|, \quad \omega(v, \delta) \le 2\omega(\delta) \max_{1 \le k \le m} |c_k| = \frac{2\omega(\delta)\|v\|}{\omega(1/2m)}.$$

Рассмотрим оператор

$$H_m^0 z(t) = \int_0^1 h_m(t,\tau) z(\tau)\,d\tau, \quad h_m(t,\tau) = \frac{\mu \cdot m}{\omega(1/2m)} \sum_{k=1}^m \omega_{km}(t)\omega_{km}(\tau),$$

где $\mu = \min\{\alpha/3; 1 - 1/\beta\}$, а α, β — параметры, определяющие класс $\mathcal{H}(M, C^\omega)$. Очевидно, $F_m^0 \subset C^\omega$ и $H_m^0 \colon M \to F_m^0$.

Лемма 4. *При любом натуральном* m *выполняется вложение* $H_m^0 \in$ $\in \mathcal{H}(M, C^\omega)$.

Доказательство. Заметим, что при $k = \overline{1, m}$ и $z(t) \in M$

$$\left| \int_0^1 \omega_{km}(\tau) z(\tau) d\tau \right| \leq 2 \int_0^{1/2m} \omega(\tau) d\tau \, \|z\| \leq \frac{\omega(1/2m)}{m} \|z\|. \tag{12}$$

По лемме 3 с учетом (12) имеем

$$\| H_m^0 z(t) \| = \frac{\mu \cdot m}{\omega(1/2m)} \sup_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{k=1}^m \omega_{km}(t) \int_0^1 \omega_{km}(\tau) z(\tau) d\tau \right| \leq$$

$$\leq \mu \, \omega \left(\frac{1}{2m} \right) \|z\| \leq \mu \|z\|,$$

тогда

$$\| H_m^0 \|_{M \to M} = \sup_{z \in M} \frac{\| H_m^0 z \|}{\|z\|} \leq \mu$$

и согласно теореме [7, с. 230] получаем

$$\left\| \left(I - H_m^0 \right)^{-1} \right\|_{M \to M} \leq \frac{1}{1 - \| H_m^0 \|_{M \to M}} \leq \frac{1}{1 - \mu} \leq \beta.$$

Вновь пользуясь леммой 3 и (12), находим $\omega\left(H_m^0 z, \delta \right) \leq 2 \mu \|z\| \omega(\delta)$, но, тогда

$$\| H_m^0 z \|_\omega = \| H_m^0 z \| + \sup_{0 < \delta \leq 1} \frac{\omega\left(H_m^0 z, \delta \right)}{\omega(\delta)} \leq 3 \mu \|z\| \leq \alpha \|z\|.$$

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения. Положим

$$\rho_m = \frac{2 \mu m}{\omega(1/2m)} \int_0^{1/2m} \omega^2(\tau) d\tau, \quad r_m = \frac{\gamma \omega(1/2m)}{3\left(1 - \rho_m\right)},$$

$$S_{r_m} = \left\{ z : z \in F_m^0, \|z\| \leq r_m \right\}, \quad \Phi_{r_m} = \left\{ f : f = z - H_m^0 z, \ z \in S_{r_m} \right\}.$$

Используя очевидное равенство

$$\int_0^1 \omega_{km}(\tau) \, \omega_{qm}(\tau) \, d\tau \leq \begin{cases} 2 \int_0^{1/2m} \omega^2(\tau) d\tau, & k = q, \\ 0, & k \neq q, \end{cases}$$

получаем, что при $z(t) = \sum_{q=1}^m c_q \omega_{qm}(t)$

$$H_m^0 z(t) = \frac{\mu \cdot m}{\omega(1/2m)} \sum_{k=1}^m \omega_{km}(t) \sum_{q=1}^m c_q \int_0^1 \omega_{km}(\tau) \, \omega_{qm}(\tau) \, d\tau =$$

$$= \frac{\mu \cdot m}{\omega(1/2m)} \left(\sum_{k=1}^m c_k \omega_{km}(t) \right) 2 \int_0^{1/2m} \omega^2(\tau) \, d\tau = \rho_m z(t). \tag{13}$$

Лемма 5. *Для любого натурального* m *множество* Φ_{r_m} *принадлежит шару* C_γ^ω.

Доказательство. Пусть $z(t) \in S_{r_m}$, тогда по лемме 3 находим

$$\|z\|_\omega = \|z\| + \sup_{0<\delta\le 1} \frac{\omega(z,\delta)}{\omega(\delta)} \le \|z\| + \frac{2\|z\|}{\omega(1/2m)} \le \frac{3\|z\|}{\omega(1/2m)},$$

и для $f = z - H_m^0 z$, учитывая (13), получаем

$$\|f\|_\omega = \left\| z - H_m^0 z \right\|_\omega = \|z - \rho_m z\|_\omega = (1-\rho_m)\|z\|_\omega \le$$

$$\le \frac{3(1-\rho_m)}{\omega(1/2m)}\|z\| \le \frac{3(1-\rho_m)}{\omega(1/2m)} r_m = \gamma.$$

Лемма доказана.

Теперь получим оценку снизу для $\theta_N(\Psi_\omega)$. В силу лемм 4 и 5 уравнения вида

$$z = H_{N+1}^0 z + f, \quad f \in \Phi_{r_{N+1}},$$

принадлежат классу Ψ_ω. Легко убедиться в том, что множество решений $z(t)$ этих уравнений совпадает с шаром $S_{r_{N+1}}$, а элементы $H_{N+1}^0 z(t)$, как видно из (13), полностью заполняют шар радиуса $R = \rho_{N+1} r_{N+1}$ в F_{N+1}^0 с нормой пространства M. Обозначим этот шар через M_R. Используя (11) и лемму 2, можно показать, что $R \asymp \omega^2(1/N)$. В силу теоремы о поперечнике шара [8, с. 255] имеем

$$\theta_N(\Psi_\omega) = \inf_{D\in\mathcal{D}_N} \sup_{\substack{z = Hz+f,\\ H\in\mathcal{H}(M,C^\omega),\ f\in C_\gamma^\omega}} \|z - z_N(D)\| \ge$$

$$\ge \inf_{D\in\mathcal{D}_N} \sup_{\substack{z = H_{N+1}^0 z+f,\\ f\in\Phi_{r_{N+1}}}} \|z - z_N(D)\| =_{r_{N+1}}$$

$$= \inf_{D\in\mathcal{D}_N} \sup_{z\in S_{r_{N+1}}} \left\| H_{N+1}^0 z - \sum_{k=1}^{N} a_k(D)\,\varphi_k(D) \right\| \ge$$

$$\ge \inf_{\substack{F_N\in M,\\ \dim F_N\le N}} \sup_{g\in M_R} \inf_{\varphi\in F_N} \|g - \varphi\| = d_N(M_R, M) = R \asymp \omega^2\left(\frac{1}{N}\right),$$

где $d_N(M_R, M)$ — N-мерный поперечник (по Колмогорову) шара M_R в пространстве M. Теорема полностью доказана.

3. Рассмотрим частный случай операторов, действующих в пространство C^ω с некоторым модулем непрерывности.

Пусть $h(t,\tau)$ — ограниченная измеримая функция на $[0;1]\times[0;1]$, непрерывная по t равномерно относительно τ. Через $\omega_t(h,\delta)$, $\delta\in[0;1]$, будем обозначать модуль непрерывности функции $h(t,\tau)$, вычисленный по переменной t, а через K_1 — константу, определяемую соотношением $|h(t,\tau)| \le \le K_1$. Кроме того, пусть $g(t)\in L_1[0;1]$ и $\|\varphi\| \le K_2$, где $\varphi(t) = \int_0^t g(\xi)d\xi$.

Теорема 2. *При указанных выше условиях на функции $h(t,\tau)$ и $g(t)$ для интегрального оператора*

$$Hz(t) = \int_0^1 h(t,\tau)g(|t-\tau|)z(\tau)d\tau$$

справедлива оценка

$$\omega(Hz,\delta) \le 2\|z\|\left[K_1\omega(\varphi,\delta) + K_2\omega_t(h,\delta)\right].$$

Доказательство. Заметим, что

$$\int_0^1 g(|t-\tau|)d\tau = \int_0^t g(t-\tau)d\tau + \int_t^1 g(\tau-t)d\tau =$$

$$= -\int_t^0 g(\xi)d\xi + \int_0^{1-t} g(\xi)d\xi = \varphi(t) + \varphi(1-t).$$

Тогда после очевидных преобразований при $z(t)\in M$ имеем

$$|Hz(t+\delta) - Hz(t)| \le$$

$$\le \|z\|\left|\int_0^1 h(t+\delta,\tau)[g(|t+\delta-\tau|) - g(|t-\tau|)]d\tau\right. +$$

$$\left. + \int_0^1 [h(t+\delta,\tau) - h(t,\tau)]g(|t-\tau|)\,d\tau\right| \le$$

$$\le \|z\|K_1 2\omega(\varphi,\delta) + \|z\|\,\omega_t(h,\delta)\,2K_2.$$

Теорема доказана.

В качестве примера к этой теореме приведем следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть* $0 < \nu \le 1$, $q\in\mathbb{N}$, $h(t,\tau)$ *— функция, указанная в теореме 2, имеющая абсолютно непрерывную ограниченную частную производную по переменной* t. *Этого условия достаточно для того, чтобы оператор*

$$H_0 z(t) = \int_0^1 h(t,\tau)\ln^q(|t-\tau|)|t-\tau|^{\nu-1}z(\tau)d\tau$$

действовал из M *в пространство* C^{ω_0}, *где*

$$\omega_0(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 0, \\ |\ln\delta|^q\delta^\nu, & \delta\in\left(0; e^{-q/\nu}\right), \\ (q/\nu\cdot e)^q, & \delta \ge e^{-q/\nu}. \end{cases}$$

Доказательство. Легко показать, что

$$\varphi_0(t) = \int_0^\tau \ln^q\tau\,\tau^{\nu-1}d\tau = \frac{(-1)^q q!}{\nu^{q+1}}\sum_{k=0}^q \frac{(-\nu)^k\ln^k t\,t^\nu}{k!},$$

$$\|\varphi_0\| \le \frac{q!}{\nu^{q+1}}, \tag{14}$$

$$\omega(\varphi_0,\delta) = \frac{q!}{\nu^{q+1}}\sum_{k=0}^q \omega\left(\ln^k t\,t^\nu,\delta\right). \tag{15}$$

Как и в [9, с. 151], можно показать, что

$$\omega\left(\ln^k t\, t^{\nu}, \delta\right) = \begin{cases} 0, & \delta = 0, \\ |\ln\delta|^k \delta^{\nu}, & \delta \in \left(0; e^{-k/\nu}\right), \\ (k/\nu e)^k, & \delta \geq e^{-k/\nu}, \end{cases}$$

и следовательно, если $k \leq n$, то $\omega\left(\ln^k t\, t^{\nu}, \delta\right) \leq \omega\left(\ln^n t\, t^{\nu}, \delta\right)$. Подставив это выражение в (15), получим

$$\omega(\varphi_0, \delta) \ll \omega_0(\delta). \tag{16}$$

По теореме, доказанной в [9, с. 155], и определению $h(t, \tau)$ имеем, что $\omega_t(h, \delta) \ll \delta$. Кроме того, очевидно, $\delta \ll \omega_0(\delta)$, следовательно,

$$\omega_t(h, \delta) \ll \omega_0(\delta). \tag{17}$$

Теперь, подставляя (14), (16), (17) в утверждение теоремы 2, окончательно получаем

$$\omega\left(H_0 z, \delta \right) \leq 2\, \|z\| \left[K_1 \omega_0(\delta) + \frac{q!}{\nu^{q+1}} \omega_0(\delta) \right] \ll \omega_0(\delta).$$

Это и доказывает лемму 6.

Отметим, что утверждение, близкое к теореме 2 и лемме 6, было ранее доказано в [10].

Теорема 3. *Пусть* Ψ_{ω_0} *— класс интегральных уравнений вида*

$$z(t) = Hz(t) + f(t) \equiv \int_0^1 h(t, \tau) \ln^q(|t - \tau|)|t - \tau|^{\nu - 1} z(\tau) d\tau + f(t),$$

где $0 < \nu \leq 1$, $q \in \mathbb{N}$, *а ядра* $h(t, \tau)$ *таковы, что* $H \in \mathcal{H}\left(M, C^{\omega_0}\right)$, *и свободные члены* $f(t) \in C_{\gamma}^{\omega_0}$. *При* $N \geq e^{q/\nu}$ *оптимальная погрешность прямых методов из* $\mathcal{D}_N$ *на классе* Ψ_{ω_0} *удовлетворяет соотношению*

$$\theta_N\left(\Psi_{\omega_0} \right) \asymp N^{-2\nu} \ln^{2q} N.$$

Доказательство. Требуемая оценка сверху для величины $\theta_N\left(\Psi_{\omega_0} \right)$ непосредственно следует из теоремы 1. Для получения оценки снизу достаточно повторить соответствующие утверждения из доказательства теоремы 1, используя в качестве оператора H_{N+1}^0 интегральный оператор вида

$$H_{N+1}^0 z(t) = \int_0^1 h_{N+1}(t, \tau) \ln^q(|t - \tau|)|t - \tau|^{\nu - 1} z(\tau) d\tau$$

с ядром

$$h_{N+1}(t, \tau) = \frac{|t - \tau|^{1-\nu}}{\ln^q(|t - \tau|)} \frac{\mu(N+1)}{\ln^q(N+1)\cdot(N+1)^{\nu}} \sum_{k=1}^{m} l_{k,N+1}(t) l_{k,N+1}(\tau),$$

где $\mu = \min\{\alpha/3; 1 - 1/\beta\}$, и

$$l_{k,N+1}(t) = \begin{cases} |\ln(t - (k-1)/(N+1))|^q \cdot (t - (k-1)/(N+1))^{\nu}, \\ \qquad\qquad t \in [(k-1)/(N+1); (2k-1)/2(N+1)], \\ |\ln(k/(N+1) - t)|^q \cdot (k/(N+1) - t)^{\nu}, \\ \qquad\qquad t \in [(2k-1)/2(N+1); k/(N+1)], \\ 0, \qquad t \notin [(k-1)/(N+1); k/(N+1)]. \end{cases}$$

Замечание. В [10] предложен прямой метод $D_* \in \mathcal{D}_N$ приближенного решения уравнений из класса Ψ_{ω_0}, для которого в принятых обозначениях справедливо соотношение $e\left(D_*, \Psi_{\omega_0}\right) = O(N^{-\nu}\ln^q N)$. Сравнение этого соотношения с теоремой 3 показывает, что прямой метод D_* из [10] не обеспечивает для класса Ψ_{ω_0} оптимальный порядок погрешности.

1. *Переверзев С. В.* Об оптимизации адаптивных методов приближенного решения интегральных уравнений // Докл. АН СССР. – 1982. – **267**, № 6. – С. 1304–1308.
2. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1968. – 242 с.
3. *Переверзев С. В.* Об оптимизации методов приближенного решения интегральных уравнений с дифференцируемыми ядрами // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 3. – С. 173–183.
4. *Переверзев С. В., Солодкий С. Г.* О выборе базисных функций для приближенного решения уравнений типа Пайерлса // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1991. – **30**, № 1. – С. 122–131.
5. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.
8. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
9. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 510 с.
10. *Габдулхаев Б. Г., Горлов В. Е.* О сходимости полигонального метода решения слабо сингулярных интегральных уравнений // Функцион. анализ и его прил. – 1975. – С. 60–72.

Получено 22.04.93